BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ HOÀNG HIẾU

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: **PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Nguyễn Ngọc Châu**

Người phản biện 1:..

Người phản biện 2:..

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ ngành Toán họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày .... tháng .... năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- *Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng*
- *Thư viện trường Đại học Sư phạm , Đại học Đà Nẵng*

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Đạo hàm của hàm số là một trong những nội dung cơ bản của giải tích toán học, nó có vai trò quan trọng không những trong toán học mà cả những ngành khoa học khác. Trong chương trình toán cấp Trung học phổ thông hiện hành, đạo hàm của hàm một biến được giảng dạy từ năm lớp 11. Phần ứng dụng của đạo hàm học sinh được học ở năm học cuối cấp (lớp 12), tuy nhiên với thời lượng không nhiều và chỉ ở một mức độ nhất định.

Nếu không nắm vững khái niệm đạo hàm và những ứng dụng của nó thì học sinh phổ thông sẽ khó khăn để học tốt môn Toán cũng như một số môn học khác. Đồng thời đạo hàm là một phần kiến thức không thể thiếu trong các đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng, đề thi học sinh giỏi cấp quốc gia, quốc tế.

Nhằm mục đích tìm hiểu và hệ thống các ứng dụng của đạo hàm trong chương trình Trung học phổ thông, tôi chọn đề tài ‘‘**Ứng dụng đạo hàm của hàm số một biến vào việc giải một số lớp bài toán thuộc chương trình Trung học phổ thông’’** cho luận văn của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

- Tìm hiểu, nghiên cứu các kiến thức về đạo hàm của hàm một biến và những ứng dụng của nó.
- Hệ thống và phân loại một số lớp bài toán thuộc chương trình Trung học phổ thông có thể giải được nhờ các ứng dụng của đạo hàm.
- Đưa ra qui trình, định hướng việc ứng dụng đạo hàm vào việc giải toán.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Chương trình toán Trung học phổ thông.
- Các ứng dụng của đạo hàm hàm số một biến trong chương trình Trung học phổ thông.
- Lớp các bài toán có thể giải được bằng phương pháp đạo hàm.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết trong các tài liệu về đạo hàm như: sách giáo khoa, sách giáo viên, sách tham khảo, tạp chí toán học, các tài liệu khác từ internet...
- Nghiên cứu thực tế thông qua việc giảng dạy, rút kinh nghiệm, kết hợp với các kiến thức đã đạt được trong quá trình thu thập thông tin để hệ thống và đưa ra các dạng toán cụ thể giải được bằng phương pháp đạo hàm.
- Trao đổi, thảo luận với thầy hướng dẫn luận văn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Nếu hoàn thiện tốt hệ thống các kiến thức và khai thác được các ứng dụng của đạo hàm trong việc giải toán sẽ giúp cho học sinh khắc sâu các kiến thức về đạo hàm, đồng thời có thể chủ động, linh hoạt vận dụng các ứng dụng của đạo hàm để giải những bài toán sơ cấp.

6. Bố cục luận văn

Nội dung luận văn được cấu trúc như sau:

Mở đầu

Chương 1 - Đạo hàm của hàm số một biến

Chương 2 - Ứng dụng của đạo hàm trong chương trình Trung học phổ thông

Kết luận

CHƯƠNG 1 - ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

Chương này trình bày sơ lược các kiến thức cơ sở về đạo hàm của hàm số một biến để làm tiền đề cho chương sau.

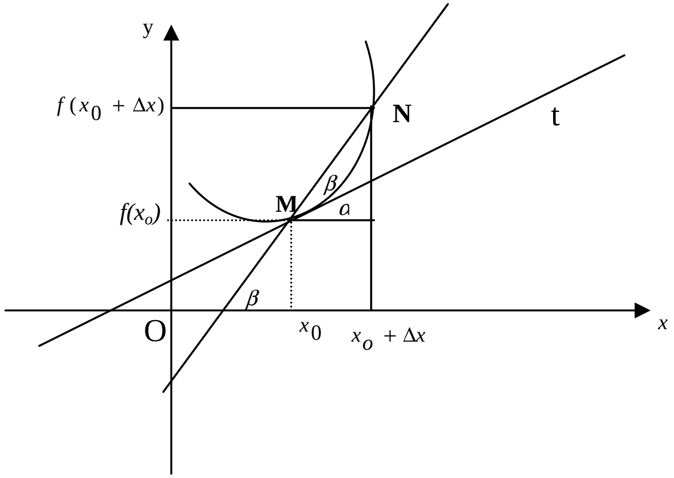
1.1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM
1.2. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG, ĐOẠN
1.3. ĐẠO HÀM CẤP CAO
1.4. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ
1.5. Ý NGHĨA HÌNH HỌC VÀ VẬT LÍ CỦA ĐẠO HÀM
1.5.1. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Xét một đường cong (C) là đồ thị của hàm số *y = f(x)*, điểm M cố định trên (C) và một cát tuyến di động MN.

Nếu khi N di chuyển trên (C) đến điểm M mà cát tuyến MN dần đến một vị trí giới hạn Mt thì đường thẳng Mt được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M. Điểm M được gọi là tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; f(x_0))$ và điểm $N(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Hệ số góc của cát tuyến MN là: $\tan\beta = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Cho N dần đến M trên (C), lúc đó $\Delta x \to 0$ (*hình 1.1*).



Hình 1.1: Minh họa cho tiếp tuyến

Nếu tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ có giới hạn thì $\tan\beta$ cũng có giới hạn đó.

Như vậy β dần đến một góc xác định mà ta gọi là α, nghĩa là cát tuyến MN dần đến một vị trí giới hạn Mt tạo với chiều dương của Ox một góc α. Vậy $\tan\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Theo định nghĩa đạo hàm ta có: $\tan\alpha = f'(x_0)$.

Cho hàm số *y = f(x)* có đồ thị (C) và có đạo hàm tại x_0. Khi đó ta có:

Định lý 1: Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số *f(x)* tại x_0 bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M_0(x_0, f(x_0))$.

Định lý 2: Phương trình tiếp tuyến của hàm số *y = f(x)* có đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ là: $y-y_0 = f'(x_0).(x-x_0)$

1.5.2. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm
1.5.2.1. Bài toán vận tốc tức thời

Xét sự chuyển động thẳng của một chất điểm. Giả sử quãng đường *s* đi được của nó là một hàm số *s = s(t)* của thời gian *t* (*s = s(t) còn gọi là phương trình chuyển động của chất điểm*).

Trong khoảng thời gian từ t_0 đến *t*, chất điểm đi được quãng đường là: $s-s_0 = s(t)-s(t_0)$

Nếu chất điểm chuyển động đều thì tỉ số: c là một hằng số với mọi *t*. Đó chính là vận tốc của chuyển động tại mọi thời điểm .

Nếu chất điểm chuyển động không đều thì tỉ số trên là vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian $|t-t_0|$.

Khi *t* càng gần t_o, tức là $|t-t_0|$ càng nhỏ thì vận tốc trung bình càng thể hiện được chính xác hơn mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

Người ta gọi giới hạn hữu hạn: $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ (*nếu có*) là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.

Vậy vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình *s = s(t)* bằng đạo hàm của hàm số *s = s(t)* tại điểm t_0, tức là : $v(t_0) = s'(t_0)$.

1.5.2.2. Bài toán gia tốc tức thời

Cho phương trình chuyển động thẳng: *s = s(t),* giả thuyết *s(t)* có đạo hàm cấp hai.

Ta đã biết, vận tốc tức thời ở thời điểm *t* của chuyển động là: *v(t)= s'(t)*

Cho t một số gia Δt thì *v(t)* có số gia tương ứng là Δv.

Tỷ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ được gọi là gia tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian Δt.

Giới hạn nếu có của tỷ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ khi $\Delta t \to 0$ được gọi là gia tốc tức thời tại thời điểm *t* của chuyển động, kí hiệu là $\gamma(t)$.

Ta có: $\gamma(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$, nhưng *v'(t)= s"(t).*

Vậy: " Gia tốc tức thời tại thời điểm *t* của chuyển động là : $\gamma(t) = s''(t)$ ".

1.5.2.3. Bài toán cường độ tức thời

Điện lượng *Q* truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian *t:* $Q = Q(t)$

Cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian $|t - t_0|$ là : $I_{tb} = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$

Nếu $|t - t_0|$ càng nhỏ thì tỉ số này càng biểu thị chính xác hơn cường độ dòng điện tại thời điểm t_o. Người ta gọi giới hạn hữu hạn: $I(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ (*nếu có*) là cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0.

Vậy cường độ tức thời $I(t_0)$ của dòng điện tại thời điểm t_0 (vận tốc tại t_0) bằng đạo hàm của hàm số $Q = Q(t)$ tại điểm t_0, tức là : $I(t_0) = Q'(t_0)$

1.6. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM TRONG KINH TẾ

Cho hàm số *y = f(x)* với *x, y* là các biến kinh tế, trong đó *x* là biến độc lập hay biến đầu vào; *y* là biến phụ thuộc hay biến đầu ra.

Trong quản trị kinh doanh, người ta hay quan tâm đến xu hướng thay đổi của *y* khi *x* thay đổi một lượng nhỏ.

Với định nghĩa đạo hàm của hàm một biến, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Khi Δx đủ nhỏ ta có thể viết :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Khi $\Delta x = 1 \Rightarrow \Delta y \approx f'(x_0)$

Vậy đạo hàm biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi của biến số y khi biến số *x* tăng thêm một đơn vị. Với quan hệ hàm *y = f(x)* để mô tả sự thay đổi của biến kinh tế *y*, khi biến kinh tế *x* thay đổi, gọi $f'(x_0)$ là giá trị biên tế *y* tại x_0 (còn gọi là biên tế)

Với mỗi hàm kinh tế biên tế có một tên gọi riêng, chẳng hạn:

Hàm doanh thu: $TR = p.Q$ *thì* $\frac{dTR}{dQ}$ (trong đó p là giá bán một sản phẩm, Q là số lượng hàng bán được) được gọi là doanh thu biên tế.

Hàm chi phí: $TC = f(x)$ *thì* $\frac{dTC}{dx} = \frac{df}{dx}$, (với *x* là sản lượng) được gọi là chi phí biên tế.

Hàm sản xuất *Q = f(L),* (với *L* là số lao động) thì $\frac{dQ}{dL} = \frac{df}{dL}$ được gọi là sản lượng biên tế.

1.7. BẢNG ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

1. (C)’ = 0. (C = const)	13. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, đk: u > 0
2. (x)’ = 1, với mọi x	14. $(u^{\alpha})' = \alpha.u'u^{\alpha-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$	15. $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $\forall u \neq 0$
4. $(x^n)' = n.x^{n-1}$	16. $(\sin u)' = u'.\cos u$
5. $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \neq 0$	17. $(\cos u)' = -u'.\sin u$
6. $(\sin x)' = \cos x$	18. $(\tan u)' = \dfrac{u'}{(\cos u)^2}$,
7. $(\cos x)' = -\sin x$	19. $(\cot u)' = \dfrac{-u'}{(\sin u)^2}$
8. $(\tan x)' = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = 1+\tan^2 x$	20. $(\ln\|u\|)' = \dfrac{u'}{u}$, $u \neq 0$
9. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{(\sin x)^2} = -(1+\cot^2 x)$	21. $(a^u)' = u'.a^u \ln a$
10. $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$	22. $(\log_a\|u\|)' = \dfrac{1}{u'\ln a}$, $u \neq 0$, $a > 0$ và $a \neq 1$
11. $(a^x)' = a^x \ln a$	
12. $(\log_a\|x\|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, với $a > 0$ và $a \neq 1, x \neq 0$	

CHƯƠNG 2 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TRONG CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chương này là nội dung chính của luận văn, trình bày những ứng dụng của đạo hàm hàm số một biến trong chương trình trung học phổ thông.

2.1. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

2.1.1. Tiếp tuyến của đường cong

Các bài toán lập phương trình tiếp tuyến của một đường cong thường gặp ở 3 dạng sau:

1. Tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường cong.
2. Tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước.
3. Tiếp tuyến có hệ số góc cho trước

Lưu ý: Giả sử hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 khi đó:

- Nếu d_1 vuông góc với d_2 khi và chỉ khi $k_1.k_2 = -1$
- Nếu d_1 song song với d_2 thì $k_1 = k_2$

Ta xét bài toán tổng quát sau: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và có đạo hàm trong miền xác định của nó. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C), biết rằng:

a. d tiếp xúc với (C) tại $M(x_0; f(x_0))$

b. d đi qua $A(x_A; y_A)$

c. d có hệ số góc k cho trước

Hướng giải:

a. Tính $f'(x_0)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; f(x_0))$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, với $y_0 = f(x_0)$

b. Gọi d là đường thẳng bất kỳ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k, khi đó phương trình của d là: $y = k(x - x_A) + y_A$

Điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc (C) là hệ phương trình:

$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$ phải có nghiệm (nghiệm $(x_A; k)$ của hệ chính là hoành độ tiếp điểm và hệ số góc k của tiếp tuyến)

c. Giải phương trình $f'(x) = k$. Các nghiệm của phương trình này *(nếu có)* là hoành độ các tiếp điểm. Giả sử x_o là một nghiệm của phương trình f'(x) = k và $y_O= f(x_O)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k, tại điểm có tọa độ $(x_O; f(x_O))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ:

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các điểm trên trục hoành mà từ đó kẻ được đúng ba tiếp tuyến đến đồ thị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải:

Tập xác định của hàm số: D = R. Ta có:

$$y = x^3 + 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x.$$

Gọi $M(a;0) \in Ox$, đường thẳng (d) qua M và có hệ số góc k có phương trình là: $y = k(x - a)$.

Để (d) tiếp xúc (C) thì hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x-a) \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases}$ có nghiệm .

Suy ra:

$$x^3 + 3x^2 = (3x^2 + 6x)(x-a) \Leftrightarrow 2x^3 - 3(a-1)x^2 - 6ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(a-1)x - 6a] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 \end{array}\right. \qquad (2.1)$$

Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 0$.

Để từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình (2.1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1k_2 = -1$, điều này có nghĩa là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a-1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Theo công thức Viet thì $x_1x_2 = -3a$ và $x_1 + x_2 = \dfrac{3(a-1)}{2}$

$$(2.2) \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > \dfrac{-1}{3} \\ a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a-1) - 108a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > \dfrac{-1}{3} \\ a \neq 0 \\ 1 - 27a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy chỉ có 1 điểm $M(\frac{1}{27}, 0) \in Ox$ thoả điều kiện bài toán.

2.1.2. Cực trị của hàm số

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D $(D \subset R)$ và $x_0 \in D$. Khi đó x_0 được gọi là một điểm cực đại (tương ứng cực tiểu) của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng (a ; b) chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0)$ (tương ứng $f(x) > f(x_0)$) với mọi $x \in (a;b) \backslash \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số (tương ứng giá trị cực tiểu của hàm số).

Điểm cực đại, điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị của hàm số.

Định lí 1 (*Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị***)**: Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lí 2 (*Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị***)**: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a ; b)$) chứa x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$. Khi đó:

a. Nếu $f'(x_0) < 0, \forall x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x_0) > 0, \forall x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số *f(x)* đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b. Nếu $f'(x_0) > 0, \forall x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x_0) < 0, \forall x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số *f(x)* đạt cực đại tại điểm x_0.

Định lí 3: Giả sử hàm số *f(x)* có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\,;\,b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và *f(x)* có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0.

a. Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số *f(x)* đạt cực đại tại điểm x_0.

b. Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số *f(x)* đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Các bài toán liên quan đến cực trị hàm số thường gặp là: tìm cực trị của hàm số; tìm điều kiện để hàm số có cực trị; viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số,…

Phương pháp chung:

Để tìm cực trị của hàm số *y = f(x),* ta có thể dùng đạo hàm cấp một hoặc đạo hàm cấp hai:

a. Dùng đạo hàm cấp một: Ta thực hiện như sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số;
- Tìm đạo hàm *y' = f'(x);*
- Lập bảng biến thiên, dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

b. Dùng đạo hàm cấp hai (*đối với các hàm số có đạo hàm cấp hai*): Ta thực hiện như sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số;
- Tìm đạo hàm $y' = f'(x)$ và $y'' = f''(x)$;
- Tìm các điểm $x_0 \in D$ mà $f'(x_0) = 0$. Nếu $f''(x_0) < 0$ (tương ứng $f''(x_0) > 0$) thì x_0 là điểm cực đại (tương ứng x_0 là điểm cực tiểu). Nếu $f''(x_0) = 0$ thì chưa có kết luận tính cực trị của x_0.

Ví dụ: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có đồ thị (C_m).

a. Tìm m để hàm số có hai cực trị.

b. Gọi M_1 và M_2 là các điểm cực trị, tìm *m* để các điểm M_1, M_2 và điểm B (0; -1) thẳng hàng.

Giải:

a. *Tìm m để hàm số có hai cực trị*

Tập xác định của hàm số là *D = R*

$$y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m \;\Rightarrow\; y' = 6x^2 + 6(m-3)x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 - m \end{array}\right.$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình *y' = 0* có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Vậy để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 3$

b. *Tìm m để 2 điểm cực trị M_1, M_2 và B (0; -1) thẳng hàng.*

Chia *f(x)* cho $f'(x)$, ta được:

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}\right) - (m-3)^2 x + 11 - 3m$$

Suy ra phương trình đường thẳng M_1M_2 là:

$$y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$$

Ba điểm M_1, M_2, B thẳng hàng $\Leftrightarrow B \in M_1M_2$

$\Leftrightarrow$ *-1 = 11 - 3m* $\Leftrightarrow$ *m = 4*, thỏa điều kiện $m \neq 3$.

Vậy khi *m = 4* ba điểm M_1, M_2, B thẳng hàng

2.2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

2.2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số *f(x)* xác định trên tập hợp D $(D \subset R)$

a. Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số *f(x)* trên D, và ký hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$

b. Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$

thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số *f(x)* trên D, và ký hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

2.2.2. Nhận xét

a. Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó;

b. Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

c. Nếu đạo hàm *f'(x)* giữ nguyên dấu trên đoạn [*a ; b*] thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, hàm số *f(x)* đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút của đoạn;

d. Giả sử trên [*a ; b*] hàm số *f'(x)* chỉ có một số hữu hạn các điểm x_i $(x_i < x_{i+1})$ mà tại đó $f'(x_i)$ bằng 0 hoặc không xác định thì hàm số *y = f(x)* đơn điệu trên mỗi khoảng $(x_i\ ;\ x_{i+1})$. Khi đó giá trị lớn nhất (tương ứng giá trị nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn [*a ; b*] là số lớn nhất (tương ứng số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút *a, b* và tại các điểm x_i nói trên.

2.2.3. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

2.2.3.1. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục trên một khoảng, ta lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng đó rồi dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

2.2.3.2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục trên một đoạn, ta có thể thực hiện một trong hai cách sau:

a. Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn đó rồi dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

b. Thực hiện theo quy tắc sau:

- Tìm các điểm x_i (i= 1, 2 ...) thuộc *(a ; b)* mà tại đó hàm số *f(x)* có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm;

- Tính các giá trị *f(a), f(b), f(*x_i*) (i= 1,2...)*
- Số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các giá trị trên lần lượt là giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [a ; b].

2.2.4. Ví dụ

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau rồi gập tấm nhôm lại để có một cái hộp không nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.

Giải: Gọi *x* là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt, điều kiện $0 < x < \frac{a}{2}$.

Thể tích khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$, $(0 < x < \frac{a}{2})$. Ta phải tìm $x_0 \in (0;\frac{a}{2})$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $V(x) = x(a-2x)^2$, với $x \in (0;\frac{a}{2})$.

Suy ra: $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6},\ x = \frac{a}{2}$ *(loại).*

Lập bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	0

Từ bảng biến thiên trên ta thấy trong khoảng $(0;\frac{a}{2})$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x = \frac{a}{6}$, nên tại đó

$V(x)$ có giá trị lớn nhất $\max\limits_{(0\,;\,\frac{a}{2})} V(x) = \dfrac{2a^3}{27}$.

Vậy để khối hộp có thể tích lớn nhất thì phải cắt hình vuông có cạnh $\dfrac{a}{6}$.

2.3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

2.3.1. Nhận xét

Một số lớp phương trình, hệ phương trình và bất phương trình có thể giải được bằng cách dựa vào tính đơn điệu, tính có đạo hàm của hàm số. Sau đây là những tính chất thường được dùng để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu và liên tục trên D thì số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên D không nhiều hơn một và $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in D$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tương ứng nghịch biến) và hàm số $y = g(x)$ nghịch biến (tương ứng đồng biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Tính chất 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n và phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm, khi đó phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m+1$ nghiệm.

2.3.2. Ví dụ

Giải phương trình $3^x = 1 + x + \log_3(1+2x)$

Giải:

Điều kiện: $x > -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$3^x + x = 1 + 2x + \log_3(1+2x)$$

$$\Leftrightarrow 3^x + \log_3 3^x = 1 + 2x + \log_3(1+2x) \qquad (2.4)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$. Ta có hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trong $(0\,;+\infty)$

$$(2.4) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1+2x) \Leftrightarrow 3^x = 1+2x \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$$

Xét hàm số: $f(x) = 3^x - 2x - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 - 2 \Rightarrow f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0$

Suy ra hàm số $f(x)$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà $f(0) = f(1)$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

2.4. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.4.1. Phương pháp chung

Cơ sở của phương pháp sử dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức là vận dụng tính đơn điệu của hàm số, cụ thể:

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$.

a. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ suy ra $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

b. Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a;b]$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ suy ra $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

2.4.2. Ví dụ

Chứng minh rằng: $e^{x-1} \geq x$, $\forall x \in R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = e^{x-1} - x$ trên R. Ta có:

$f'(x) = e^{x-1} - 1$, $\forall x \in R$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Từ tính chất của hàm số mũ suy ra: $f'(x) > 0$ khi $x > 1$, $f'(x) < 0$ khi $x < 1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(x) > 0, \forall x \in R$, $x \neq 1$ *và* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, nghĩa là: $e^{x-1} \geq x, x \in R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

2.5. GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

2.5.1. Phương pháp chung

Các bài toán cực trị trong hình học thường gặp là: xác định tọa độ của một điểm, lập phương trình của một đường thẳng hay một mặt phẳng để một biểu thức hình học nào đó đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Thông thường khi gặp dạng toán này ta giải theo phương pháp sau:

Đặt một đại lượng thay đổi nào đó bằng biến *t* (lưu ý đến miền xác định của biến *t*), chuyển bài toán về việc khảo sát hàm một biến *t*, sau đó vận dụng đạo hàm cũng như các kiến thức liên quan đến hàm một biến để giải quyết.

2.5.2. Ví dụ

Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ và hai điểm A(2; -1; 1); B(1; -1; 0). Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ để diện tích tam giác AMB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Xét cặp vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng xác định đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_1}(1;1;-1)$ và $\overrightarrow{n_2}(2;-1;0)$, đường thẳng Δ đi qua N(1; 1; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-1;-2;-3)$ hay $\vec{u} = (1;\ 2\ ;\ 3)$ nên phương trình tham số của đường thẳng Δ là :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Gọi M*(1+t; 1+2t; 1+3t*) là điểm thuộc đường thẳng Δ.

Ta có: $\overrightarrow{AM}(t-1;\ 2t+2;\ 3t)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-1;\ 0;\ -1)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = (-2t - 2; -2t - 1;\ 2t + 2)$$

Vậy:

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(2t+2)^2 + (2t+1)^2 + (2t+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{12t^2 + 20t + 9}$$

Xét hàm số: $f(t) = 12t^2 + 20t + 9 > 0$.

Ta có: $f'(t) = 24t + 20$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6}$, hàm số này có đồ thị là một parabol có bề lõm quay lên. Do đó *f(t)* có giá trị nhỏ nhất khi $t = -\frac{5}{6}$ khi đó $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

Vậy để diện tích tam giác AMB nhỏ nhất thì $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

2.6. GIẢI CÁC BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC

2.6.1. Phương pháp chung

- Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng một biểu thức của cùng một hàm số lượng giác (hoặc một nhóm hàm lượng giác) và theo cùng một cung (hoặc một góc).
- Đặt ẩn phụ, tìm miền giá trị của ẩn phụ. Chuyển hàm đã cho về hàm đơn giản hơn.
- Sử dụng đạo hàm và các tính chất liên quan đến hàm một biến để giải.

2.6.2. Ví dụ

Cho hàm số: $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$. Tùy theo giá trị của *m*, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của *f(x)*. Từ đó tìm *m* sao cho: $\left(f(x)\right)^2 \leq 36,\ \forall x \in R$.

Giải:

Ta có:

$$f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$$

$$= 1 - \sin^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$$

Đặt: $t = \sin x + \cos x$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Khi đó: $t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Lúc này *f(x)* trở thành:

$$g(t) = 1 - (t^2 - 1)^2 + 2t^3 - 3(t^2 - 1) + m$$
$$= -t^4 + 2t^3 - t^2 + 3 + m$$

$$\Rightarrow g'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t = -2t(2t^2 - 3t + 1)$$

$$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	
$g(t)$	$m-3-4\sqrt{2}$	↗	$m+3$	↘	$m+\frac{47}{16}$	↗	$m+3$	↘	$m-3+4\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta được:

$$\min f(x) = \min g(t) = m - 3 - 4\sqrt{2};$$
$$\max f(x) = \max g(t) = m + 3.$$

Theo giả thiết bài toán thì: $(f(x))^2 \le 36 \Leftrightarrow -6 \le f(x) \le 6$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $x \in R$, khi :

$$\begin{cases} -6 \le \min f(x) \\ 6 \ge \max f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 - 4\sqrt{2} \ge -6 \\ m + 3 \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 3 \le m \le 3$$

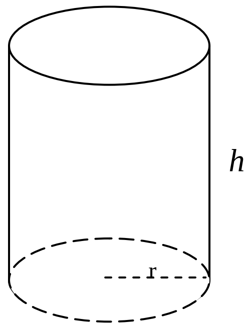
Vậy để $(f(x))^2 \le 36,\ \forall x \in R$ thì $4\sqrt{2} - 3 \le m \le 3$.

2.7. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Đạo hàm của hàm số một biến được ứng dụng để giải quyết nhiều bài toán trong thực tế cuộc sống. Để giải những bài toán như vậy, ta phải căn cứ vào điều kiện của bài toán để tìm ra biến số độc lập, biểu thức hàm số liên hệ giữa đại lượng phải khảo sát với biến số độc lập. Sau đây là một số bài toán như vậy:

Ví dụ

Một nhà máy sản xuất can hình trụ bằng kim loại có thể 1 lít. Tìm kích thước của hình trụ để nhà máy sản xuất ra cái can tốn ít kim loại nhất.



Hình 2.1 : Minh họa cho cái can

Giải: Ta có cái can được biểu diễn như hình 2.1, gọi *r* là bán kính, *h* chiều cao của hình trụ (đơn vị tính *cm*).

Để tốn ít kim loại nhất có nghĩa là tổng diện tích (diện tích toàn phần) của hình trụ là nhỏ nhất.

Ta dễ dàng thấy nếu cắt mặt xung quanh của hình trụ theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta sẽ được một hình chữ nhật có chiều dài các cạnh là $2\pi r$ và *h*.

Vì vậy diện tích toàn phần của mặt trụ là $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Theo giả thiết cái can có được thể tích là $1\ lit = 1000\,cm^3$

Do đó: $V = Bh = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$, thay vào biểu thức A , ta được:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0$$

Ta có: $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = \dfrac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$

$$\Rightarrow A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}, \quad r > 0$$

Lập bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$A'(r)$		-	0	+	
$A(r)$		↘	$A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy A đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Đồng thời $h = \dfrac{1000}{\pi r^2} = \dfrac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$.

Vậy để tốn ít nguyên liệu sản xuất can thì can hình trụ này có bán kính $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\ (cm)$ và chiều cao gấp đôi bán kính tức là $h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ (cm).

KẾT LUẬN

Luận văn "**Ứng dụng đạo hàm của hàm số một biến vào việc giải một số lớp bài toán thuộc chương trình Trung học phổ thông**" đã thực hiện được các vấn đề sau đây:

1. Thông qua các tài liệu về hàm số một biến đặc biệt là đạo hàm để hệ thống và phân loại một số lớp bài toán thuộc chương trình Trung học phổ thông có thể giải được bằng đạo hàm của hàm số một biến. Cụ thể là: các bài toán liên quan đến khảo sát hàm số, bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất; giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức, một số bài toán hình học và lượng giác.
2. Đối với mỗi lớp bài toán, ngoài những nhận xét về định hướng phương pháp giải, còn có những ví dụ minh họa và phần các bài toán bổ sung.
3. Phần cuối của luận văn giới thiệu một số bài toán thực tế, giải được bằng ứng dụng của đạo hàm hàm số một biến.

Hy vọng rằng, nội dung của luận văn còn tiếp tục được hoàn thiện và mở rộng hơn nhằm góp phần vào việc dạy, học toán thuộc chương trình Trung học phổ thông.