

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Lê Ngọc Cường

**ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT ĐIỂM BẤT ĐỘNG
TRONG HÌNH NÓN VÀO PHƯƠNG TRÌNH
VI PHÂN PHI TUYẾN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin kính gửi đến Thầy PGS. TS Lê Hoàn Hóa lời cảm ơn sâu sắc và chân thành nhất vì sự tận tình giúp đỡ và chỉ bảo của Thầy dành cho tôi trong suốt thời gian làm luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh, trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên Thành phố Hồ Chí Minh và trường Đại học Quốc Tế đã tận tình giảng dạy và hướng dẫn tôi trong suốt khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô Phòng Khoa học Công nghệ và Sau Đại học trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin kính gửi đến UBND tỉnh Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, Sở Nội vụ, Sở Giáo Dục và Đào Tạo Bà Rịa – Vũng Tàu , Ban Giám Hiệu trường THPT Ngô Quyền lời cảm ơn chân thành vì đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận tiện để tôi học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô trường THPT Ngô Quyền và đặc biệt là các Thầy trong Tổ Toán; các bạn học viên cao học Toán K19 đã luôn động viên, khuyến khích và giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và làm luận văn.

Sau cùng tôi xin kính gửi đến gia đình tôi cùng những người thân tất cả tình cảm yêu thương nhất và lòng tri ơn sâu sắc nhất, nơi đã tạo cho tôi niềm tin và nghị lực và là chỗ dựa vững chắc nhất giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Vì kiến thức bản thân còn hạn chế nên luận văn sẽ khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự nhận xét và chỉ bảo của Quý Thầy Cô và sự góp ý chân thành của các bạn đồng nghiệp.

LỜI CAM ĐOAN

Mặc dù trong quá trình làm luận văn này, tôi đã nghiên cứu, tìm hiểu và tham khảo ở sách vở, các bài báo toán học của các tác giả và luận văn của các khóa trước, tôi có sử dụng một số kết quả đã được chứng minh để hoàn thành luận văn của mình nhưng tôi xin cam đoan không sao chép các luận văn đã có và tôi xin hoàn toàn chịu mọi trách nhiệm với lời cam đoan của mình.

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN.....	2
LỜI CAM ĐOAN.....	4
MỤC LỤC	5
MỞ ĐẦU.....	7
Chương 1. NÓN VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓN.....	8
1.1 Nón và thứ tự sinh bởi nón.....	8
1.2 Nón chuẩn.....	9
1.3 Nón chính qui	10
1.4 Nón sinh	10
1.5 Nón liên hợp	12
Chương 2. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỀU	13
2.1 Điểm bất động của ánh xạ tăng.....	13
2.2 Điểm bất động của ánh xạ giảm.....	20
2.3 Cặp điểm bất động của ánh xạ đơn điệu hỗn tạp.....	22
Chương 3. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN CÓ THỨ TỰ VÀO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN.....	25
3.1 Bất phương trình vi phân.....	25
3.2 Tập hợp bất biến dòng.....	32
3.3 Phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới.	37
3.4 Kỹ thuật lập đơn điệu.....	42
3.5 Phương pháp tựa nghiệm trên, tựa nghiệm dưới.	50

KẾT LUẬN.....	56
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	57

MỞ ĐẦU

Luận văn chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân dạng

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

Trong đó E là không gian Banach, $f \in C[J_+ \times E, E]$ và $f(t, x)$ là hàm tựa đơn điệu không giảm theo x với mỗi $t \in J_+$ liên quan đến nón K hoặc $f(t, x)$ có tính chất tựa đơn điệu hỗn tạp.

Nội dung luận văn sử dụng năm phương pháp chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình (1).

1. Bất phương trình vi phân.
2. Tập hợp bất biến dòng.
3. Phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới.
4. Kỹ thuật lặp đơn điệu.
5. Phương pháp tựa nghiệm trên và tựa nghiệm dưới.

Các phương pháp này thường được dùng chứng minh sự tồn tại điểm bất động trong không gian có thứ tự.

Nội dung luận văn được trình bày lại trong tài liệu:

Dajun Guo, V. lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, INC, London 1988.

Luận văn được trình bày thành ba chương.

Chương I: Trình bày về nón và các tính chất của nón.

Chương II: Trình bày về điểm bất động của ánh xạ đơn điệu.

Chương III: Áp dụng phương pháp nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động trong không gian có thứ tự vào phương trình vi phân phi tuyến.

Chương 1. NÓN VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓN

1.1 Nón và thứ tự sinh bởi nón

Định nghĩa 1.1.1

1/ Tập K trong không gian Banach thực E gọi là nón nếu:

- i) K là tập đóng
- ii) $K + K \subset K, \lambda K \subset K \quad \forall \lambda \geq 0$
- iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

2/ Nếu K là nón thì thứ tự trong E sinh bởi K được định bởi:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

3/ Nón K được gọi là có thể (solid) nếu nó có chứa điểm trong, tức là $K^\circ \neq \emptyset$ và $y - x \in K$ thì ta viết $x =_K y$.

4/ Nón $K \subset E$ được gọi là minihedral nếu $\sup\{x, y\}$ tồn tại với mọi cặp $\{x, y\}$ bị chặn trên (tức là $\exists w \in E : x \leq w, y \leq w$).

5/ Nón $K \subset E$ được gọi là strong minihedral nếu $\sup D$ tồn tại với mọi tập bị chặn $D \subset E$.

Mệnh đề 1.1.1

Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón K . Khi đó:

- 1/ $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \lambda x \leq \lambda y \quad \forall z \in E, \forall \lambda \geq 0$.
- 2/ $x_n \leq y_n (n \in \mathbb{N}^*), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow x \leq y$.
- 3/ Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng, hội tụ về x thì $x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh:

1/ Suy ra từ tính chất ii) của định nghĩa nón.

2/ Ta có $x_n \leq y_n \Rightarrow y_n - x_n \in K$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x.$$

Do K là tập đóng nên $(y - x) \in K$ hay $x \leq y$.

3/ Cho $m \rightarrow +\infty$ trong $x_n \leq x_{n+m}$, ta được điều phải chứng minh.

1.2 Nón chuẩn

Định nghĩa 1.2.1

Nón K gọi là nón chuẩn nếu:

$$\exists N > 0 : \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|.$$

Mệnh đề 1.2.1

Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón chuẩn K . Khi đó:

1/ Nếu $u \leq v$ thì đoạn $\langle u, v \rangle := \{x \in E : u \leq x \leq v\}$ bị chặn theo chuẩn.

2/ Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

3/ Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu, có dãy con hội tụ về a thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Chứng minh:

$$1/ \forall x \in \langle u, v \rangle \Rightarrow \theta \leq x - u \leq v - u$$

$$\Rightarrow \|x - u\| \leq N \|v - u\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \|u\| + N \|v - u\|.$$

$$2/ \text{Ta có } x_n \leq y_n \leq z_n \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)} \Rightarrow \theta \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$$

$$\Rightarrow \|y_n - x_n\| \leq N \|z_n - x_n\| \rightarrow 0.$$

$$\text{Ta lại có } y_n = x_n + (y_n - x_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + (y_n - x_n)) = a$$

$$3/ \text{Ta coi dãy } \{x_n\} \text{ tăng và } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Vì $x_n \leq x_{n_k}$ (n cố định, k đủ lớn) nên $x_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cho $\varepsilon > 0$, chọn k_0 để $\|x_{n_{k_0}} - a\| < \frac{\varepsilon}{N}$ (N là hằng số nói trong định nghĩa nón chuẩn).

$$\forall n \geq n_{k_0}, \theta \leq a - x_n \leq a - x_{n_{k_0}} \Rightarrow \|a - x_n\| \leq N \|a - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon. \quad \text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

1.3 Nón chính qui

Định nghĩa 1.3.1

Nón K gọi là nón chính qui nếu mọi dãy tăng, bị chặn trên thì hội tụ.

Mệnh đề 1.3.1

Nón chính qui là nón chuẩn.

Chứng minh:

Giả sử K là nón chính qui nhưng không là nón chuẩn. Khi đó

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n, y_n : \theta \leq x_n \leq y_n, \|x_n\| > n^2 \|y_n\|.$$

$$\text{Đặt } u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, v_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \text{ thì } \theta \leq u_n \leq v_n, \|u_n\| = 1, \|v_n\| < \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{Vì } \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty \text{ nên tồn tại } v := \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Dãy $s_n := u_1 + u_2 + \dots + u_n$ tăng, bị chặn trên bởi v nên hội tụ

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \theta \text{ vô lý vì } \|u_n\| = 1.$$

1.4 Nón sinh

Định nghĩa 1.4.1

Nón K gọi là nón sinh nếu $E = K - K$ hay $\forall x \in E \exists u, v \in K : x = u - v$.

Mệnh đề 1.4.1

Nếu K là nón sinh thì tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$\forall x \in E \exists u, v \in K : x = u - v, \|u\| \leq M \|x\|, \|v\| \leq M \|x\|.$$

Chứng minh:

I. Đặt $C = K \cap \overline{B}(\theta, 1) - K \cap \overline{B}(\theta, 1)$, ta chứng minh $\exists r > 0 : \overline{C} \supset B(\theta, r)$.

Thật vậy: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$ (Do K là nón sinh)

$\Rightarrow \exists n_0, \exists G$ mở: $n_0 \overline{C} \supset G$ (Do định lý Baire)

Vì $\overline{C}$ lồi, đối xứng nên:

$$\begin{aligned} \overline{C} \supset \frac{1}{2} \overline{C} - \frac{1}{2} \overline{C} &\Rightarrow \overline{C} \supset \frac{1}{2n_0} G - \frac{1}{2n_0} G \text{ (mở, chứa } \theta) \\ &\Rightarrow \overline{C} \supset B(\theta, r) \end{aligned}$$

II. Ta chứng minh $\frac{r}{2} B \subset C$ ($B := \overline{B}(\theta, 1)$). Lấy $a \in \frac{r}{2} B$.

+ Ta sẽ xây dựng dãy $\{x_n\}$ thỏa: $x_n \in \frac{1}{2^n} C, \left\| a - \sum_{k=1}^n x_k \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}$.

Thật vậy, vì $\frac{r}{2^n} B \subset \overline{\frac{1}{2^n} C}$ nên $\forall y \in \frac{r}{2^n} B, \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \frac{1}{2^n} C : \|y - x\| < \varepsilon$.

Ta có $a \in \frac{r}{2} B \Rightarrow \exists x_1 \in \frac{1}{2} C : \|a - x_1\| < \frac{r}{2^2}$

$$a - x_1 \in \frac{r}{2^2} B \Rightarrow \exists x_2 \in \frac{1}{2^2} C : \|a - x_1 - x_2\| < \frac{r}{2^3}, \dots$$

+ Vì $x_n \in \frac{1}{2^n} C$ nên $\exists u_n, v_n \in K : x_n = u_n - v_n, \|u_n\|, \|v_n\| < \frac{1}{2^n}$.

Đặt $u = \sum_1^{\infty} u_n, v = \sum_1^{\infty} v_n$ ta có $a = u - v, \|u\|, \|v\| \leq 1$. Vậy $a \in C$.

III. Với mọi $x \neq \theta$, ta có:

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in \frac{r}{2} B \Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} = u' - v' \text{ với } u', v' \in K, \|u'\| \leq 1, \|v'\| \leq 1$$

$$\Rightarrow x = u - v, u, v \in K, \|u\|, \|v\| \leq M \cdot \|x\|, \text{ với } M := \frac{2}{r}$$

Vậy mệnh đề được chứng minh.

1.5 Nón liên hợp

Định nghĩa 1.5.1

Nếu K là nón, thì ta định nghĩa nón liên hợp của nón K là

$$K^* = \{ f \in E^* : f(x) \geq 0 \forall x \in K \}.$$

Ta có:

1/ K^* có hai tính chất sau:

i) K^* là tập đóng

ii) $K^* + K^* \subset K^*$, $\lambda K^* \subset K^* \quad \forall \lambda \geq 0$.

$$2/ K^* \cap (-K^*) = \{ \theta_{E^*} \} \Leftrightarrow \overline{K - K} = E.$$

Chứng minh:

$$+ (\Leftarrow) \text{ Xét } f \in K^* \cap (-K^*)$$

Với mọi $x \in E$, ta có: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n)$, $u_n, v_n \in K$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n) - f(v_n)) \text{ nên } f(x) \geq 0.$$

Tương tự $f(-x) \geq 0$. Do đó $f(x) = 0$.

$$+ (\Rightarrow) \text{ Giả sử tồn tại } x_0 \in \overline{K - K}. \text{ Khi đó}$$

$$\exists f \in E^* : f(x_0) < f(y) \forall y \in \overline{K - K} \text{ (Do định lý tách tập lồi)}$$

$$\text{Ta có } f(x_0) < f(tx) \quad \forall x \in K, \forall t > 0.$$

$$\text{Cho } t \rightarrow \infty \text{ ta có } f(x) \geq 0 \forall x \in K \text{ hay } f \in K^*.$$

Tương tự $-f \in K^*$. Do đó $f = \theta$ (mâu thuẫn)

Chương 2. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỀU

2.1 Điểm bất động của ánh xạ tăng.

Cho K là nón trong không gian Banach thực E và “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón K . Cho D là tập con của E .

Định nghĩa 2.1.1

Một ánh xạ $A: D \rightarrow E$ được gọi là tăng nếu $x_1 \leq x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 \leq Ax_2$, A được gọi là tăng nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 < Ax_2$ và A được gọi là tăng mạnh nếu $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 = Ax_2$ trong trường hợp $K^0 \neq \emptyset$.

Tương tự, A được gọi là giảm nếu $x_1 \leq x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 \geq Ax_2$, A được gọi là giảm nghiêm ngặt nếu $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 > Ax_2$ và A được gọi là giảm mạnh nếu $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D$) thì $Ax_1 = Ax_2$ trong trường hợp $K^0 \neq \emptyset$.

Định nghĩa 2.1.2

Một ánh xạ $A: D \rightarrow E$ được gọi là hoàn toàn liên tục nếu nó liên tục và compact. Chú ý compact theo nghĩa tập con $A(S)$ là compact tương đối với mỗi tập con bị chặn $S \subset D$.

A được gọi là một k -tập hợp-co ($k \geq 0$) (k -set-contraction) nếu nó liên tục, bị chặn và $\gamma(A(S)) \leq k \cdot \gamma(S)$, với mỗi tập bị chặn $S \subset D$, trong đó $\gamma(S)$ được xem là độ đo của tập không compact S .

Một ánh xạ A được gọi là cô đọng (condensing) nếu nó liên tục, bị chặn và $\gamma(A(S)) < \gamma(S)$, với mỗi tập bị chặn $S \subset D$, $\gamma(S) > 0$.

Định lý 2.1.1

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử một trong hai điều kiện sau được thỏa:

(H_1) K là nón chuẩn và A là cô đọng;

(H_2) K là nón chính quy và A là nửa liên tục.

Khi đó, A có một điểm bất động cực đại x^* và một điểm bất động cực tiểu x_* trong $[u_0, v_0]$, hơn nữa

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (2.1.2)$$

Trong đó $v_n = Av_{n-1}$ và $u_n = Au_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), và

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 \quad (2.1.3)$$

Chứng minh:

Do A là ánh xạ tăng, theo (2.1.1) thì (2.1.3) được thỏa.

Bây giờ, ta chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ về $x_* \in E$ và $Ax_* = x_*$.

+ Khi (H_1) được thỏa, tập $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ bị chặn và $S = A(S) \cup \{u_0\}$,

do đó $\gamma(S) = \gamma(A(S))$. Do A cô đọng nên ta có $\gamma(S) = 0$, S là tập compact

tương đối. Do đó có dãy con $\{u_{n_k}\}$ của dãy $\{u_n\}$ sao cho $x_{n_k} \rightarrow x_*$. Rõ ràng

$$u_n \leq x_* \leq v_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Khi $m > n_k$, ta có $\theta \leq x_* - u_m \leq x_* - u_{n_k}$ và do đó theo tính chất của nón chuẩn

K , ta có $\|x_* - u_m\| \leq N \|x_* - u_{n_k}\|$, với N là hằng số trong định nghĩa nón chuẩn

K . Vậy $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = x_*$.

Cho $n \rightarrow \infty$ trong $u_n = Au_{n-1}$, ta được $Ax_* = x_*$. Do đó A liên tục.

+ Khi (H_2) được thỏa, dãy $\{u_n\}$ hội tụ về $x_* \in E$ theo tính chất của nón chính qui K. Từ A nửa liên tục, $u_n = Au_{n-1}$ hội tụ yếu về Ax_* và do đó $Ax_* = x_*$.

Một cách tương tự ta có thể chứng minh dãy $\{v_n\}$ hội tụ về $x^* \in E$ và $Ax^* = x^*$

Cho $\bar{x} \in [u_0, v_0]$ và $A\bar{x} = \bar{x}$. Từ A là ánh xạ tăng và $u_0 \leq \bar{x} \leq v_0$ dẫn đến

$Au_0 \leq A\bar{x} \leq Av_0$, nghĩa là $u_1 \leq \bar{x} \leq v_1$. Lý luận tương tự ta được $u_2 \leq \bar{x} \leq v_2, \dots$,

và tổng quát, ta có $u_n \leq \bar{x} \leq v_n, (n=1, 2, 3, \dots)$. Cho $n \rightarrow \infty$ ta được

$x_* \leq \bar{x} \leq x^*$. Vậy định lý được chứng minh.

Hệ quả 2.1.1

Cho điều kiện của định lý 2.1.1 được thỏa. Giả sử rằng A chỉ có một điểm bất động $\bar{x} \in [u_0, v_0]$. Khi đó, với mỗi $x_0 \in [u_0, v_0]$, dãy $x_n = Ax_{n-1}$

$(n=1, 2, 3, \dots)$ hội tụ về $\bar{x}$, nghĩa là $\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$.

Chứng minh:

Từ $u_0 \leq x_0 \leq v_0$ và A là ánh xạ tăng, ta có $u_n \leq x_n \leq v_n, n = (1, 2, 3, \dots)$.

Theo giả thiết ta phải có $x_* = x^* = \bar{x}$. Do đó từ $x_n = Ax_{n-1} (n=1, 2, 3, \dots)$ hội tụ về $\bar{x}$ và (2.1.2), tính chuẩn của nón K, và mệnh đề 1.2.1 thì $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Định lý 2.1.2

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử K là nón strongly minihedral. Khi đó, A có một điểm bất động cực đại x^* và một điểm bất động cực tiểu x_* trong $[u_0, v_0]$.

Chứng minh:

Đặt $D = \{x \in E : u_0 \leq x \leq v_0, Ax \geq x\}$. Rõ ràng $u_0 \in D$ và v_0 là một cận trên của D . Do tính strong minihedrality của K nên $x^* = \sup D$ tồn tại.

Bây giờ, ta chứng minh x^* là điểm bất động cực đại của A trong $[u_0, v_0]$. Thật vậy, $u_0 \leq x \leq x^* \leq v_0$, với mọi $x \in D$ và do đó

$$u_0 \leq Au_0 \leq Ax \leq Ax^* \leq Av_0 \leq v_0$$

Từ $Ax \geq x$, ta có $x \leq Ax^*$ với mọi $x \in D$. Từ định nghĩa cận trên bé nhất thì $x^* \leq Ax^*$.

Mặt khác từ $x^* \leq Ax^*$ ta có $Ax^* \leq A(Ax^*)$. Ta suy ra $Ax^* \in D$. Do đó $Ax^* \leq x^*$.

Vậy $Ax^* = x^*$. Nếu $\bar{x}$ là điểm bất động nào đó của A trong $[u_0, v_0]$ thì $\bar{x} \in D$ và $\bar{x} \leq x^*$. Tính cực đại của x^* được chứng minh xong.

Tương tự, ta chứng minh được $x_* = \inf D_1$ là điểm bất động cực tiểu của A trong $[u_0, v_0]$, với $D_1 = \{x \in E : u_0 \leq x \leq v_0, Ax \leq x\}$.

Vậy định lý được chứng minh.

Nhận xét

Trong định lý 2.1.2 ta không giả thiết A là liên tục, nghĩa là không thể khẳng định các giới hạn trong (2.1.2) tồn tại.

Định lý 2.1.3

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử $A([u_0, v_0])$ là tập compact tương đối của E . Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong $[u_0, v_0]$.

Chứng minh:

Đặt $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. Ta có $A(Au_0) \geq Au_0$, điều này dẫn đến $Au_0 \in F$ và do đó $F \neq \emptyset$. Từ E được sắp thứ tự riêng bởi nón K , F là tập con được sắp thứ tự riêng. Giả sử G là tập con được sắp thứ tự toàn phần của F . Do $A([u_0, v_0])$ là tập compact tương đối và $G \subset F \subset A([u_0, v_0])$ thì G là tập

compact tương đối nên G là tập tách được, nghĩa là tồn tại tập con đếm được $V = \{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset G$, trù mật trong G . Do G là tập con được sắp thứ tự toàn phần của F dẫn đến tồn tại $z_n = \sup\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) và $z_n \in G$. Khi đó, theo tính compact tương đối của G thì tồn tại dãy con $\{z_{n_i}\}$ của dãy $\{z_n\}$ sao cho $z_{n_i} \rightarrow z^* \in E$.

$$\text{Từ } z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n \leq \dots \text{ Ta có } y_n \leq z_n \leq z^*, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.1.4)$$

và $z^* \in \overline{G} \subset \overline{F} \subset \overline{A([u_0, v_0])} \subset [u_0, v_0]$. Từ (2.1.4) ta được $z \leq z^*$ với mọi $z \in G$, và vì vậy $z \leq Az \leq Az^*$ với mọi $z \in G$, điều này suy ra $Az^* \in F$. Do vậy Az^* là một cận trên của G trong F . Do đó, theo bổ đề Zorn thì F chứa phần tử cực đại x^* .

Từ $Ax^* \geq x^*$ ta suy ra $A(Ax^*) \geq Ax^*$. Do đó ta có $Ax^* \in F$. Theo tính cực đại của x^* , ta có $Ax^* = x^*$. Vậy định lý được chứng minh.

Hệ quả 2.1.2

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử K là nón chuẩn, A là compact. Khi đó A có ít nhất một điểm bất động trong $[u_0, v_0]$.

Chứng minh:

Do K là nón chuẩn, $[u_0, v_0]$ bị chặn. Do đó tập $A([u_0, v_0])$ là compact tương đối (Do A là compact). Theo định lý 2.1.3 ta có điều phải chứng minh.

Định lý 2.1.4

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử K là minihedral và $A([u_0, v_0])$ là tập compact tương đối của E . Khi đó A có một điểm bất động cực đại x^* và một điểm bất động cực tiểu x_* trong $[u_0, v_0]$.

Chứng minh:

Đặt $F = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \geq x\}$. Theo bổ đề Zorn và cách chứng minh trong định lý 2.1.3 thì F có điểm bất động cực đại x^* và $Ax^* = x^*$.

Ta còn phải chứng minh x^* là điểm bất động cực đại của A trong $[u_0, v_0]$. Thật vậy, giả sử $\bar{x}$ là điểm bất động nào đó của A trong $[u_0, v_0]$, theo tính minihedrality của K , $v = \sup\{\bar{x}, x^*\}$ tồn tại. Do $v \geq \bar{x}$ và $v \geq x^*$ ta có $Av \geq A\bar{x} = \bar{x}$ và $Av \geq Ax^* = x^*$. Do đó $v \leq Av$, suy ra $Av \leq A(Av)$ và $Av \in F$. Theo tính cực đại của x^* ta có $Av = x^*$ nên $x^* \geq \bar{x}$. Vậy x^* là điểm bất động cực đại của A trong $[u_0, v_0]$.

Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh

$$F_1 = \{x \in A([u_0, v_0]) : Ax \leq x\}$$

chứa phần tử cực tiểu x_* thỏa $Ax_* = x_*$ và là điểm bất động cực tiểu của A trong $[u_0, v_0]$.

Hệ quả 2.1.3

Cho $u_0, v_0 \in E, u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ tăng sao cho:

$$u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0 \quad (2.1.1)$$

Giả sử K là nón chuẩn và minihedral, A là compact. Khi đó A có một điểm bất động cực đại x^* và một điểm bất động cực tiểu x_* trong $[u_0, v_0]$.

Nhận xét

Các định lý 2.1.3; 2.1.4 và các hệ quả 2.1.2; 2.1.3 không yêu cầu ánh xạ A liên tục, do đó chúng có bản chất khác định lý 2.1.1.

2.2 Điểm bất động của ánh xạ giảm.

Định lý 2.2.1

Giả sử

i/ K là nón chuẩn và $A: K \rightarrow K$ là ánh xạ giảm và cô đọng;

ii/ $A\theta > \theta$ và $A^2\theta > \varepsilon_0 A\theta$, trong đó $\varepsilon_0 > 0$, θ là phần tử không của E ;

iii/ Với mỗi $x \geq \alpha A\theta$ ($\alpha = \alpha(x) > 0$) và $0 < t < 1$, tồn tại $\eta = \eta(x, t) > 0$ sao cho

$$A(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} Ax \quad (2.2.1)$$

Khi đó, A có đúng một điểm bất động dương $x^* > 0$. Hơn nữa, xây dựng dãy $x_n = Ax_{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) với mỗi giá trị đầu $x_0 \in K$ ta có:

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.2.2)$$

Chứng minh:

$$\text{Đặt } u_0 = \theta, u_n = Au_{n-1}, (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.3)$$

và do ánh xạ A giảm, ta dễ dàng chỉ ra rằng

$$\theta = u_0 \leq u_2 \leq \dots \leq u_2 \leq \dots \leq u_{2n+1} \leq \dots \leq u_3 \leq u_1 = A\theta \quad (2.2.4)$$

$$u_{2n} = A^2 u_{2n-1}, u_{2n+1} = A^2 u_{2n-1}, (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.5)$$

và

$$u_{2n} = Au_{2n-1}, u_{2n+1} = Au_{2n}, (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.6)$$

Từ $A^2: K \rightarrow K$ là ánh xạ tăng, cô đọng và $u_0 \leq A^2 u_0$, $A^2 u_1 \leq u_1$, áp dụng định lý 2.1.1 ta suy ra

$$u_{2n} \rightarrow z_*, u_{2n+1} \rightarrow z^*, (n \rightarrow \infty), A^2 z_* = z_*, A^2 z^* = z^* \text{ với } z^*, z_* \text{ tương ứng}$$

là các điểm bất động cực đại và cực tiểu của A^2 trong $[u_0, u_1]$.

$$\text{Lấy giới hạn trong (2.2.6), ta có } z_* = Az^*, z^* = Az_* \quad (2.2.7)$$

Hiển nhiên

$$\theta < \varepsilon_0 A\theta \leq A^2 \theta = u_2 \leq u_{2n} \leq z_* \leq z^* \leq u_{2n+1} (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.8)$$

Do đó

$$z_* \geq \varepsilon_0 A\theta = \varepsilon_0 u_1 \geq \varepsilon_0 z^*.$$

Đặt $t_0 = \sup\{t > 0 / z_* \geq tz^*\}$, vì vậy $0 < \varepsilon_0 \leq t_0 < +\infty$ và $z_* \geq t_0 z^*$.

Hơn nữa, ta có $t_0 \leq 1$, do $z_* \leq z^*$.

Ta còn phải chứng minh $t_0 = 1$. Giả sử trái lại, $0 < t_0 < 1$ thì theo iii/, tồn tại

$\eta_0 > 0$ sao cho

$$z^* = Az_* \leq A(t_0 z^*) \leq [t_0(1 + \eta_0)]^{-1} Az^* = [t_0(1 + \eta)]^{-1} z_*, \text{ do vậy}$$

$$z^* \geq t_0(1 + \eta_0)z^*. \text{ Điều này trái với cách xác định } t_0.$$

Vậy $t_0 = 1$ và $z_* \geq z^*$ và do đó $z_* = z^*$ (2.2.9)

Từ (2.2.7) và (2.2.9), ta thấy $Az^* = z^*$, tức là z^* là điểm bất động dương của ánh xạ A .

Cuối cùng, ta chứng minh (2.2.2) thỏa với mỗi điểm bất động dương z^* của A và mỗi $x_0 \in K$. Điều này chính là tính duy nhất của điểm bất động dương của A .

Từ $x_0 \geq \theta$, ta có $\theta \leq Ax_0 \leq A\theta$, tức là, $u_0 \leq x_1 \leq u_1$, ta thấy $u_2 \leq x_2 \leq u_1$. Tiếp tục quá trình này, ta được

$$u_{2n} \leq x_{2n} \leq u_{2n-1}; u_{2n} \leq x_{2n+1} \leq u_{2n-1}, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.10)$$

Bằng cách tương tự, ta được

$$u_{2n} \leq x^* \leq u_{2n-1} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2.11)$$

Từ $u_{2n} \rightarrow z^*$, $u_{2n-1} \rightarrow z^*$ ($z^* = z_*$) và K là nón chuẩn thì theo (2.2.10) và mệnh đề 1.2.1 dẫn đến $x_{2n} \rightarrow z^*$ và $x_{2n+1} \rightarrow z^*$.

Do đó $\|x_n - z^*\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Mặt khác lấy giới hạn trong (2.2.11), ta được $x^* = z^*$ và do vậy

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \text{ Vậy định lý được chứng minh.}$$

Định lý 2.2.2

Giả sử

i/ K là nón chuẩn, có thể (solid) và $A: K \rightarrow K$ là ánh xạ giảm mạnh và cô đọng;

ii/ $A\theta > \theta$ và $A^2\theta > \varepsilon_0 A\theta$, $\varepsilon_0 > 0$, θ là phần tử không của E ;

iii/ Với mỗi $x \geq \alpha A\theta$ ($\alpha = \alpha(x) > 0$) và $0 < t < 1$, ta có

$$A(tx) < t^{-1}.Ax \quad (2.2.12)$$

Khi đó, A có đúng một điểm bất động dương $x^* > 0$. Hơn nữa, xây dựng dãy $x_n = Ax_{n-1}$ ($n=1,2,3,\dots$) với mỗi giá trị đầu $x_0 \in K$ ta có:

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.2.2)$$

Chứng minh (Xem: Dajun Guo, V.Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press 1988, page 51)

2.3 Cặp điểm bất động của ánh xạ đơn điệu hỗn tạp.

Định nghĩa 2.3.1

Cho $D \subset E$ và ánh xạ $A: D \times D \rightarrow E$

A được gọi là ánh xạ đơn điệu hỗn tạp nếu $A(x, y)$ là tăng theo x và giảm theo y , tức là, nếu $x_1 \leq x_2$, ($x_1, x_2 \in D$) thì $A(x_1, y) \leq A(x_2, y)$ với mọi $y \in D$, và $y_1 \leq y_2$ ($y_1, y_2 \in D$) thì $A(x, y_1) \geq A(x, y_2)$ với mọi $x \in D$.

Điểm $(x^*, y^*) \in D \times D$ được gọi là một cặp điểm tựa bất động của A nếu $A(x^*, y^*) = x^*$ và $A(y^*, x^*) = y^*$.

$x^* \in D$ được gọi là điểm bất động của A nếu $A(x^*, x^*) = x^*$.

Định lý 2.3.1

Cho $u_0, v_0 \in E$, $u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \rightarrow E$ là một ánh xạ đơn điệu hỗn tạp sao cho

$$u_0 \leq A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leq v_0 \quad (2.3.1)$$

Giả sử rằng một trong hai điều kiện sau được thỏa:

(H_1) K là nón chuẩn và A là hoàn toàn liên tục;

(H_2) K là nón chính quy và A là nửa liên tục.

Khi đó, A có cặp điểm tựa bất động $(x^*, y^*) \in [u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ mà là cực tiểu và cực đại theo nghĩa $x^* \leq \bar{x} \leq y^*$ và $x^* \leq \bar{y} \leq y^*$ với mọi điểm tựa bất động

$(\bar{x}, \bar{y}) \in [u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ của A . Hơn nữa, ta có

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (2.3.2)$$

Trong đó $v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1})$ và $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1})$ ($n=1, 2, 3, \dots$), thỏa

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 \quad (2.3.3)$$

Chứng minh:

Từ (2.3.1) ta có $u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0$. Giả sử $u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1}$.

Từ A là đơn điệu hỗn tạp,

$$u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) \leq A(u_n, v_{n-1}) \leq A(u_n, v_n) = u_{n+1},$$

$$v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) \geq A(v_n, u_{n-1}) \geq A(v_n, u_n) = v_{n+1},$$

và

$$u_{n+1} = A(u_n, v_n) \leq A(v_n, u_{n-1}) \leq A(v_n, u_n) = v_{n+1}.$$

Do đó theo quy nạp (2.3.3) thỏa.

+ Khi (H_1) được thỏa, đặt $S = \{u_1, u_2, \dots\}$ là tập compact tương đối do tính

hoàn toàn liên tục của A , và do đó, áp dụng định lý 2.1.1, ta có

$$u_n \rightarrow x^* \in [u_0, v_0].$$

+ Khi (H_2) được thỏa, $u_n \rightarrow x^* \in E$ được suy ra trực tiếp từ K là nón chính quy. Một cách tương tự ta chứng minh được dãy $\{v_n\}$ hội tụ về $y^* \in [u_0, v_0]$.

Từ A là nửa liên tục trong cả hai trường hợp (H_1) và (H_2) ,

$$u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) \text{ hội tụ yếu về } A(x^*, y^*) \text{ và}$$

$$v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) \text{ hội tụ yếu về } A(y^*, x^*)$$

Do đó

$A(x^*, y^*) = x^*$ và $A(y^*, x^*) = y^*$, tức là (x^*, y^*) là cặp điểm tựa bất động của A .

Cuối cùng, ta chứng minh tính cực tiểu và cực đại của (x^*, y^*) . Giả sử $(\bar{x}, \bar{y}) \in [u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ là cặp điểm tựa bất động của A .

Từ $u_0 \leq \bar{x} \leq v_0$ và $u_0 \leq \bar{y} \leq v_0$,

$$u_1 = A(u_0, v_0) \leq A(u_0, \bar{y}) \leq A(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \leq A(v_0, \bar{y}) \leq A(v_0, u_0) = v_1,$$

và

$$u_1 = A(u_0, v_0) \leq A(u_0, \bar{x}) \leq A(\bar{y}, \bar{x}) = \bar{y} \leq A(v_0, \bar{x}) \leq A(v_0, u_0) = v_1.$$

Một cách tương tự, $u_2 \leq \bar{x} \leq v_2$, $u_2 \leq \bar{y} \leq v_2$ và tổng quát

$$u_n \leq \bar{x} \leq v_n, u_n \leq \bar{y} \leq v_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.3.4)$$

Lấy giới hạn trong (2.3.4), ta được $x^* \leq \bar{x} \leq y^*$ và $x^* \leq \bar{y} \leq y^*$.

Vậy định lý được chứng minh.

Chương 3. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU SỰ TỒN TẠI ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN CÓ THỨ TỰ VÀO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN

3.1 Bất phương trình vi phân.

Để phát triển lý thuyết bất phương trình vi phân liên quan đến nón K trong không gian Banach E , chúng ta làm quen khái niệm tựa đơn điệu

Định nghĩa 3.1.1

Hàm $f : E \rightarrow E$ được gọi là tựa đơn điệu không giảm nếu

$$x \leq y \text{ và } \phi x = \phi y \text{ với } \phi \in K_0^* \Rightarrow \phi(f(x)) \leq \phi(f(y))$$

Nếu $E = \mathbb{R}^n$ và $K = \mathbb{R}_+^n$ (nón chuẩn) thì bất phương trình cảm sinh bởi nón K là theo từng thành phần và tựa đơn điệu của f biến đổi thành

$$x \leq y \text{ và } x_i = y_i, 1 \leq i \leq n \Rightarrow f_i(x) \leq f_i(y)$$

Định lý 3.1.1

Cho K là nón có phần trong K^0 khác rỗng. Giả sử:

- i) $u, v \in C^1[\mathbb{R}_+, E]$, $f \in C[\mathbb{R}_+ \times E, E]$ và $f(t, x)$ là hàm tựa đơn điệu không giảm với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$;
- ii) $u'(t) - f(t, u(t)) < v'(t) - f(t, v(t)), t \in (t_0, \infty)$.

Khi đó, với $u(t_0) < v(t_0)$ thì $u(t) < v(t), t \geq t_0$.

Chứng minh:

Giả sử khẳng định của định lý là sai. Khi đó, tồn tại $t_1 > t_0$ sao cho

$$v(t_1) - u(t_1) \in \partial K \text{ và } v(t) - u(t) \in K^0, t \in [t_0, t_1]. \text{ Do } f(t, x) \text{ là hàm}$$

tựa đơn điệu không giảm với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$ nên tồn tại $\phi \in K_0^*$ với sao cho

$$\phi(v(t_1) - u(t_1)) = 0 \text{ và } \phi(f(t_1, v(t_1)) - f(t_1, u(t_1))) \geq 0$$

$$\text{Đặt } m(t) = \phi(v(t) - u(t))$$

Ta thấy rằng $m(t) > 0$ với $t_0 \leq t < t_1$ và $m(t_1) = 0$.

Do đó, $m'(t_1) \leq 0$.

Tại $t = t_1$, ta có: $u(t_1) \leq v(t_1)$ và $\phi(u(t_1)) = \phi(v(t_1))$.

Dùng tính tựa đơn điệu của f và ii), ta được

$$m'(t_1) = \phi(v'(t_1) - u'(t_1)) > \phi(f(t_1, v(t_1)) - f(t_1, u(t_1))) \geq 0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy định lý đã được chứng minh.

Dùng kết quả trên, ta có thể chứng minh sự tồn tại của nghiệm lớn nhất của

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1.1)$$

liên quan đến nón K .

Định lý 3.1.2

Cho K là nón có phần trong K^0 khác rỗng. Giả sử

i) $f \in C[R_0, E]$ và $f(t, x)$ tựa đơn điệu không giảm theo x với mỗi

$t \in [t_0, t_0 + a]$, trong đó $R_0 = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + a], \|x - x_0\| \leq b\}$;

ii) f liên tục đều trên R_0 (do vậy ta có thể giả sử a, b sao cho

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ trên } R_0);$$

iii) $g \in C[[t_0, t_0 + a] \times i_+, i_-]$ với $g(t, 0) \equiv 0$ và nghiệm duy nhất của phương trình vi phân scalar

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = 0 \quad (3.1.2)$$

là nghiệm tầm thường;

iv) $\alpha(A) - \alpha(\{x - hf(t, x) : x \in A\}) \leq hg(t, \alpha(A))$, $h > 0, t \in [t_0, t_0 + a]$,

trong đó A là tập con bị chặn của $B[x_0, b]$ và α là độ đo của tập không compact. Khi đó, tồn tại nghiệm lớn nhất của (3.1.1) liên quan đến nón K trên $[t_0, t_0 + \eta]$ với $\eta = \min\left(a, \frac{b}{M+1}\right)$.

Chứng minh:

Lấy $y_0 \in K^0$ với $\|y_0\| = 1$.

$$\text{Xét hệ } x'_n = f(t, x_n) + \frac{1}{n}y_0, \quad x_n(t_0) = x_0 + \frac{1}{n}y_0 \quad (3.1.3)$$

Với mỗi số nguyên dương n , ta có:

$$\left\| f(t, x_n) + \frac{1}{n}y_0 \right\| \leq \|f(t, x_n)\| + \frac{1}{n} \leq M + 1.$$

Áp dụng định lý 2.7.2 trong Lakshmikantham và Leela [1] với $V(t, A) = \alpha(A)$ ta thu được sự tồn tại nghiệm $x_n(t)$ của (3.1.3)

Tính liên tục đồng bậc của họ $\{x_n(t)\}$ suy ra dễ dàng.

Chú ý rằng $\alpha(\{x_n(t_0)\}) = \alpha\left(\left\{x_0 + \frac{1}{n}y_0\right\}\right) = 0$, bởi vì $x_0 + \frac{1}{n}y_0 \rightarrow x_0$.

Ta có thể kết luận, như trong định lý 2.7.2, rằng tập $\{x_n(t)\}$ là compact tương đối với mỗi $t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Tiếp theo, ta áp dụng định lý Ascoli nhận được dãy con của $\{x_n(t)\}$ mà hội tụ đều về hàm liên tục $r(t)$ trên $[t_0, t_0 + \eta]$. Khi đó $r(t)$ là nghiệm của (3.1.1) trên $[t_0, t_0 + \eta]$. Lấy $x(t)$ là nghiệm tùy ý của (3.1.1) trên $[t_0, t_0 + \eta]$.

$$\text{Khi đó, } x'(t) - f(t, x(t)) = 0 < \frac{1}{n}y_0 = x'_n(t) - f(t, x_n(t))$$

và $x(t_0) = x_0 < x_0 + \frac{1}{n}y_0 = x_n(t_0)$. Áp dụng định lý 3.1.1, ta nhận được

$$x(t) \leq x_n(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \eta] \text{ và do vậy } x(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = r(t), \quad t \in [t_0, t_0 + \eta].$$

Kéo theo $r(t)$ là nghiệm lớn nhất của (3.1.1).

Vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý 3.1.3

Cho K là nón có phần trong K^0 khác rỗng. Giả sử:

i) $f \in C[R_0, E]$ và $f(t, x)$ tựa đơn điệu không giảm theo x với mỗi

$t \in [t_0, t_0 + a]$, trong đó $R_0 = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + a], \|x - x_0\| \leq b\}$.

ii) f liên tục đều trên R_0 (do vậy ta có thể giả sử a, b sao cho

$$\|f(t, x)\| \leq M \text{ trên } R_0).$$

iii) $g \in C[[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n]$ với $g(t, 0) \equiv 0$ và nghiệm duy nhất của phương trình vi phân scalar

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = 0 \quad (3.1.2)$$

là nghiệm tầm thường.

iv) $\alpha(A) - \alpha(\{x - hf(t, x) : x \in A\}) \leq hg(t, \alpha(A))$, $h > 0, t \in [t_0, t_0 + a]$,

trong đó A là tập con bị chặn của $B[x_0, b]$ và α là độ đo của tập không

compact. Lấy $m \in C^1[[t_0, t_0 + \eta], E]$ và $m'(t) \leq f(t, m(t)), t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Nếu $m(t_0) \leq x_0$ thì $m(t) \leq r(t), t \in [t_0, t_0 + \eta]$, trong đó $r(t)$ là nghiệm lớn nhất của (3.1.1).

Chứng minh:

Lấy $x_n(t)$ là một nghiệm của (3.1.3) trong định lý 3.1.2

Chú ý $x(t_0) = x_0 < x_0 + \frac{1}{n}y_0 = x_n(t_0)$ và

$$m'(t) - f(t, m(t)) \leq 0 < \frac{1}{n}y_0 = x'_n(t) - f(t, x_n(t)) \text{ với } t \in [t_0, t_0 + \eta].$$

Theo định lý 3.1.1, $m(t) < x_n(t)$ với mỗi n và $t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Do vậy, $m(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = r(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 3.1.1

Cho giả thiết của định lý 3.1.2 được thỏa và cho $f(t, 0) \equiv 0$.

Khi đó, nghiệm lớn nhất $r(t)$ của (3.1.1) thỏa $r(t_0) = x_0 \in K$ với $t \in [t_0, t_0 + \eta]$.

Chứng minh: Ta suy ra từ định lý 3.1.3 bằng cách chọn $m(t) \equiv 0$.

Định lý 3.1.4

Giả sử:

- i) $f \in C[[t_0, t_0 + a] \times E, E]$ và tồn tại hằng số M và $b > 0$ thỏa $\|f(t, x)\| \leq M$ trên R_0 và $Ma < b$, trong đó $R_0 = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b\}$.
- ii) $f_n \in C[[t_0, t_0 + a] \times E, E]$ với $n \geq 1$ và dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên R_0 .
- iii) Với mỗi $n \geq 1$, $x_n(t)$ là nghiệm của $x' = f_n(t, x)$, $x_n(t_0) = y_n$, tồn tại trên $[t_0, t_0 + a]$ thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$.

Khi đó, dãy $\{x_n(t)\}$ hội tụ đều về $x(t)$ là nghiệm của (3.1.1).

Chứng minh:

Vì f_n hội tụ đều về f , nên với $\varepsilon = 1$ tồn tại $N > 0$ sao cho

$$\|f_n(t, x) - f(t, x)\| \leq 1 \quad \forall (t, x) \in R_0 \text{ và } n \geq N. \text{ Do vậy } \|f_n(t, x)\| \leq 1 + M$$

$\forall (t, x) \in R_0$ và $n \geq N$. Với $\varepsilon > 0$, đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + M}$. Nếu $t, s \in [t_0, t_0 + a]$ với

$$|t - s| < \delta \text{ thì } \|x_n(t) - x_n(s)\| \leq \int_s^t \|f_n(\tau, x_n(\tau))\| d\tau \leq |t - s|(1 + M) < \varepsilon.$$

Vì vậy họ $\{x_n(t)\}_{n=N}^{\infty}$ liên tục đồng bậc. Kết hợp với $\{x_n(t)\}$ hội tụ điểm về

$x(t)$, ta dễ dàng thấy rằng $x(t)$ liên tục trên $[t_0, t_0 + a]$. Do vậy, $x(t)$ liên tục đều trên $[t_0, t_0 + a]$ và kéo theo $x_n(t)$ hội tụ đều về $x(t)$ trên $[t_0, t_0 + a]$.

Khi đó $x(t)$ là nghiệm của (3.1.1).

Vậy định lý đã được chứng minh.

Bây giờ chúng ta hãy xem, với mỗi $n \geq 1$, vấn đề giá trị đầu (3.1.3), gọi là $x'_n = f(t, x_n) + \frac{1}{n}y_0$, $x_n(t_0) = x_0 + \frac{1}{n}y_0$, trong đó $y_0 \in K^0$ với $\|y_0\| = 1$.

Cho thuận tiện chúng ta liệt kê bên dưới một vài giả thiết cần thiết.

(H_1) $f(t, x)$ là hàm tựa đơn điệu không giảm theo x với mỗi $t \in [t_0, t_0 + a]$;

(H_2) Với mỗi $n \geq 1$, nghiệm của (3.1.3) tồn tại trên $[t_0, t_0 + a]$;

(H_3) Nghiệm của (3.1.1) tồn tại trên $[t_0, t_0 + a]$;

(H_4) K là nón đều trên E , nghĩa là, mọi dãy bị chặn đơn điệu đều có giới hạn;

(H_5) Tồn tại dãy con $\{x_{n_k}(t)\}$ của dãy $\{x_n(t)\}$ mà hội tụ về hàm $r(t)$.

Định lý sau đưa ra hai điều kiện bảo đảm sự tồn tại của nghiệm lớn nhất của (3.1.1) và cũng như một kết quả so sánh.

Định lý 3.1.5

Giả sử rằng K là nón có phần trong K^0 khác rỗng và

i) $f \in C[[t_0, t_0 + a] \times E, E]$ và tồn tại hằng số M và $b > 0$ thỏa $\|f(t, x)\| \leq M$ trên R_0 và $Ma < b$, trong đó $R_0 = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b\}$;

ii) Hoặc (a): (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) xảy ra hoặc (b): (H_1), (H_2) và (H_5) xảy ra.

Khi đó tồn tại nghiệm lớn nhất của (3.1.1) trên $[t_0, t_0 + a]$.

Hơn nữa nếu (a) hoặc (b) xảy ra, $y \in C[[t_0, t_0 + a], E]$ và $y'(t) \leq f(t, y(t))$,
 $y(t_0) \leq x_0$

thì $y(t) \leq r(t, t_0, x_0)$ trên $[t_0, t_0 + a]$, trong đó $r(t, t_0, x_0)$ là nghiệm lớn nhất của (3.1.1).

Chứng minh:

(I). Cho $x'_n(t) = f(t, x_n(t)) + \frac{1}{n}y_0$ và $x'_{n+1}(t) = f(t, x_{n+1}(t)) + \frac{1}{n+1}y_0$

Khi đó, $x'_n(t) > f(t, x_n(t)) + \frac{1}{n+1}y_0$ và $x'_{n+1}(t) \leq f(t, x_{n+1}(t)) + \frac{1}{n+1}y_0$ với

$x_n(t_0) > x_{n+1}(t_0)$. Theo định lý 3.1.1 và $f(t, x) + \frac{1}{n}y_0$ là hàm tựa đơn điệu

không giảm theo x , $x_n(t) > x_{n+1}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a]$.

Giả sử $x(t)$ là nghiệm của (3.1.1) trên $[t_0, t_0 + a]$.

Khi đó, $x'_n(t) = f(t, x_n(t)) + \frac{1}{n}y_0 > f(t, x_n(t))$ và

$$x_n(t_0) = x_0 + \frac{1}{n}y_0 > x_0 = x(t_0).$$

Như phần trước, ta dẫn đến $x_n(t) > x(t)$ trên $[t_0, t_0 + a]$, $n \geq 1$.

$x_n(t)$ là dãy giảm, bị chặn dưới nên hội tụ (vì K đều)

Rõ ràng $f(t, x_n) + \frac{1}{n}y_0$ hội tụ đều về $f(t, x)$ trên $[t_0, t_0 + a]$

Theo định lý 3.1.4, $x_n(t)$ hội tụ đều về nghiệm $r(t)$ của (3.1.1).

Nhưng $r(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x(t) = x(t)$

Kéo theo $r(t, t_0, x_0)$ là nghiệm lớn nhất của (3.1.1) trên $[t_0, t_0 + a]$.

(II). Dãy con $\{x_{n_k}(t)\}$ hội tụ về một nghiệm của (3.1.1) do định lý 3.1.4.

Ta suy ra nghiệm này là nghiệm lớn nhất (suy ra trực tiếp như trong chứng minh phần I).

(III). Xét nghiệm $x_n(t) = x_n\left(t, t_0, x_0 + \frac{1}{n}y_0\right)$ của (3.1.1).

Khi đó $x'_n(t) > f(t, x_n(t))$ và $y'(t) \leq f(t, y(t))$ với

$$x_n(t_0) = x_0 + \frac{1}{n}y_0 > x \geq y(t_0). \text{ Theo định lý 3.1.1, } y(t) < x_n(t).$$

Do vậy hoặc là dãy trong (I) hoặc là dãy con trong (II), ta thu được kết quả.

3.2 Tập hợp bất biến dòng.

Giả sử $K^0 \neq \emptyset$ (K^0 là phần trong của nón K) quyết định tính đúng đắn của các kết quả ở phần 3.1, nói riêng là định lý 3.1.1 về bất phương trình vi phân. Vì có những nón mà phần trong là rỗng, chẳng hạn nón bao gồm các hàm không âm trong không gian L^p , nên thật thú vị để chứng minh định lý 3.1.1 trên những nón có phần trong bằng rỗng. Vì chứng minh của một kết quả như thế liên quan mật thiết tới kết quả trên bất biến dòng, nên chúng ta bắt đầu bằng việc bàn luận về bất biến dòng của những tập đóng.

Cho $F \subset E$ là tập đóng và $f \in C[\mathbb{I}_+ \times E, E]$.

Xét phương trình vi phân $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in F$ (3.2.1)

+ Tập F được gọi là bất biến dòng (flow invariant) đối với f nếu mỗi nghiệm $x(t)$ của (3.2.1) trên $[t_0, \infty)$ thỏa $x(t) \in F$ với $t_0 \leq t < \infty$.

+ Một tập $A \subset E$ được gọi là distance set nếu mỗi $x \in E$ có tương ứng một điểm $y \in A$ sao cho $d(x, A) = \|x - y\|$.

+ Một hàm $g \in C[\mathbb{I}_+ \times \mathbb{I}_+, \mathbb{I}_+]$ được gọi là hàm duy nhất (uniqueness function) nếu những điều sau được thỏa:

Nếu $m \in C[\mathbb{I}_+, \mathbb{I}_+]$ thỏa $m(t_0) \leq 0$ và $D^+m(t) \leq g(t, m(t))$

khi $m(t) > 0$ thì $m(t) \leq 0$ với $t_0 \leq t < \infty$.

Bây giờ chúng ta chứng minh kết quả sau trên bất biến dòng của F.

Định lý 3.2.1

Cho $F \subset E$ là tập đóng và distance set. Giả sử:

- i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} d(x + hf(t, x), F) = 0, t \in J_+, x \in \partial F$;
- ii) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(t, \|x - y\|), x \in E - F, y \in \partial F$, trong đó g là hàm duy nhất. Khi đó F là bất biến dòng đối với f .

Chứng minh:

Lấy $x(t)$ là nghiệm của (3.2.1). Giả sử $x(t) \in F$ với $t_0 \leq t < t_0 + a$ (ở đây $t_0 + a < \infty$) là lớn nhất, nghĩa là $x(t)$ rời tập F tại $t_0 = t_0 + a$ trong lần đầu.

Lấy $x(t_1) \notin F, t_1 \in (t_0 + a, \infty)$ và lấy $y_0 \in \partial F$ sao cho $d(x(t_1), F) = \|x(t_1) - y_0\|$.

Với $t \in [t_0, \infty)$, đặt $m(t) = d(x(t), F)$ và $v(t) = \|x(t) - y_0\|$.

Với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có (lấy $x = x(t_1)$)

$$\begin{aligned} m(t_1 + h) &\leq \|x(t_1 + h) - y_0 - hf(t_1, y_0)\| + d(y_0 + hf(t_1, y_0), F) \\ &\leq \|x + hf(t_1, x) - y_0 - hf(t_1, y_0)\| \\ &\quad + \|x(t_1 + h) - x - hf(t_1, x)\| + d(y_0 + hf(t_1, y_0), F) \\ &\leq \|x - y_0\| + hg(t_1, \|x - y_0\|) + o(h). \end{aligned}$$

Vì $m(t_1) = v(t_1) > 0$, ta thu được $D^+m(t_1) \leq g(t_1, m(t_1))$.

Kéo theo, $m(t) \leq 0, t_0 \leq t < \infty$ (vì g là hàm duy nhất và $m(t_0) = 0$)

Mâu thuẫn với $d(x(t_1), F) = m(t_1) > 0$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Nhận xét 3.2.1

Định lý 3.2.1 vẫn đúng khi $F = K, K$ là nón. Mặc dù K không được giả thiết là có phần trong khác rỗng, nhưng định lý 3.2.1 đòi hỏi K phải là một distance set. Tuy nhiên, giả thiết này yếu hơn bởi vì nón trong không gian L^p là distance set mà có phần trong là rỗng. Cũng chú ý rằng mọi tập lồi đóng trong không gian Banach đối xứng (reflexive) là một distance set.

Điều kiện trong định lý 3.2.1 rằng F là distance set có thể bỏ qua nếu điều kiện bị chặn (i) giữ tính đều địa phương, tức là, với mỗi $(t, \bar{x}) \in (t_0, \infty) \times \partial F$ tồn tại $\delta = \delta(t, \bar{x}) > 0$ sao cho $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} d(x + hf(t, x), F) = 0$ đều với $\|x - \bar{x}\| < \delta$ và $x \in \partial F$.

Trong trường hợp này, ta có thể chọn dãy nhỏ nhất $\{x_n\}$ trong F sao cho $\|x(t_1) - x_n\|$ tiến về $d(x(t_1), F)$ khi $n \rightarrow \infty$.

Từ đó ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.2.1

Cho giả thiết trong định lý 3.2.1 được thỏa trừ điều kiện F không là distance set và điều kiện bị chặn (i) giữ tính đều địa phương. Khi đó F là bất biến dòng đối với f .

Chúng ta sẽ thấy kế tiếp một kết quả thú vị mà cho thấy sự tương đương của tính chất tựa đơn điệu và bị chặn.

Nếu $f \in C[D, E]$, D là tập con của E thì

(a) tính chất tựa đơn điệu không giảm của f liên quan đến nón K có nghĩa là với bất kỳ $y, z \in D$, $y \leq z$ và $\phi(z - y) = 0$ với $\phi \in K_0^*$,

ta có $\phi(f(z) - f(y)) \geq 0$;

(b) điều kiện bị chặn tương ứng có dạng

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} d(z - y + h(f(z) - f(y)), K) = 0, \quad y, z \in D, \quad z - y \in K.$$

Đặt $x = z - y$, $g(x) = f(x + y) - f(y)$ và chú ý $x \in D \cap K$,

(a) và (b) có thể diễn đạt tương ứng như sau:

$$(P_1) \quad x \in K \cap D, \quad \phi x = 0 \text{ với } \phi \in K_0^* \Rightarrow \phi(g(x)) \geq 0;$$

$$(P_2) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} d(x + hg(x), K) = 0, \quad x \in K \cap D$$

Kết quả sau chứng tỏ (P_1) và (P_2) tương đương mà kéo theo tính chất tựa đơn điệu và điều kiện bị chặn là tương đương.

Định lý 3.2.2

Cho $g \in C[D, E]$, D là tập con của E . Khi đó những tính chất (P_1) và (P_2) tương đương.

Chứng minh:

+ Trước tiên, ta chứng minh $(P_2) \Rightarrow (P_1)$.

Lấy $x \in K$ và $\phi x = 0$ với $\phi \in K_0^*$. Do (P_2) nên với mỗi $h > 0$ tồn tại $z_h \in K$ sao cho $\|x + hg(x) - z_h\| = 0(h)$ và do vậy $\phi(x + hg(x) - z_h) = 0(h)$

Vì $\phi(g(x)) = \frac{1}{h} \phi(x + hg(x)) = \frac{1}{h} (x + hg(x) - z_h) + \frac{1}{h} \phi(z_h) = 0(1) + \frac{1}{h} \phi(z_h)$ và $\phi(z_h) \geq 0$, nên ta thu được bất đẳng thức mong muốn là $\phi(g(x)) \geq 0$ bằng cách lấy giới hạn khi $h \rightarrow 0^+$.

+ Để chứng minh $(P_1) \Rightarrow (P_2)$, chúng ta giả sử (P_2) không xảy ra.

Nghĩa là,

$$d(x + h_n g(x), K) \geq h_n \delta \quad (3.2.2)$$

Trong đó $\delta > 0$ và $h_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Đặt $A = \{y \in E : \|y - (x + hg(x))\| < h\delta, h > 0\}$.

Ta sẽ chứng minh A mở, lồi và $A \cap K = \emptyset$.

+ Rõ ràng A là mở.

+ Để chứng minh A lồi, ta lấy $x_1, x_2 \in A$ và $y = \alpha x_1 + \beta x_2$, trong đó $\alpha, \beta > 0$ với $\alpha + \beta = 1$.

Từ bất đẳng thức $\|x_i - x - h_i g(x)\| < h_i \delta$, $i = 1, 2$, ta có

$$\|y - x - (\alpha h_1 + \beta h_2)g(x)\| < (\alpha h_1 + \beta h_2)\delta.$$

Do vậy $y \in A$ và A là tập lồi.

+ Chứng minh $A \cap K = \emptyset$

$$\text{Giả sử } y \in A \cap K, \|y - x - hg(x)\| < h\delta, h > 0$$

Ta có thể viết $y = x + hz$, trong đó $\|z - g(x)\| < \delta$.

Cố định h_n sao cho $0 < h_n < h$, xét điểm $y_n = x + h_n z$. Điểm $y_n \in K$ bởi vì nó nằm trên đường nối x và y và K lồi.

$$y_n \in A \text{ vì } \|y_n - x - h_n g(x)\| < h_n \delta \text{ (mâu thuẫn với 3.2.2).}$$

Ta vừa chứng minh được tập A là tập mở, lồi và $A \cap K = \emptyset$. Theo định lý 1.1.11 trong Lakshmikantham và Leela [1], ta có một siêu phẳng tách được K và A , tức là, tồn tại $\phi \in K^*$ sao cho $\phi(K) \geq a$, $\phi(A) < a$

Vì x có thể được xấp xỉ bởi những điểm từ A , ta có $\phi x = a$ và vì $\lambda x \in K$ với $\lambda \geq 0$, dẫn đến $\lambda a = \phi(\lambda x) \geq a \quad \forall \lambda \geq 0$.

Điều này dẫn đến $a = 0$ và $\phi \in K_0^*$. Điểm $x + g(x)$ thuộc vào A , ta nhận được $\phi(g(x)) = \phi(x + g(x)) < 0$ (mâu thuẫn với (P_1)).

Vậy định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh một kết quả về bất phương trình vi phân mà không cần điều kiện $K^0 \neq \emptyset$.

Định lý 3.2.3

Cho K là nón trong E . Giả sử:

- i) $u, v \in C^1[J_+, E]$, $f \in C[J_+ \times E, E]$ và $f(t, x)$ là hàm tựa đơn điệu không giảm theo x liên quan đến nón K , với mỗi $t \in J_+$;
- ii) $u'(t) - f(t, u(t)) \leq v'(t) - f(t, v(t))$, $t \in (t_0, \infty)$;

iii) $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(t, \|x - y\|)$, $x \in E - K$, $y \in \partial K$, trong đó g là hàm duy nhất;

iv) K là distance set.

Khi đó, với $u(t_0) \leq v(t_0)$ thì $u(t) \leq v(t)$, $t \geq t_0$.

Chứng minh: Ý chính là thu hẹp định lý này thành định lý 3.2.1.

Ta chú ý rằng $m(t) = v(t) = u(t)$ thỏa

$$m'(t) = H(t, m(t)), \quad t \in (t_0, \infty), \quad m(t_0) \geq 0,$$

trong đó

$$H(t, w) = f(t, u(t) + w) - f(t, u(t)) + q(t)$$

$$q(t) = v'(t) - f(t, v(t)) - u'(t) + f(t, u(t)) \geq 0$$

Bây giờ đủ để chứng minh nón K là bất biến dòng đối với H vì bất biến dòng của K kéo theo $m(t) \in K$, $t \geq t_0$ mà tương đương với kết luận của định lý. Dễ dàng thấy rằng $H(t, w)$ thỏa iii). Lấy $w \notin K$ và $\phi w = 0$ với $\phi \in K_0^*$. Khi

$$\phi(H(t, w)) = \phi(q(t)) + \phi(f(t, u(t) + w) - f(t, u(t))) \geq 0$$

vì $\phi(q(t)) \geq 0$ và f là hàm tựa đơn điệu không giảm.

Suy ra H thỏa (P_1) , theo định lý 3.2.2, suy ra H thỏa (P_2) , theo định lý 3.2.1, $m(t) \in K$, $t \geq t_0$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

3.3 Phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới.

Xét phương trình vi phân

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u_0 \quad (3.3.1)$$

Trong đó $f \in C[J \times E, E]$, $J = [0, T]$ và E là không gian Banach thực.

$$\text{Lấy } v, w \in C^1[J, E] \text{ sao cho } v' \leq f(t, v), \quad w' \geq f(t, w) \text{ trên } J \quad (3.3.2)$$

Khi đó v, w được gọi là nghiệm dưới và nghiệm trên của (3.3.1) liên quan đến nón K trong E xác định một cách tự nhiên. Trường hợp đặc biệt khi $E = \mathbb{R}^n$ và $K = \mathbb{R}_+$, người ta chứng minh được kết quả sau:

Định lý 3.3.1

Cho $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ là nghiệm dưới và nghiệm trên của (3.3.1) sao cho $v(t) \leq w(t)$ trên J và cho $f \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$. Trong đó $\Omega = \{(t, u) \in J \times \mathbb{R}^n : v(t) \leq u \leq w(t), t \in J\}$. Nếu f là hàm tựa đơn điệu không giảm theo u thì tồn tại nghiệm u của (3.3.1) sao cho $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ trên J với $v(0) \leq u(0) \leq w(0)$.

Thực ra kết luận của định lý 3.3.1 vẫn đúng mà không cần yêu cầu f là hàm tựa đơn điệu không giảm. Tuy nhiên, trong trường hợp này, ta cần làm mạnh khái niệm nghiệm trên và nghiệm dưới của (3.3.1) như sau:

Với mỗi i ,

$$\begin{aligned} v'_i &\leq f_i(t, \sigma) \quad \forall \sigma \text{ thỏa } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \text{ và } v_i(t) = \sigma_i \\ w'_i &\geq f_i(t, \sigma) \quad \forall \sigma \text{ thỏa } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \text{ và } w_i(t) = \sigma_i \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Định lý 3.3.2

Cho $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ với $v(t) \leq w(t)$ trên J , thỏa (3.3.2).

Cho $f \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$. Khi đó tồn tại nghiệm u của (3.3.1) sao cho

$v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ trên J với $v(0) \leq u(0) \leq w(0)$.

Vì giả thiết của định lý 3.3.1 kéo theo giả thiết của định lý 3.3.2 mà đủ để chứng minh định lý 3.3.2.

Chứng minh:

Xét $P : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ định nghĩa bởi

$$P_i(t, u) = \max \{v_i(t), \min[u_i, w_i(t)]\} \text{ với mỗi } i.$$

Khi đó $f(t, P(t, u))$ xác định một mở rộng liên tục của f đến $J \times \mathbb{R}^n$ mà bị chặn, vì f bị chặn trên Ω . Vì vậy $u' = f(t, P(t, u))$ có một nghiệm u trên J với $u(0) = u_0$.

Ta chứng minh $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ và vì vậy là nghiệm của (3.3.1).

+ Với $\varepsilon > 0$ và $e = (1, \dots, 1)$, xét $w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon(1+t)e$ và

$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon(1+t)e$. Ta có $v_\varepsilon(0) < u_0 < w_\varepsilon(0)$.

+ Giả sử $t_1 \in J$ thỏa $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ trên $[0, t_1)$. Nhưng $u_j(t_1) = w_{\varepsilon j}(t_1)$.

Khi đó ta có $v(t_1) \leq P(t_1, u(t_1)) \leq w(t_1)$ và $P_j(t_1, u(t_1)) = w_j(t_1)$.

Do đó $w'_j(t_1) \geq f_j(t_1, P(t_1, u(t_1))) = u'_j(t_1)$, suy ra $u'_j(t_1) < w'_j(t_1)$ mâu thuẫn với

$u_j(t) < w_{\varepsilon j}(t)$ với $t < t_1$. Vì vậy $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ trên J .

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$ dẫn đến $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$. Vậy định lý đã được chứng minh.

Kế tiếp ta sử dụng ý tưởng bất phương trình vi phân để đưa ra cách chứng minh khác của định lý 3.3.2 mà rất được quan tâm.

Với cách chứng minh này ta cần thỏa mãn điều kiện Lipschitz có dạng sau:

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L_i \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Chứng minh:

Trước tiên ta giả sử rằng v, w trong (3.3.3) thỏa bất đẳng thức ngặt và $v(0) \leq u(0) \leq w(0)$ và cần chứng minh kết luận cho bất đẳng thức ngặt.

Nếu kết luận là sai thì tồn tại $t_1 > 0$ và i , $1 \leq i \leq n$ sao cho $v(t_1) \leq u(t_1) \leq w(t_1)$

và hoặc $v_i(t_1) = u_i(t_1)$ hoặc $u_i(t_1) = w_i(t_1)$. Khi đó

$$f_i(t_1, u(t_1)) = u'_i(t_1) \leq v'_i(t_1) < f_i(t_1, \sigma_1, \dots, v_i(t_1), \dots, \sigma_n) = f_i(t_1, u(t_1))$$

$$\text{hoặc } f_i(t_1, u(t_1)) = u'_i(t_1) \geq w'_i(t_1) > f_i(t_1, \sigma_1, \dots, w_i(t_1), \dots, \sigma_n) = f_i(t_1, u(t_1)).$$

Dẫn đến điều mâu thuẫn.

Để chứng minh kết quả đối với bất đẳng thức không ngặt, ta xét

$$\tilde{w}_i(t) = w_i(t) + \varepsilon e^{(n+1)L_i t}, \quad \tilde{v}_i(t) = v_i(t) - \varepsilon e^{(n+1)L_i t}, \text{ trong đó } \varepsilon > 0 \text{ đủ nhỏ.}$$

Hơn nữa, lấy $P_i(t, u) = \max[v_i(t), \min(u, w_i(t))]$ với mỗi i

Khi đó rõ ràng nếu $\tilde{\sigma}$ thỏa $\forall t, \tilde{\sigma} \leq \tilde{w}(t)$ và $\tilde{\sigma}_i = \tilde{w}_i(t)$ thì dẫn đến

$$\sigma = P(t, \tilde{\sigma}) \text{ thỏa } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \text{ và } \sigma_i = w_i(t).$$

Do đó, sử dụng điều kiện Lipschitz ta được

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i'(t) &= w_i'(t) + \varepsilon(n+1)L_i e^{(n+1)L_i t} \geq f_i(t, \sigma) + \varepsilon(n+1)L_i e^{(n+1)L_i t} \\ &\geq f_i(t, \tilde{\sigma}) + \varepsilon e^{(n+1)L_i t} > f_i(t, \tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

Với mọi $\tilde{\sigma}$ thỏa $\forall t, \tilde{\sigma} \leq \tilde{w}(t)$ và $\tilde{\sigma}_i = \tilde{w}_i(t)$. Trong đó ta đã dùng

$$|\tilde{\sigma}_j - P_j(t, \sigma)| \leq \varepsilon e^{(n+1)L_j t} \text{ với mỗi } j.$$

Tương tự ta có $\forall t, \tilde{\sigma} < f_i(t, \tilde{\sigma}) \quad \forall \tilde{\sigma}$ thỏa $\forall t, \tilde{\sigma} \leq \tilde{w}(t)$ và $\tilde{\sigma}_i = \tilde{w}_i(t)$.

Vì $\tilde{v}(0) < u_0 < \tilde{w}(0)$, ta có thể kết luận từ lý luận phía trước rằng

$$\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t), \quad t \geq 0.$$

Vì ε là tùy ý nên kết quả kéo theo khi cho $\varepsilon \rightarrow 0$.

Vậy định lý đã được chứng minh.

Ta thấy chứng minh định lý 3.3.1 và 3.3.2 tùy thuộc chủ yếu vào điều kiện bổ sung cho f , tức là $f(t, P(t, u))$ trong đó

$$P(t, u) = \max\{v(t), \min(u, w(t))\}.$$

Rõ ràng điều kiện bổ sung có ý nghĩa khi $K = \mathbb{R}^n$.

Nếu K là nón tùy ý, bất đẳng thức (3.3.3) không cần thay đổi. Nói cách khác, bất đẳng thức này có thể đưa vào trong những hạng tử của hàm tuyến tính từ K^* , là $\phi \in K^*$.

$$\begin{aligned}\phi(v' - f(t, \sigma)) &\leq 0 \quad \forall \sigma \text{ thỏa } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \text{ và } \phi(v(t) - \sigma) = 0 \\ \phi(w' - f(t, \sigma)) &\geq 0 \quad \forall \sigma \text{ thỏa } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \text{ và } \phi(w(t) - \sigma) = 0\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

Phiên bản này của bất đẳng thức (3.3.3) cho phép ta xét nón K khác nón chuẩn. Câu hỏi đặt ra là liệu định lý 3.3.1 và 3.3.2 còn đúng không khi K là nón tùy ý.

$$\text{Xét ví dụ trong } \mathbb{R}^3. \text{ Cho } K = \left[u \in \mathbb{R}^3 : (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq u_3 \right]$$

Lấy $v = (0, 0, 0)$, $w = (2, 0, 2)$, $f_1 = f_3 = 0$ và

$$f_2 = \begin{cases} u_1, & \text{nếu } u_1 \in [0, 1] \\ 2 - u_1, & \text{nếu } u_1 \in [1, 2] \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Nghiệm của (3.3.1) với $u_0 = (1, 0, 1)$ là $u(t) = (1, t, 1)$ mà không còn nằm trong cung $[v, w]$. Chú ý f là Lipschitz.

Để kiểm tra bất đẳng thức (3.3.3), ta thấy bây giờ chúng có dạng

$$\begin{aligned}0 &\leq \phi(f(z)) \text{ với } 0 \leq z \leq w, \phi \in K^* \text{ và } \phi(z) = 0 \\ 0 &\geq \phi(f(z)) \text{ với } 0 \leq z \leq w, \phi \in K^* \text{ và } \phi(z) = \phi(w)\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

Vì $K \cap (w - K) = [\lambda w : 0 \leq \lambda \leq 1]$ nên tất cả z với $0 \leq z \leq w$ có dạng $z = \lambda w$.

Với $z = 0$ và $z = w$, (3.3.5) đúng nếu ta để ý $f(0) = f(w) = 0$. Bây giờ ta chọn $z = \lambda w$, $0 < \lambda < 1$. Với z như vậy, ta có hoặc $\phi(z) = 0$ hoặc $\phi(z) = \phi(w)$.

Trong cả hai trường hợp đều dẫn đến $\phi(w) = 0$ và (3.3.5) suy ra từ

$$\phi(f(\lambda w)) = 0 \text{ với } 0 < \lambda < 1, \phi \in K^*, \phi(w) = 0 \quad (3.3.6)$$

do đó ta được điều phải chứng minh.

Lấy $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in K^*$ và $\phi(w) = 0$. Vì $w = (2, 0, 2)$,

nên ta lấy $\phi_1 + \phi_2 = 0$ (3.3.7)

Với $\phi_3 \geq 0$, ta thu được $\phi_3 \geq \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$ và từ (3.3.7) ta nhận được $\phi_2 = 0$.

Do vậy (3.3.6) đúng vì $f_1(\lambda w) = f_3(\lambda w) = 0$.

Do vậy ta thấy định lý 3.3.2. không đúng ngay cả trong $\mathbb{R}^3$ nếu K là nón tùy ý. Trong phần kế tiếp ta sẽ chứng minh định lý 3.3.1 và 3.3.2 đối với nón tùy ý sử dụng kỹ thuật lặp đơn điệu (monotone iterative).

3.4 Kỹ thuật lặp đơn điệu (Monotone iterative technique)

Với bất kỳ $v_0, w_0 \in C[J, E]$ thỏa $v_0(t) \leq w_0(t)$ trên $J = [0, T]$, ta định nghĩa đoạn nón $[v_0, w_0] = \{u \in C[J, E] : v_0 \leq u \leq w_0\}$.

Xét phương trình vi phân

$$u' = f(t, u), u(0) = u_0 \quad (3.4.1)$$

Trong đó $f \in C[J \times E, E]$. Chúng ta liệt kê các giả thiết sau cho thuận tiện.

(A₁) Với bất kỳ tập bị chặn B trong E

$\alpha(f(J \times B)) \leq L\alpha(B)$, với $L > 0$ nào đó, trong đó α ký hiệu độ đo

Kuratowski của tập không compact.

(A₂) $v_0, w_0 \in C^1[J, E]$ với $v_0(t) \leq w_0(t)$ trên J thỏa

$$v'_0 \leq f(t, v_0), w'_0 \geq f(t, w_0) \text{ trên } J.$$

(A₃) $f(t, u) - f(t, v) \geq -M(u - v)$ khi $u \geq v$ và $u, v \in [v_0, w_0]$, với $M > 0$ nào đó.

Chúng ta chú ý là f tựa đơn điệu khi (A₃) xảy ra.

Để trình bày kỹ thuật lặp đơn điệu, ta cần xét phương trình vi phân tuyến tính

$$u' + Mu = \sigma(t), u(0) = u_0 \quad (3.4.2)$$

Trong đó $\sigma(t) = f(t, \eta(t)) + M\eta(t)$ và $\eta \in C[J, E]$ thỏa $v_0(t) \leq \eta(t) \leq w_0(t)$ trên J .

Rõ ràng (3.4.2) có một nghiệm duy nhất trên J .

Với mỗi $\eta \in C[J, E]$ thỏa $v_0(t) \leq \eta(t) \leq w_0(t)$ trên J ,

ta định nghĩa ánh xạ A là $A\eta = u$, trong đó u là nghiệm duy nhất của (3.4.2) tương ứng với η . Kết quả sau liên quan đến ánh xạ A có giá trị.

Bổ đề 3.4.1

Giả sử các giả thiết (A_1) , (A_2) và (A_3) đều được thỏa. Khi đó

i) $v_0 \leq Av_0$ và $w_0 \geq Aw_0$;

ii) A đơn điệu trên $[v_0, w_0]$, mà nếu $\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$ với $\eta_1 \leq \eta_2$ thì

$$A\eta_1 \leq A\eta_2.$$

Chứng minh:

i) Giả sử $Av_0 = v_1$. Đặt $p(t) = \phi[v_1(t) - v_0(t)]$ để mà $p(0) \geq 0$, trong đó $\phi \in K^*$. Khi đó

$$p' \geq \phi[f(t, v_0) - M(v_1 - v_0) - f(t, v_0)] = -Mp \quad (\text{do } (A_2))$$

Vì thế $p(t) \geq p(0)e^{-Mt} \geq 0$ trên J .

Vì $\phi \in K^*$ là tùy ý nên kéo theo $v_1 \geq v_0$ trên J . Chứng tỏ $v_0 \leq Av_0$.

Tương tự ta chứng minh được $w_0 \geq Aw_0$.

ii) Lấy $\eta_1, \eta_2 \in C[J, E]$ thỏa $\eta_1 \leq \eta_2$ trên J và giả sử rằng $A\eta_1 = u_1$, $A\eta_2 = u_2$.

Ta đặt $p(t) = \phi[u_2(t) - u_1(t)]$ để mà $p(0) \geq 0$, trong đó $\phi \in K^*$.

Suy ra (theo (A_3))

$$\begin{aligned} p' &= \phi[f(t, \eta_2) - M(u_2 - \eta_2) - f(t, \eta_1) + M(u_1 - \eta_1)] \\ &\geq \phi[-M(\eta_2 - \eta_1) - M(u_2 - \eta_2) + M(u_1 - \eta_1)] = -Mp \end{aligned}$$

Do đó $p(t) \geq p(0)e^{-Mt} \geq 0$ trên J , suy ra $A\eta_1 \leq A\eta_2$. (đpcm)

Do bổ đề 2.4.1, ta có thể xác định dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ như sau:

$$v_n = Av_{n-1} \text{ và } w_n = Aw_{n-1}$$

Dễ thấy rằng $\{v_n\}, \{w_n\}$ là những dãy đơn điệu thỏa $v_n \leq w_n$ và

$v_n, w_n \in [v_0, w_0]$. Ta sẽ chứng minh tồn tại những dãy con của $\{v_n\}, \{w_n\}$ mà hội tụ đều trên J .

Bổ đề 3.4.2

Với giả thiết của bổ đề 3.4.1, nếu nón K là nón chuẩn thì dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ bị chặn đều, liên tục đồng bậc và compact tương đối trên J .

Chứng minh:

Vì nón K là chuẩn nên dẫn đến $\{v_n\}, \{w_n\}$ bị chặn đều (do $\{v_n\}, \{w_n\} \in [v_0, w_0]$). Điều này kéo theo tính liên tục đồng bậc của những dãy này và f ánh xạ tập bị chặn thành tập bị chặn (theo (A_1)).

Bây giờ ta đặt $B(t) = \{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ để mà $B'(t) = \{v'_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ và $m(t) = \alpha(B(t))$.

Khi đó ta có

$$D^-m(t) \leq \alpha \left(\left\{ \frac{v_n(t) - v_n(t-h)}{h} \right\}_{n=0}^{\infty} \right) \leq \alpha \left(\overline{\text{conv}} \left(\{v'_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \right) \right)$$

Vì vậy ta có $D^-m(t) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha \left(\bigcup_{J_h} B'(x) \right)$, trong đó $J_h = [t-h, t] \subset J$.

$$\begin{aligned} \text{Hiển nhiên } \alpha \left(\bigcup_{J_h} B'(s) \right) &\leq \alpha \left(\bigcup_{J_h} \{f(t, v_{n-1}(t))\}_{n=1}^{\infty} \right) + 2M \alpha \left(\bigcup_{J_h} \{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \right) \\ &\leq \alpha \left(\left\{ f \left(J, \bigcup_{J_h} B(s) \right) \right\} \right) + 2M \alpha \left(\bigcup_{J_h} B(s) \right) \\ &= (L + 2M) \alpha \left(\bigcup_{J_h} B(s) \right). \end{aligned}$$

Tính liên tục đồng bậc của $v_n(t)$ dẫn đến $D^-m(t) \leq (L + 2M)m(t), t \in J$

Vì $m(0) = \alpha\left(\{v_n(0)\}_{n=0}^{\infty}\right) = \alpha(u_0, v_0(0)) = 0$ nên $m(t) = 0$ trên J

Suy ra $\{v_n(t)\}$ compact tương đối với mỗi $t \in J$.

Tương tự $\{w_n(t)\}$ compact tương đối với mỗi $t \in J$. (đpcm)

Bây giờ ta áp dụng định lý Ascoli cho các dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ chứa dãy con $\{v_{n_k}\}$,

$\{w_{n_k}\}$ hội tụ đều trên J . Vì các dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ đơn điệu nên dãy $\{v_n\}$, $\{w_n\}$

hội tụ đều và đơn điệu về các hàm liên tục, tức là, $\lim_{n \rightarrow \infty} v(t) = \rho(t)$ và

$\lim_{n \rightarrow \infty} w(t) = r(t)$ trên J

Dễ dàng suy ra từ (3.4.2) rằng $\rho(t)$ và $r(t)$ là các nghiệm của (3.4.1) trên J .

Cuối cùng chúng ta chỉ ra rằng $\rho(t)$, $r(t)$ là các nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của (3.4.1). Lấy $u(t)$ là nghiệm bất kỳ của (3.4.1) trên J sao cho

$u \in [v_0, w_0]$. Giả sử $v_n \leq u \leq w_n$ trên J .

Đặt $p(t) = \phi[u(t) - v_{n+1}(t)]$ để $p(0) \geq 0$, trong đó $\phi \in K^*$

Khi đó theo (A_3) và giả thiết $v_n \leq u$, ta có

$$p' = \phi[f(t, u) - f(t, v_n) + M(v_{n+1} - v_n)] \geq [-M(u - v_n) + M(v_{n+1} - v_n)] = -Mp$$

Điều này dẫn đến $v_{n+1} \leq u$ trên J .

Tương tự ta chứng minh được $u \leq w_{n+1}$ trên J .

Vì $u \in [v_0, w_0]$ nên bằng cách quy nạp ta có $v_n \leq u \leq w_n$ trên J với mọi n .

Do vậy bằng cách lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta được $\rho(t) \leq u(t) \leq r(t)$ trên J .

Chúng tỏ $\rho(t)$, $r(t)$ là các nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của (3.4.1) trên J .

Ta vừa chứng minh kết quả sau mà tương ứng với định lý 3.3.1.

Định lý 3.4.1

Cho K là nón chuẩn và giả sử (A_1) , (A_2) và (A_3) đều được thỏa. Khi đó tồn tại các dãy đơn điệu $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ mà hội tụ đều và đơn điệu về các nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất $\rho(t)$, $r(t)$ tương ứng của (3.4.1) trên $[v_0, w_0]$.

Tức là, nếu u là nghiệm bất kỳ của (3.4.1) trên $[v_0, w_0]$ thì

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \rho \leq u \leq r \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 \text{ trên } J.$$

Hệ quả 3.4.1

Nếu nghiệm của (3.4.1) là duy nhất thì những giả thiết của định lý 3.3.1 dẫn tới $\rho(t) = u(t) = r(t)$ trên J .

Nhận xét 3.4.1

Nếu f tựa đơn điệu liên quan tới K trong đó K là nón solid thì tồn tại nghiệm cực trị được đưa ra trong phần 3.1. Nói cách khác khi K không solid và hàm f ánh xạ $J \times K$ lên E thì cũng tồn tại các nghiệm cực trị như đã biết. Xem Deimling và Lakshmikantham [1].

Nhận xét 3.4.2

Giả sử $E = \mathbb{R}^n$ và $K = \mathbb{R}_+^n$, nón chuẩn. Cho $f(t, u)$ là hàm tựa đơn điệu không giảm theo u với mỗi $t \in J$,

tức là $v \leq u$ và $u_i = v_i \Rightarrow f_i(t, v) \leq f_i(t, u)$. Hơn nữa, với mỗi $i, i = 1, 2, \dots, n$.

$$f_i(t, v_1, \dots, u_i, \dots, v_n) - f_i(t, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \geq -M(u_i - v_i), \text{ trong đó}$$

$$v_{0i}(t) \leq v_i \leq u_i \leq w_{0i}(t).$$

Khi đó kết luận của định lý 3.4.1 vẫn đúng với điều kiện (A_2) được thỏa.

Trong trường hợp này, từ hai bổ đề trên f kéo theo

$$f(t, u) - f(t, v) \geq -M(u - v) \text{ trong đó } v_0 \leq v \leq u \leq w_0 \text{ mà tương ứng với}$$

(A_3) . Do vậy khi giả sử điều kiện cuối đúng thì tính tựa đơn điệu

(quasimonotonicity) của f được gộp vào trong nó. Tất nhiên ta không cần (A_1) khi $E = \mathbb{R}^n$.

Tiếp theo chúng ta sẽ xem một kết quả tương ứng với định lý 3.3.2.

Chúng ta bắt đầu liệt kê các giả thiết sau:

$$(A_4) \quad \|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|, t \in J, u_1, u_2 \in [v_0, w_0]$$

$$(A_5) \quad v_0, w_0 \in C^1[J, E] \text{ với } v_0(t) \leq w_0(t) \text{ trên } J \text{ sao cho tồn tại } M > 0 \text{ thỏa}$$

$$\phi[v'_0 - f(t, \sigma) + M(v_0 - \sigma)] \leq 0,$$

$$\phi[w'_0 - f(t, \sigma) + M(w_0 - \sigma)] \geq 0, \text{ với mọi } \sigma \in [v_0, w_0] \text{ và } \phi \in K^*.$$

Nhận xét 3.4.3

Nếu f liên tục đều thì điều kiện (A_1) không cần thiết. Vì khi đó

$$(f(J \times B)) = \max_J \alpha(f(t, B))$$

Nhận xét 3.4.4

Nếu thêm điều kiện σ thỏa mãn (A_5) sao cho với mỗi $\phi \in K^*$,

$\phi(v_0(t) - \sigma) = 0$ và $\phi(w_0(t) - \sigma) = 0$ thì điều kiện (A_5) thu hẹp thành điều kiện (3.3.4).

Bây giờ giả sử f thỏa (A_3) thì dễ dàng chứng tỏ $A_2 \Rightarrow A_5$.

Với $\eta \in C[J, E]$ bất kì sao cho $v_0(t) \leq \eta(t) \leq w_0(t)$ trên J xác định ánh xạ

$A: A\eta = u$, trong đó $u = u(t)$ là nghiệm duy nhất của (3.4.2) tương ứng với η .

Liên quan đến ánh xạ A ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.4.3

Giả sử các giả thiết (A_1) và (A_5) đều được thỏa. Khi đó A ánh xạ cung $[v_0, w_0]$ lên chính nó.

Chúng minh:

Lấy $\eta \in C[J, E]$ thỏa $\eta \in [v_0, w_0]$ và $u = A\eta$.

Với $\phi \in K^*$ tùy ý, đặt $p(t) = \phi[u(t) - v_0(t)]$ để mà $p(0) \geq 0$

khi đó với mọi $\sigma \in [v_0, w_0]$

$$p' \geq \phi[f(t, \eta) - M(u - \eta) - f(t, \sigma) + M(v_0 - \sigma)] \quad (\text{do } (A_5))$$

Chọn $\sigma = \eta$, ta có $p' \geq -Mp$ suy ra $p(t) \geq p(0)e^{-Mt} \geq 0$ trên J .

Điều này chứng tỏ $v_0(t) \leq u(t)$ trên J .

Lý luận tương tự ta chứng minh được $u(t) \leq w_0(t)$ trên J

Do vậy $u = A\eta \in [v_0, w_0]$. Vì η tùy ý nên ta có điều phải chứng minh.

Do bổ đề 3.4.3, ta có thể định nghĩa dãy $u_n = Au_{n-1}$ với $u_0 = v_0$ hoặc w_0 thỏa $u_n \in [v_0, w_0]$ trên J .

Do bổ đề 3.4.2 và định lý Ascoli ta có thể kết luận về sự tồn tại dãy con hội tụ đều của $\{u_n\}$.

Giả sử $u_n(t) - u_{n-1}(t) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, khi đó rõ ràng giới hạn của dãy con bất kỳ là nghiệm duy nhất của (3.4.1) trên J (theo định nghĩa $\{u_n\}$): suy ra sự lựa chọn dãy con là không quan trọng và dãy đầy đủ $\{u_n(t)\}$ hội tụ đều về nghiệm duy nhất $u(t)$ trên J sao cho $u(t) \in [v_0, w_0]$ trên J . Do vậy, đủ để chứng minh $m(t) = 0$ trên J , trong đó $m(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|$.

Bổ đề 3.4.4

Cho K là nón chuẩn và cho giả thiết (A_1) , (A_4) và (A_6) đều được thỏa. Khi đó $m(t) = 0$ trên J .

Chứng minh:

Vì f ánh xạ tập bị chặn thành tập bị chặn nên ta cho $\|f(t, u)\| \leq N$ với $t \in J$ và $u \in [v_0, w_0]$. Khi đó với $t_1, t_2 \in J$

$$\|u_n(t_1) - u_{n-1}(t_1)\| \leq \|u_n(t_2) - u_{n-1}(t_2)\| + 2N|t_1 - t_2|$$

$$\leq m(t_2) + 2N|t_1 - t_2| + \varepsilon \text{ với } n \text{ lớn, } \varepsilon > 0 \text{ cho trước.}$$

Do đó $m(t_1) \leq m(t_2) + 2N|t_1 - t_2| + \varepsilon$.

Vì t_1, t_2 có thể được thay đổi cho nhau và $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta thu được

$$|m(t_1) - m(t_2)| \leq 2N|t_1 - t_2| \Rightarrow m(t) \text{ liên tục trên } J.$$

Bây giờ (A_4) cho ta

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| &\leq \int_0^t \left[\|f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s))\| + M \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\| \right. \\ &\quad \left. + M \|u_{n+1}(s) - u_n(s)\| \right] ds \\ &\leq \int_0^t \left[(L + M) \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\| + M \|u_{n+1}(s) - u_n(s)\| \right] ds. \end{aligned}$$

Với t cố định, $t \in (0, T]$, tồn tại dãy các số nguyên $n_1 < n_2 < \dots$, sao cho

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n = n_k \rightarrow \infty \text{ và}$$

$$m^*(s) = \lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\| \text{ tồn tại (và là giới hạn đều) trên } J.$$

Vì vậy dẫn đến $m(t) \leq (L + 2M) \int_0^t m(s) ds$ trên J (vì $m^*(s) \leq m(s)$)

$$\Rightarrow m(t) \leq m(0)e^{(L+2M)t}, \quad t \in J.$$

Vì $m(0) = 0$ nên ta có $m(t) = 0$ trên J (điều phải chứng minh)

Như vậy ta vừa chứng minh kết quả sau.

Định lý 3.4.2

Giả sử nón K là nón chuẩn và các điều kiện (A_1) , (A_4) và (A_5) thỏa.

Khi đó tồn tại nghiệm duy nhất $u(t)$ của (3.4.1) trên J sao cho

$$v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t) \text{ trên } J \text{ với điều kiện là } v_0(0) \leq u_0 \leq w_0(0).$$

Hệ quả 3.4.2

Cho $E = R^n$ và $(A_4), (A_5)$ đều được thỏa. Khi đó tồn tại nghiệm duy nhất của (3.4.1) trên J sao cho $u(t) \in [v_0, w_0]$ với điều kiện $v_0(0) \leq u_0 \leq w_0(0)$.

3.5 Phương pháp tựa nghiệm trên, tựa nghiệm dưới.

Trong phần này, ta sẽ xét dạng tổng quát ở đây f trong (3.4.1) có tính chất tựa đơn điệu hỗn tạp.

Để xác định lớp xấp xỉ của các nghiệm trên và nghiệm dưới phù hợp với yêu cầu của chúng ta, ta sẽ giả sử rằng f có một phân tích dạng

$$f(t, u) = f_0(t, u) + f_1(t, u) + f_2(t, u) \quad (3.5.1)$$

Trong đó $f_0, f_1, f_2 \in C[\Omega, E]$, $\Omega = \{(t, u) \in J \times E : t \in J\}$ và $v_0 \leq u \leq w_0$

Định nghĩa 3.5.1

Cho $v_0, w_0 \in C^1[J, E]$. Khi đó v_0, w_0 được gọi là cặp tựa nghiệm dưới và tựa nghiệm trên của (3.4.1) nếu

$$\left. \begin{aligned} v'_0 &\leq f_0(t, v_0) + f_1(t, v_0) + f_2(t, w_0), v(0) \leq u_0, \\ w'_0 &\geq f_0(t, w_0) + f_1(t, w_0) + f_2(t, v_0), w(0) \geq u_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2)$$

Nếu trong (3.5.2), đẳng thức xảy ra, thì v_0, w_0 được gọi là tựa nghiệm của (3.4.1). Rõ ràng người ta có thể xác định, dựa trên định nghĩa 3.5.1, cặp tựa nghiệm lớn nhất và tựa nghiệm nhỏ nhất của (3.4.1).

Chúng ta cũng cần một dạng mạnh hơn của cặp tựa nghiệm trên và tựa nghiệm dưới của (3.4.1).

Định nghĩa 3.5.2

Cho $v_0, w_0 \in C^1[J, E]$ thỏa $v_0(t) \leq w_0(t)$ trên J . Khi đó v_0, w_0 được gọi là cặp tựa nghiệm dưới và tựa nghiệm trên mạnh của (3.4.1) nếu tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left. \begin{aligned} \phi[v'_0 - f_0(t, \sigma) - f_1(t, v_0) - f_2(t, w_0) + M(v_0 - \sigma)] &\leq 0, \\ \phi[w'_0 - f_0(t, \sigma) - f_1(t, w_0) - f_2(t, v_0) + M(w_0 - \sigma)] &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.3)$$

Với mọi σ sao cho $v_0(t) \leq \sigma \leq w_0(t)$, $t \in J$ và $\phi \in K^*$.

Để thuận tiện ta liệt kê các giả thiết sau:

(A₁) với tập bị chặn bất kỳ B trong E , $\alpha(f(J \times B)) \leq L\alpha(B)$;

(A₂) $\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|, (t, u_1), (t, u_2) \in \Omega$;

(A₃) $f_1(t, u)$ không giảm theo u và $f_2(t, u)$ không tăng theo u liên quan đến nón K ;

(A₄) $f_0(t, u_1) - f_0(t, u_2) \geq -M(u_1 - u_2)$ với $(t, u_1), (t, u_2) \in \Omega$ và $u_2 \leq u_1$;

(A₅) với $\phi \in K^*$ bất kỳ, $t \in J$, $\phi(f_0(t, u_1) - f_0(t, u_2)) = 0$ nếu $\phi(u_1 - u_2) = 0$.

Nếu f thỏa (3.5.1), (A₃), (A₄) và (A₅), ta nói rằng f là ánh xạ tựa đơn điệu hỗn tạp.

Với $\eta_1, \eta_2 \in C[J, E]$ bất kỳ sao cho $\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$.

Xét phương trình vi phân tuyến tính $u' + Mu = \sigma(t), u(0) = u_0$ (3.5.4)

Trong đó $\sigma(t) = f_0(t, \eta_1(t)) + f_1(t, \eta_1(t)) + f_2(t, \eta_2(t)) + M\eta_1(t)$.

Với bất kỳ $\eta_1, \eta_2 \in C[J, E]$ sao cho $\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$, ta định nghĩa ánh xạ

$$A: [v_0, w_0] \rightarrow C[J, E], \text{ định bởi : } A[\eta_1, \eta_2] = u \quad (3.5.5)$$

Trong đó $u = u(t)$ là nghiệm duy nhất của (3.5.4) trên J .

Bổ đề 3.5.1

Cho $v_0, w_0 \in C^1[J, E]$ với $v_0(t) \leq w_0(t)$ trên J . Giả sử hoặc (a) (3.5.2),

(A₁), (A₃) và (A₄) đều được thỏa hoặc (b) (3.5.3), (A₁) và (A₃) đều được

thỏa. Khi đó A ánh xạ đoạn nón $[v_0, w_0]$ thành chính nó.

Trong trường hợp (a), A có thêm tính chất đơn điệu hỗn tạp trên $[v_0, w_0]$, tức là: $A[\eta_1, \eta_2] \leq A[\eta_2, \eta_1]$ khi $\eta_1 \leq \eta_2$ và $\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$.

Chứng minh:

Lấy $\eta_1, \eta_2 \in C[J, E]$ thỏa $\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$ và $u = A[\eta_1, \eta_2]$ trong đó $u = u(t)$ là nghiệm duy nhất của (3.5.4) trên J .

Ta đặt $p = \phi(u - v_0)$ với $\phi \in K^*$ và chú ý $p(0) \geq 0$.

Nếu (a) được thỏa, ta có

$$\begin{aligned} p' &\geq \phi[f_0(t, \eta_1) + f_1(t, \eta_1) + f_2(t, \eta_2) - M(u - \eta_1) - f_0(t, v_0) - f_1(t, v_0) - f_2(t, w_0)] \\ &\geq \phi[-M(\eta_1 - v_0) + f_1(t, v_0) + f_2(t, w_0) - M(u - \eta_1) - f_1(t, v_0) - f_2(t, w_0)] \\ &= -Mp. \end{aligned}$$

Nếu (b) được thỏa, ta có:

Với mọi σ sao cho $v_0(t) \leq \sigma \leq w_0(t)$,

$$\begin{aligned} p' &\geq \phi[f_0(t, \eta_1) + f_1(t, \eta_1) + f_2(t, \eta_2) - M(u - \eta_1) - f_0(t, \sigma) - f_1(t, v_0) \\ &\quad - f_2(t, w_0) - M(v_0 - \sigma)] \end{aligned}$$

Chọn $\sigma = \eta_1$, ta có:

$$\begin{aligned} p' &\geq \phi[f_0(t, \eta_1) + f_1(t, v_0) + f_2(t, w_0) - M(u - \eta_1) - f_0(t, \eta_1) \\ &\quad - f_1(t, v_0) - f_2(t, v_0) + M(v_0 - \eta_1)] = -Mp \end{aligned}$$

Do đó, trong cả hai trường hợp, ta nhận được $p(t) \geq p(0)e^{-Mt} \geq 0$ trên J .

Vì $\phi \in K^*$ là tùy ý nên chứng tỏ $v_0 \leq u$ trên J .

Lý luận tương tự ta được $u \leq w_0$ trên J .

Vì thế ta có $A[v_0, w_0] \subset [v_0, w_0]$.

Phần còn lại là chứng minh A đơn điệu hỗn tạp.

Lấy $\eta_1 \leq \eta_2$, $u_1 = A[\eta_1, \eta_2]$ và $u_2 = A[\eta_2, \eta_1]$.

Đặt $p = \phi(u_2 - u_1)$ và chú ý $p(0) \geq 0$, trong đó $\phi \in K^*$.

Khi đó, sử dụng (A_3) ta thu được:

$$\begin{aligned} p' &= \phi \left[f_0(t, \eta_2) + f_1(t, \eta_2) + f_2(t, \eta_1) - M(u_2 - \eta_2) - f_0(t, \eta_1) \right. \\ &\quad \left. - f_1(t, \eta_1) - f_2(t, \eta_2) + M(u_1 - \eta_1) \right] \\ &\geq \phi \left[-M(\eta_2 - \eta_1) - M(u_2 - \eta_2) + M(u_1 - \eta_1) \right] = -Mp. \end{aligned}$$

Như phần trước, điều này chứng tỏ $p(t) \geq 0$ trên J .

Do đó $A[\eta_1, \eta_2] \leq A[\eta_2, \eta_1]$. Vậy bổ đề đã được chứng minh.

Do bổ đề 3.5.1, ta có thể xác định các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ như sau:

$$v_{n+1} = A[v_n, w_n], \quad w_{n+1} = A[w_n, v_n] \quad \text{và} \quad v_n, w_n \in [v_0, w_0].$$

Kết quả sau liên quan đến các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ có nghĩa.

Chứng minh của chúng tương tự những kết quả tương ứng trong phần 3.4.

Bổ đề 3.5.2

Cho K chuẩn và các giả thiết của bổ đề 3.5.1 được thỏa. Khi đó các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ bị chặn đều, liên tục đồng bậc và compact tương đối trên J .

Bổ đề 3.5.3

Cho K nón chuẩn và các giả thiết (b) của bổ đề 3.5.1 được thỏa. Nếu (A_2) được thỏa thì $m(t) = 0$ trên J .

Trong đó $m(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n(t) - v_{n-1}(t)\|$ hoặc $m(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n(t) - w_{n-1}(t)\|$.

Trong trường hợp (a), người ta dễ thấy rằng $\{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy đơn điệu sao cho $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0$ trên J

Do đó, trong trường hợp này, các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ hội tụ đều và đơn điệu về các hàm liên tục ρ và r , tức là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \rho(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) = r(t) \quad \text{trên } J.$$

Trong trường hợp (b) xảy ra, bổ đề (3.5.2) và (3.5.3) và (A_2) cho phép ta kết luận các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ hội tụ đều về $\rho(t), r(t)$ tương ứng trên J .

Khi đó, dễ thấy từ (3.5.4) rằng $\rho(t), r(t)$ là tựa nghiệm nhỏ nhất và tựa nghiệm lớn nhất của (3.4.1) trên J trong mỗi trường hợp.

Bây giờ chúng ta phát biểu các kết quả chính.

Định lý 3.5.1

Cho K là nón chuẩn và $v_0, w_0 \in C^1[J, E]$ với $v_0(t) \leq w_0(t)$ trên J . Nếu các giả thiết (a) (3.5.2), (A_1) , (A_3) và (A_4) đều được thỏa thì tồn tại các dãy $\{v_n\}, \{w_n\}$ hội tụ đều và đơn điệu về cặp tựa nghiệm nhỏ nhất và tựa nghiệm lớn nhất (ρ, r) của (3.4.1) trên J , nghĩa là, (u_1, u_2) là cặp tựa nghiệm bất kỳ sao cho $v_0 \leq u_1, u_2 \leq w_0$ trên J khi đó

$$v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \rho \leq u_1, u_2 \leq r \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 \text{ trên } J, \text{ với điều kiện } v_0(0) \leq u_0 \leq w_0(0).$$

Nếu thêm (a), điều kiện (A_2) thỏa thì $\rho(t) = r(t) = u(t)$ và $v_0 \leq u \leq w_0$ trên J .

Nếu các giả thiết (b), (3.5.3), (A_1) , (A_2) và (A_3) đều được thỏa thì tồn tại nghiệm duy nhất $u(t)$ của (3.4.1) trên J sao cho $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ trên J với điều kiện $v_0(0) \leq u_0 \leq w_0(0)$.

Chứng minh:

Theo các bổ đề trên và (A_2) nên dẫn đến trong trường hợp (b),

$$\rho(t) = r(t) = u(t) \text{ và } v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t) \text{ trên } J.$$

Trong trường hợp (a) ta phải chứng minh (ρ, r) là cặp tựa nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của (3.4.1) trên J . Để kết thúc, lấy (u_1, u_2) là cặp tựa nghiệm bất kỳ của (3.4.1) sao cho $u_1, u_2 \in [v_0, w_0]$ trên J .

Giả sử với số nguyên $k > 0$ nào đó, ta có $v_{k-1} \leq u_1, u_2 \leq w_{k-1}$ trên J .

Khi đó, đặt $p = \phi(u_1 - v_k)$ và chú ý $p(0) = 0$, ta nhận được

$$p' = \phi \left[f_0(t, u_1) + f_1(t, u_1) + f_2(t, u_2) - f_0(t, v_{k-1}) - f_1(t, v_{k-1}) - f_2(t, w_{k-1}) + M(v_k - v_{k-1}) \right] \\ \geq -Mp.$$

Suy ra $p(t) \geq 0$ và chứng tỏ $v_k \leq u_1$ trên J .

Lý luận tương tự chứng tỏ $v_k \leq u_1, u_2 \leq w_k$ trên J .

Vì $v_0 \leq u_1, u_2 \leq w_0$ trên J do giả thiết nên kéo theo (bằng cách quy nạp)

$\rho \leq u_1, u_2 \leq r$ trên J , chứng tỏ (ρ, r) là cặp tựa nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của (3.4.1) trên J .

Nếu (A_2) xảy ra thì ta dễ dàng thiết lập $\rho(t) = r(t) = u(t)$ và $v_0 \leq u \leq w_0$ trên J . Vậy định lý đã được chứng minh.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày năm phương pháp để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Banach có thứ tự.

Mỗi phương pháp đều có ứng dụng vào sự tồn tại nghiệm tương ứng với giả thiết của hàm f .

Luận văn cung cấp một số phương pháp hiện đại khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân trừu tượng trong không gian có thứ tự.

Qua luận văn này tôi học được phương pháp nghiên cứu khoa học (Đọc, tìm hiểu, truy cập tài liệu). Tôi hy vọng sẽ có điều kiện nghiên cứu tiếp đề tài.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lakshmikantham, V. , and Leela, S.

[1] *Nonlinear differential equations in abstract spaces*, Pergamon Oxford, 1981.

[2] Cone valued Lyapunov function, *Nonlinear Anal.* ,1(1977),pp. 215-222.

[3] On the method of upper and lower solution in abstract spaces, *Ann. Polon. Math.* ,42(1983), pp.159-164.

[4] *Differential and Integral Inequalities*, Vol. I-II, Academic Press, New York, 1969.

[5] Method of quasi-upper and solution in abstract cones, *Nonlinear Anal.* ,6(1982), pp. 833-838.

2. Nguyễn Bích Huy, Giải Tích Phi Tuyến 2