

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN VĂN QUANG

**ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT THỂ VỊ PHẪNG VÀO
PHÉP NỘI SUY CÁC KHÔNG GIAN L^p
VÀ PHÉP XẤP XỈ ĐỀU**

Chuyên ngành:
Mã số:

Toán giải tích
60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN VĂN ĐÔNG**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2009

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Thầy **TS. Nguyễn Văn Đông**, người đã tận tâm hướng dẫn và tạo điều kiện tối đa để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Quý Thầy Cô trong Hội đồng chấm luận văn đã giành thời gian đọc, chỉnh sửa và đóng góp ý kiến giúp cho tôi hoàn thành luận văn này một cách hoàn chỉnh

Tôi xin cảm ơn Ban Giám Hiệu, Phòng KHCN-Sau Đại học cùng toàn thể thầy cô khoa Toán-Tin học trường Đại học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt thời gian nghiên cứu đề tài.

Tôi cũng chân thành cảm ơn gia đình, các anh chị và các bạn đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, trong quá trình viết luận văn này khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của Quý Thầy Cô và bạn đọc nhằm bổ sung và hoàn thiện đề tài hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

TP Hồ Chí Minh, tháng 11 năm 2009

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

$\mathbb{N}$: tập số tự nhiên

$\mathbb{Z}$: tập số nguyên

$\mathbb{Q}$: tập số hữu tỉ

$\mathbb{R}$: tập số thực

$\mathbb{C}$: tập số phức

$\mathbb{C}_\infty$: tập số phức mở rộng (mặt cầu Riemann)

$B(\omega, \rho), \Delta(\omega, \rho)$: hình tròn mở tâm ω , bán kính ρ

$\overline{B(\omega, \rho)}$: hình tròn đóng tâm ω , bán kính ρ

$\text{supp } \mu$: giá của độ đo μ

$\text{supp } \phi$: giá của hàm ϕ

∂D : biên của D

$\text{int}(D)$: phần trong của D

$\text{diam}(D)$: đường kính của D

$A(D)$: tập tất cả các hàm chỉnh hình trên D

$H(D)$: tập tất cả các hàm điều hòa trên D

$S(U)$: tập tất cả các hàm điều hòa dưới trên U

$C^n(D)$: tập tất cả các hàm khả vi liên tục đến cấp n trên D

$C_c(D)$: tập tất cả các hàm liên tục có giá compact D

$C^\infty(D)$: tập tất cả các hàm khả vi vô hạn lần trên D

$C_c^\infty(D)$: tập tất cả các hàm khả vi vô hạn có giá compact trên D

$\#A, |A|$: lực lượng của tập A

H^∞ : đại số các hàm giải tích bị chặn, trong đĩa đơn vị

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài và mục đích nghiên cứu

Lý thuyết thế vị là tên gọi cho một lĩnh vực được nghiên cứu rộng rãi của giải tích phức bao gồm các vấn đề liên quan đến các hàm điều hòa, điều hòa dưới, bài toán Dirichlet, độ đo điều hòa, hàm Green, thế vị và dung lượng... Xuất phát từ thực tiễn vật lý, nó được phát triển nhanh từ lý thuyết thế vị cổ điển trong $\mathbb{R}^n$ và lý thuyết đa thế vị trong $\mathbb{C}^n$ đến các lý thuyết tiên đề trên những không gian tổng quát. Sự phát triển của nó ngày càng trừu tượng khái quát. Tuy nhiên có một nền chung cho tất cả các lý thuyết trên, đó là lý thuyết thế vị trong mặt phẳng: lý thuyết này chứa các vật liệu cần thiết cho các lý thuyết thế vị. Có một sự liên hệ chặt chẽ giữa lý thuyết thế vị và giải tích phức: các kỹ thuật của giải tích phức, đặc biệt là các ánh xạ bảo giác, giúp đưa ra nhanh gọn các chứng minh và các kết quả của lý thuyết thế vị. Mặt khác các định lý tương tự trong lý thuyết thế vị lại có vô số ứng dụng trong giải tích phức.

Trong lý thuyết số, phép nội suy là phương pháp xây dựng các điểm dữ liệu mới dựa vào một tập rời rạc các điểm dữ liệu đã biết. Các dữ liệu này có được nhờ việc lấy mẫu, thí nghiệm, phép thử... từ đó người ta cố gắng xây dựng một hàm mà khớp rất gần với các dữ liệu này. Lĩnh vực này được gọi là sự làm khớp đường cong, giải tích ngược (giải tích hồi quy). Phép nội suy là một trường hợp đặc biệt của sự làm khớp đường cong mà đồ thị hàm số phải đi qua các điểm dữ liệu. Các dạng của phép nội suy có thể xây dựng bằng cách chọn các lớp hàm khác nhau, chẳng hạn như : phép nội suy bởi các đa thức, phép nội suy bởi các hàm lượng giác, phép nội suy bởi các hàm điều hòa dương... Một bài toán có liên hệ gần gũi với phép nội suy là phép xấp xỉ một hàm đa thức với một hàm đơn giản

Các kết quả về lý thuyết thế vị và các phép nội suy đang được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi. Vì vậy chúng tôi chọn đề tài này làm nội dung nghiên cứu của luận văn nhằm học tập và phát triển đề tài của mình theo hướng trên.

2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong bài luận văn này, sau khi giới thiệu một số kết quả đã có của Lý thuyết thế vị trong mặt phẳng, trong nhiều ứng dụng của lý thuyết thế vị, chúng tôi giới thiệu ba ứng dụng sau:

+ Phép nội suy trong không gian L^p :

- + Xấp xỉ đều
- + Phép nội suy bởi các hàm điều hòa dương.

3. Cấu trúc luận văn

Luận văn được chia thành 4 chương với nội dung chính như sau

Chương 1: Trong chương này, ta chỉ trình bày các kết quả của lý thuyết thế vị trong mặt phẳng phức, mà không đưa ra các chứng minh. Các chứng minh này đã được trình bày chi tiết trong quyển [10]

Chương 2: Sử dụng định lý *Ba đường thẳng* trong lý thuyết thế vị và các kiến thức về giải tích hàm ta chứng minh định lý **Định lý nội suy Riesz – Thorin**, mà một trường hợp đặc biệt của định lý là: với T là toán tử tuyến tính bị chặn trên cả L^1 và L^2 thì T là toán tử tuyến tính bị chặn trên L^p với mỗi p thỏa $1 \leq p \leq 2$.

Chương 3:

Nội dung chính của chương 3 là sử dụng lý thuyết thế vị, ta mở rộng các kết quả của định lý Runge về xấp xỉ đều bởi đa thức qua các định lý: **Định lý Bernstein-Walsh**, **Định lý Keldysh**.

Chương 4: Trình bày một điều kiện cần và đủ để một dãy điểm tách được trong một đường tròn đơn vị là dãy nội suy đối với các hàm điều hòa dương.

TP. Hồ Chí Minh, ngày 25 tháng 10 năm 2009

Người thực hiện

Nguyễn Văn Quang

Chương 1: MỘT SỐ KẾT QUẢ CỦA LÝ THUYẾT THỂ VỊ TRONG MẶT PHẪNG

1.1. Hàm điều hòa

Định nghĩa 1.1.1 Cho U là tập con mở của $\mathbb{C}$. Hàm $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ được gọi là *hàm điều hòa* nếu $f \in C^2(U)$ và $\Delta f = 0$ trên U .

Tập hợp các hàm điều hòa trên U được ký hiệu là $H(U)$

Kết quả dưới đây không những cung cấp cho chúng ta nguồn ví dụ phong phú về các hàm điều hòa mà còn mang lại một công cụ hữu ích để khám phá những tính chất cơ bản của chúng thông qua các tính chất của các hàm chỉnh hình.

Định lý 1.1.2 Cho D là một miền trong $\mathbb{C}$.

- Nếu $f \in A(D)$ và $u = \operatorname{Re} f$ thì $u \in H(D)$.
- Nếu $u \in H(D)$ và D là miền đơn liên thì tồn tại $f \in A(D)$ sao cho $u = \operatorname{Re} f$. Hơn nữa, các hàm f như vậy chỉ sai khác nhau một hằng số.

Định lý 1.1.3 (Nguyên lý cực đại) Cho f là hàm điều hòa trên miền $D \subset \mathbb{C}$.

- Nếu f đạt cực đại trên D thì $f = \text{const}$ trên D .
- Nếu f liên tục trên $\overline{D}$ và $f(z) \leq 0 \quad \forall z \in \partial D$ thì $f \leq 0$ trên D .
(trong đó $\infty \in \partial D$ nếu D không bị chặn)

Định lý 1.1.4 (Nguyên lý đồng nhất) Cho f, g là hai hàm điều hòa trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Nếu $f = g$ trên tập mở $U \neq \emptyset, U \subset D$ thì $f \equiv g$ trên D .

Định nghĩa 1.1.5

- Hàm $P: B(0,1) \times \partial B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$P(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (|z| < 1, |\zeta| = 1)$$

được gọi là nhân Poisson.

b) Nếu $\Delta = B(\omega, \rho)$ và $\varphi: \partial\Delta \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm khả tích Lebesgue thì ta gọi hàm $P_\Delta \varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi:

$$P_\Delta \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-\omega}{\rho}, e^{i\theta}\right) \varphi(\omega + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (z \in \Delta)$$

là tích phân Poisson. Cụ thể hơn với $r < \rho$ và $0 \leq t < 2\pi$ ta có:

$$P_\Delta \phi(\omega + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} \phi(\omega + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

Sau đây là một kết quả cơ bản:

Hệ quả 1.1.6 (Công thức tích phân Poisson) Cho f là hàm điều hoà trên một lân cận mở của đĩa tròn đóng $\overline{B(\omega, \rho)}$. Khi đó với $r < \rho$ và $0 \leq t < 2\pi$ ta có:

$$f(\omega + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + r^2} f(\omega + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

1.2. Hàm điều hòa dương

Từ “dương” có nghĩa là “không âm” mặc dù trong tình huống này khó mà phân biệt được chúng vì theo nguyên lý cực đại mọi hàm điều hòa đạt giá trị cực tiểu bằng 0 trên một miền phải đồng nhất bằng không trên toàn miền đó.

Định lý 1.2.1 (Bất đẳng thức Harnack) Cho h là một hàm điều hòa dương trên $B(z, R)$. Khi đó với $r < R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ có

$$\frac{R-r}{R+r} h(z) \leq h(z + re^{i\varphi}) \leq \frac{R+r}{R-r} h(z)$$

Hệ quả 1.2.2 Cho D là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$ và $z, \omega \in D$. Khi đó tồn tại số τ sao cho với mọi hàm điều hòa dương h trên D ,

$$\tau^{-1} h(\omega) \leq h(z) \leq \tau h(\omega)$$

Từ hệ quả trên ta đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.3 Cho D là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$ và $z, \omega \in D$. Khoảng cách Harnack giữa z và ω là số nhỏ nhất $\tau_D(z, \omega)$ sao cho với mọi hàm điều hòa dương h trên D có

$$\tau_D(z, \omega)^{-1} h(\omega) \leq h(z) \leq \tau_D(z, \omega) h(\omega)$$

Có một trường hợp mà $\tau_D(z, \omega)$ được tính ra ngay.

Định lý 1.2.4 Nếu $\Delta = B(\omega, \rho)$ thì $\tau_\Delta(z, \omega) = \frac{\rho + |z - \omega|}{\rho - |z - \omega|}$

Định lý 1.2.5 (Định lý Harnack) Cho $(h_n)_{n \geq 1}$ là các hàm điều hòa trên miền D trong $\mathbb{C}_\infty$ và giả sử rằng $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \dots$ trên D . Khi đó hoặc $h_n \rightarrow \infty$ đều địa phương hoặc $h_n \rightarrow h$ đều địa phương, với h là hàm điều hòa trên D .

1.3. Hàm Điều Hòa Dưới

Định nghĩa 1.3.1 Cho U là tập con mở của $\mathbb{C}$. Hàm $u: U \rightarrow [-\infty, \infty)$ được gọi là *điều hoà dưới* nếu u là nửa liên tục trên và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới địa phương:

$$\forall \omega \in U, \exists \rho > 0 : u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it}) dt, 0 \leq r < \rho$$

Hàm $v: U \rightarrow [-\infty, \infty)$ được gọi là *điều hoà trên* nếu $-v$ điều hoà dưới.

Tập tất cả các hàm điều hoà dưới trên U được kí hiệu là $S(U)$.

Định lý 1.3.2 Nếu f chỉnh hình trên tập con mở U của $\mathbb{C}$ thì $\log|f| \in S(U)$.

Định lý 1.3.3 Cho U là tập con mở của $\mathbb{C}$ và $u, v \in S(U)$. Khi đó

- $\max(u, v) \in S(U)$
- $\alpha u + \beta v \in S(U) \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$

Định lý 1.3.4 (Nguyên lý cực đại) Cho miền $D \subset \mathbb{C}$ và $u \in S(D)$.

- Nếu u nhận giá trị cực đại toàn cục trên D thì $u = \text{const}$.
- Nếu $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad \forall \zeta \in \partial D$ thì $u \leq 0$ trên D .

Định lý 1.3.4 (Nguyên lý Paragmen – Lindelof): Cho u là hàm điều hoà dưới trên miền $D \subset \mathbb{C}$ không bị chặn, sao cho:

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (\zeta \in \partial D \setminus \{\infty\})$$

Cũng giả sử rằng, có một hàm điều hoà trên hữu hạn v trên D sao cho:

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) > 0 \quad \text{và} \quad \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0$$

thì $u \leq 0$ trên D

1.4. Thế vị

Định nghĩa 1.4.1 Cho μ là độ đo Borel hữu hạn trên $\square$ với giá compact. *Thế vị* của nó là hàm $p_\mu : \square \rightarrow [-\infty, \infty)$ xác định bởi:

$$p_\mu(z) = \int \log|z - \omega| d\mu(\omega), z \in \square.$$

Định lý 1.4.2 Với định nghĩa trên thì: $p_\mu \in S(\square)$ và điều hoà trên $\square \setminus \text{supp } \mu$.

Hơn nữa: $p_\mu(z) = \mu(\square) \log|z| + O(|z|^{-1})$ khi $z \rightarrow \infty$.

Định nghĩa 1.4.3 Cho μ là độ đo Borel hữu hạn trên $\square$ với giá compact K . *Năng lượng* $I(\mu)$ là đại lượng xác định bởi:

$$I(\mu) = \iint \log|z - \omega| d\mu(z) d\mu(\omega) = \int p_\mu(z) d\mu(z).$$

Để giải thích thuật ngữ này, ta coi μ như là sự phân bố điện tích trên $\square$. Khi đó $p_\mu(z)$ thể hiện năng lượng thế vị tại z ứng với μ , và do đó năng lượng toàn phần là:

$$\int p_\mu(z) d\mu(z) = I(\mu)$$

Thực ra vì sự đẩy lùi điện tích, hầu hết các nhà vật lý định nghĩa năng lượng là $-I(\mu)$, nhưng đối với chúng ta Định nghĩa 3.2.1 thuận lợi hơn

Cũng có thể $I(\mu) = -\infty$. Thực tế có một số tập hợp có độ đo với năng lượng vô hạn.

Định nghĩa 1.4.4 Cho K là tập con compact của $\square$, kí hiệu $P(K)$ là tập tất cả các độ đo Borel xác suất trên K . Nếu tồn tại $\nu \in P(K)$ sao cho $I(\nu) = \sup_{\mu \in P(K)} I(\mu)$ thì ν được gọi là *độ đo cân bằng* của K .

Định lý 1.4.5 (Định lý Frostman) Cho K là tập con compact của $\square$, ν là một độ đo cân bằng của K . Khi đó

- $p_\nu \geq I(\nu)$ trên $\square$.
- $p_\nu = I(\nu)$ trên $K \setminus E$ với E là một tập cực dạng F_σ của ∂K .

1.5. Tập cực

Định nghĩa 1.5.1

- Tập con E của $\square$ được gọi là *tập cực* nếu $I(\mu) = -\infty$ với mọi độ đo Borel hữu hạn $\mu \neq 0$ mà $\text{supp } \mu$ là tập con compact của E .

b. Một tính chất được gọi là đúng *gần khắp nơi* (g.k.n) trên tập con S của Ω nếu nó đúng khắp nơi trên $S \setminus E$ với E là tập cực Borel nào đó.

Tập chỉ có một phần tử là tập cực. Tập con của một tập cực là tập cực. Ngược lại một tập không là tập cực sẽ chứa một tập compact không là tập cực (đó là $\text{supp } \mu$ với μ là một độ đo nào đó với $I(\mu) > -\infty$).

Định lý 1.5.2 Cho μ là độ đo Borel hữu hạn trên Ω với giá compact và giả sử $I(\mu) > -\infty$. Khi đó $\mu(E) = 0$ với mọi tập cực Borel E .

Hệ quả 1.5.3 Mọi tập cực Borel có độ đo Lebesgue bằng 0.

Hệ quả 1.5.4 Hợp đếm được các tập cực Borel là tập cực. Đặc biệt mọi tập con đếm được của Ω là tập cực.

1.6. Toán tử Laplace suy rộng

Định lý 1.6.1 Cho μ là độ đo Borel hữu hạn trên Ω với giá compact. Khi đó

$$\Delta p_\mu = 2\pi\mu$$

Hệ quả 1.6.2 Cho μ_1, μ_2 là các độ đo Borel hữu hạn trên Ω với giá compact. Nếu $p_{\mu_1} = p_{\mu_2} + h$ trên tập mở U , $h \in H(U)$ thì: $\mu_1|_U = \mu_2|_U$.

Định lý 1.6.3 Cho K là tập con compact của Ω không là cực. Khi đó độ đo cân bằng ν của nó là duy nhất và $\text{supp } \nu \subset \partial_e K$.

Hệ quả 1.6.4 Độ đo cân bằng của một đĩa đóng $\bar{\Delta}$ là một độ đo Lebesgue chuẩn tắc trên $\partial\Delta$

1.7. Tập mỏng

Định nghĩa 1.7.1 Cho $S \subset \Omega$ và $\zeta \in \Omega$. Ta nói S không mỏng tại ζ nếu $\zeta \in \overline{S \setminus \{\zeta\}}$ và với mỗi hàm điều hoà dưới u xác định trên một lân cận của ζ ta có:

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in S \setminus \{\zeta\}}} u(z) = u(\zeta)$$

Ngược lại ta nói S là mỏng tại ζ .

Định lý 1.7.2 Tập cực dạng F_σ mỏng tại mọi điểm thuộc Ω .

Định lý 1.7.3 Một tập liên thông chứa nhiều hơn một điểm thì không mỏng tại mọi điểm thuộc bao đóng của nó.

1.8. Hàm Green:

Định nghĩa 1.8.1 Cho D là một miền con thực sự của $\mathbb{C}_\infty$. Một hàm Green của D là một ánh xạ $g_D : D \times D \rightarrow (-\infty, \infty]$ sao cho với mỗi $\omega \in D$:

- (a) $g_D(., \omega)$ điều hòa trên $D \setminus \{\omega\}$, và bị chặn bên ngoài mỗi lân cận của ω
- (b) $g_D(\omega, \omega) = \infty$ và khi $z \rightarrow \omega$,

$$g_D(z, \omega) = \begin{cases} \log|z| + O(1), & \omega = \infty \\ -\log|z - \omega| + O(1), & \omega \neq \infty \end{cases}$$

- (c) $g_D(z, \omega) \rightarrow 0$ khi $z \rightarrow \zeta$, với $\zeta \in \partial D$ gần khắp nơi.

Ví dụ: Nếu $\Delta = B(0, 1)$ thì

$$g_\Delta(z, \omega) := \log \left| \frac{1 - z\bar{\omega}}{z - \omega} \right|$$

là hàm Green của Δ .

Định lý 1.8.2 Cho D là một miền trong của $\mathbb{C}_\infty$, sao cho ∂D không là tập cực, khi đó tồn tại duy nhất một hàm Green g_D của D .

Định lý 1.8.3 Cho D là một miền trong của $\mathbb{C}_\infty$, sao cho ∂D không là tập cực. Khi đó:

$$g_D(z, \omega) > 0 \quad (z, \omega \in D).$$

1.9. Dung lượng :

Định nghĩa 1.9.1 Dung lượng loga của một tập con E của $\mathbb{C}$ được cho bởi:

$$c(E) := \sup_{\mu} e^{I(\mu)}$$

ở đây supremum lấy trên mọi độ đo xác suất Borel μ trên $\mathbb{C}$ với giá của nó là một tập con compact của E . Đặc biệt nếu K là một tập compact với độ đo cân bằng ν , thì

$$c(K) = e^{I(\nu)}$$

ở đây ta hiểu rằng $e^{-\infty} = 0$, rõ ràng $c(E) = 0$ khi E là tập cực. Có nhiều dung lượng khác nhau có tính chất này, nhưng dung lượng loga có thuận lợi trong những liên kết gần gũi đặc biệt với giải tích phức. Vì ta chỉ sẽ nghiên cứu dung lượng loga nên ta gọi ngắn gọn là dung lượng.

Ta bắt đầu bằng cách liệt kê các tính chất sơ cấp của nó.

Định lí 1.9.2

- a) Nếu $E_1 \subset E_2$ thì $c(E_1) \leq c(E_2)$
- b) Nếu $E \subset \square$ thì $c(E) = \sup\{c(K) : K \subset E, K \text{ compact}\}$
- c) Nếu $E \subset \square$ thì $c(\alpha E + \beta) = |\alpha|c(E)$ với mọi $\alpha, \beta \in \square$
- d) Nếu K là một tập con compact của $\square$ thì $c(K) = c(\partial_e K)$.

Định lí 1.9.3

- a) Nếu $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ là các tập con compact của $\square$ và $K = \bigcap_n K_n$ thì:

$$c(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(K_n)$$

- b) Nếu $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ là các tập con Borel của $\square$ và $B = \bigcup_n B_n$ thì:

$$c(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(B_n)$$

Định lí 1.9.4 Cho K là một tập compact không là tập cực và D là thành phần của $\square_\infty \setminus K$ mà chứa ∞ . Khi đó:

$$g_D(z, \infty) = \log|z| - \log c(K) + o(1) \quad \text{khi } z \rightarrow \infty$$

Hệ quả 1.9.5 Nếu $\omega \in \square$ và $r > 0$ thì $c(\overline{B}(\omega, r)) = r$.

Định lí 1.9.6 Cho K là một tập compact và $q(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j$ ở đây $a_d \neq 0$. Khi đó:

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|} \right)^{1/d}.$$

Chương 2: PHÉP NỘI SUY TRONG KHÔNG GIAN L^p

❖ Trước khi đi vào các kết quả chính của chương, ta nêu các khái niệm, kết quả đã biết của không gian L^p

2.1. Một số kết quả đã biết về không gian L^p

Định nghĩa 2.1.1. Cho không gian độ đo (Ω, μ) . Hàm $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ đo được, với mỗi $p \in [1; +\infty]$, ta định nghĩa

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{khi } 1 \leq p < +\infty \\ \inf \left\{ c: |f(x)| \leq c \text{ h.k.n trên } \Omega \right\} & \text{khi } p = +\infty \end{cases}$$

$L^p(\mu)$ là tập hợp các hàm đo được $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\|f\|_p < +\infty$

Mệnh đề 2.1.2

i) Với $f \in L^\infty(\mu)$, ta có $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ hầu khắp nơi trên Ω

ii) Nếu $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in [1; +\infty]$ thì $fg \in L^1(\mu)$ và

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ với } 1 \leq p \leq +\infty \text{ (Bất đẳng thức Holder)}$$

(p, q gọi là liên hiệp với nhau)

Hệ quả 2.1.3.

1. Giả sử $f_i \in L^{p_i}, i = \overline{1, k}$ với $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$. Khi đó

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k \in L^p \text{ và } \|f\|_p \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i}$$

2. Nếu $f \in L^p \cap L^q (1 \leq p < q \leq \infty)$ và $r \in (p, q)$ thì $f \in L^r$ và ta có $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \cdot \|f\|_q^{1-\alpha}$

với $\alpha \in (0; 1)$ thỏa $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

3. Nếu $\mu(X) < \infty$ và $p < q$ thì $L^p \subset L^q$, hơn nữa phép nhúng là liên tục:

$$\|f\|_p \leq [\mu(X)]^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_q$$

Định lý 2.1.4. Với $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ là không gian Banach.

Định lý 2.1.5. Với $1 \leq p < \infty$ thì tập

$$S = \left\{ f : f \text{ là hàm đơn giản, } \mu(\{x : f(x) \neq 0\}) < \infty \right\}, \text{ trù mật trong } L^p(\mu)$$

Định lý 2.1.6. Với $f \in L^p(\mu)$, thì phiếm hàm $g \mapsto \int_{\Omega} fg d\mu$ là tuyến tính, liên tục trên

$L^q(\mu)$ với chuẩn không vượt quá $\|f\|_p$. Hơn nữa, nếu $1 < p < \infty$ phiếm hàm trên có chuẩn $\|f\|_p$, và mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L^q đều có dạng trên.

❖ Nhận xét:

+ Nếu μ là một độ đo đếm được trên tập A , thay vì viết không gian L^p , ta viết là không gian $\ell^p(A)$, hay viết tắt là ℓ^p .

Một phần tử của ℓ^p có thể được xem như là một dãy số phức $x = \{\xi_n\}$ và

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

+ Nếu μ là độ đo Lebesgues trên $\square^k$, ta viết $\ell^p(\square^k)$ thay cho $\ell^p(\mu)$.

2.2. Phép nội suy trong không gian L^p :

❖ Với ánh xạ tuyến tính T , được định nghĩa trên không gian các hàm đo được, và T là toán tử bị chặn trên cả L^1 và L^2 . Dựa vào bất đẳng thức Holder, thì L^p (với $1 \leq p \leq 2$) đều chứa trong không gian tổng $L^1 + L^2$. Từ đây, nảy sinh một câu hỏi là liệu T có bị chặn trên L^p với mỗi p thỏa $1 \leq p \leq 2$. Câu trả lời là có, và đây là một trường hợp đặc biệt của định lý nội suy sau đây, mà kết quả được chứng minh với một chút kết quả của giải tích phức hay lý thuyết thế vị.

Định lý 2.2.1. (Định lý nội suy Riesz – Thorin)

Cho (Ω, μ) và (Σ, ν) là các không gian độ đo và T là ánh xạ tuyến tính từ $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ vào $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$, với $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1; +\infty]$. Nếu

$$T : L^{p_0}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) \text{ với } \|T\| \leq M_0$$

$$T : L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_1}(\nu) \text{ với } \|T\| \leq M_1$$

Thì với mỗi $\theta \in (0; 1)$,

$$T : L^{p_\theta}(\mu) \rightarrow L^{q_\theta}(\nu) \text{ với } \|T\| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^\theta$$

trong đó p_θ, q_θ được cho bởi: $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$

❖ Trước khi chứng minh định lý 2.2.1, ta chứng minh các kết quả sau:

Bổ đề 2.2.2. Cho $S_\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2\gamma} \right\}$, với $\gamma > 0$, và lấy u là hàm điều hòa dưới trên

S_γ , sao cho với một hằng số A nào đó thỏa $A < \infty$ và $\alpha < \gamma$,

$$u(x + iy) \leq Ae^{\alpha|y|}, (x + iy \in S_\gamma)$$

Nếu $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ với mọi $\zeta \in \partial S_\gamma \setminus \{\infty\}$, thì $u \leq 0$ trên S_γ

❖ Nhận xét: với hàm $u(z) = \operatorname{Re}(\cos \gamma z) = \cos \gamma x \cdot \cosh \gamma y$ chỉ ra rằng, kết quả trên không còn đúng nữa khi $\alpha = \gamma$

Chứng minh bổ đề 2.2.2:

Chọn số β thỏa $\alpha < \beta < \gamma$, và định nghĩa $v : S_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ với

$$v(z) = \operatorname{Re}(\cos \beta z) = \cos \beta x \cdot \cosh \beta y, (z = x + iy \in S_\gamma)$$

Ta có v là hàm điều hòa dưới trên S_γ

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) \geq \liminf_{|y| \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right) \cdot \cosh(\beta y) = \infty$$

và

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq \limsup_{|y| \rightarrow \infty} \frac{Ae^{\alpha|y|}}{\cos\frac{\beta\pi}{2\gamma} \cdot \cosh(\beta y)} = 0$$

Theo định lý 1.3.4 ta có $u \leq 0$ trên S_γ .

Bổ đề 2.2.3. (Định lý ba đường thẳng): Cho u là hàm điều hòa dưới trên dải $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ sao cho với một hằng số A nào đó $A < \infty$ và $\alpha < \pi$,

$$u(x + iy) \leq A e^{\alpha|y|} \quad (x + iy \in S)$$

nếu

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq \begin{cases} M_0, & \operatorname{Re} \zeta = 0 \\ M_1, & \operatorname{Re} \zeta = 1 \end{cases}$$

thì

$$u(x + iy) \leq M_0(1 - x) + M_1x \quad (x + iy \in S)$$

Chứng minh:

Xét hàm $\tilde{u} : S \rightarrow [-\infty; \infty)$, với $\tilde{u}(z) = u(z) - \operatorname{Re}(M_0(1 - z) + M_1z)$ ($z \in S$)

Áp dụng bổ đề 2.2.2, với $\gamma = \pi$, ta có $\tilde{u} \leq 0$ trên S ■

Chứng minh định lý 2.2.1:

Cố định $\theta \in (0; 1)$.

Ta xét $p_\theta, q_\theta \in (1, \infty)$; Trước hết ta để ý rằng $L^{q_\theta}(v)$ có thể được định nghĩa như là không

gian đối ngẫu của không gian $L^{p_\theta}(v)$ và các hàm đơn giản: $\sum_{j=1}^k c_j 1_{A_j}$, (c_j là các số phức,

A_j các tập có độ đo hữu hạn rời nhau) trừ mật trong $L^{p_\theta}(\mu)$ và $L^{q_\theta}(v)$

Cho ϕ là hàm đơn giản trên $(\Omega; \mu)$, từ tính đối ngẫu và tính trừ mật, ta có

$$\|T\phi\|_{q_\theta} = \sup \left| \int_{\Sigma} (T\phi)\psi dv \right| \quad (2.2.1-1)$$

Với supremum được lấy trên tất cả các hàm đơn giản ψ trên $(\Sigma; v)$ sao cho $\|\psi\|_{q_\theta} \leq 1$.

Cố định hàm ψ . Gọi $S = \{z \in \square : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ và với $z \in \bar{S}$, ta định nghĩa hàm đơn giản ϕ_z

và ψ_z như sau:

$$\phi_z = \frac{\phi}{|\phi|} \left| \phi \right|^{p_\theta \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \right)}, \quad \psi_z = \frac{\psi}{|\psi|} \left| \psi \right|^{q_\theta \left(\frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1} \right)}$$

và đặt

$$F(z) = \int_{\Sigma} (T\phi_z)\psi_z dv$$

Ta có F là hàm liên tục bị chặn trên $\bar{S}$, chỉnh hình trên S .

Hơn nữa, nếu $\operatorname{Re} \varsigma = 0$ thì theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$|F(\varsigma)| \leq \|T\phi_\varsigma\|_{q_0} \|\psi_\varsigma\|_{q'_0} \leq M_0 \|\phi_\varsigma\|_{p_0} \|\psi_\varsigma\|_{q'_0} \leq M_0 \|\phi\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p_0}}$$

Tương tự, nếu $\operatorname{Re} \varsigma = 1$, ta có:

$$|F(\varsigma)| \leq \|T\phi_\varsigma\|_{q_1} \|\psi_\varsigma\|_{q'_1} \leq M_1 \|\phi_\varsigma\|_{p_1} \|\psi_\varsigma\|_{q'_1} \leq M_1 \|\phi\|_{p_1}^{\frac{p_1}{p_1}}$$

Do đó, theo định lý 3 đường thẳng (bổ đề 2.2.3.), áp dụng với $u = \log |F|$, ta suy ra:

$$|F(\theta)| \leq \left(M_0 \|\phi\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p_0}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|\phi\|_{p_1}^{\frac{p_1}{p_1}} \right)^\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|\phi\|_{p_\theta}$$

Từ định nghĩa của hàm F , ta thấy:

$$\left| \int_{\Sigma} (T\phi) \psi dv \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|\phi\|_{p_\theta}$$

Do biểu thức trên đúng với mọi hàm đơn giản ψ , do đó theo (2.2.1-1) ta có:

$$\|T\phi\|_{q_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|\phi\|_{p_\theta} \quad (2.2.1-2)$$

Bây giờ để hoàn thành chứng minh, ta cần chứng tỏ (2.2.1-2) không chỉ đúng với hàm đơn giản ϕ , mà đúng với mọi hàm $f \in L^{p_0}(\mu)$.

Với mọi hàm $f \in L^{p_0}(\mu)$, luôn tồn tại dãy hàm đơn giản $(\phi_n) \in (\Omega; \mu)$ sao cho:

$$\|\phi_n - f\|_{p_0} \rightarrow 0$$

Từ (2.2.1-2), ta có $(T\phi_n)$ là dãy Cauchy, do đó dãy $(T\phi_n)$ hội tụ trong không gian Banach $L^{q_\theta}(\nu)$ đến một hàm g thỏa:

$$\|g\|_{q_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{p_0}$$

Ta chứng tỏ rằng, $Tf = g$ (2.2.1-3)

Rõ ràng, (2.2.1-3) đúng nếu $p_\theta = p_0$ hoặc $p_\theta = p_1$, do T liên tục.

Giả sử $p_0 < p_\theta < p_1$, lấy $\{\varepsilon_n\}$ là dãy số dương, và đặt

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : |\phi_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon_n \right\}$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev's. ta có

$$\mu(A_n) \leq \left(\frac{\|\phi_n - f\|_{p_0}}{\varepsilon_n} \right)^{p_0}$$

và từ bất đẳng thức Holder,

$$\left\| (\phi_n - f) 1_{A_n} \right\|_{p_0}^{p_0} \leq \frac{\left\| \phi_n - f \right\|_{p_0}^{p_0}}{\varepsilon_n^{p_0 - p_0}} \quad (2.2.1-4)$$

Mặt khác, trên $\Omega \setminus A_n$, ta có $\varepsilon_n^{-1} |\phi_n - f| \leq 1$, do đó:

$$\left\| \varepsilon_n^{-1} (\phi_n - f) 1_{\Omega \setminus A_n} \right\|_{p_1}^{p_1} \leq \left\| \varepsilon_n^{-1} (\phi_n - f) 1_{\Omega \setminus A_n} \right\|_{p_0}^{p_0}$$

và do đó:

$$\left\| (\phi_n - f) 1_{\Omega \setminus A_n} \right\|_{p_1} \leq \varepsilon_n^{1 - \frac{p_0}{p_1}} \left\| \phi_n - f \right\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p_1}} \quad (2.2.1-5)$$

(Ở đây ta giả sử rằng $p_1 < \infty$, nhưng bất đẳng thức cuối thì vẫn đúng với $p_1 = \infty$)

Khi $\varepsilon_n \rightarrow 0$ thì vế phải của (2.2.1-4) tiến về 0, và (2.2.1-5) cũng tiến về 0 với điều kiện là $\varepsilon_n \rightarrow 0$ đủ chậm. Với dãy (ε_n) , được chọn như trên, do T liên tục trên $L^{p_0}(\mu)$ và $L^{p_1}(\mu)$ nên $T((\phi_n - f) 1_{A_n}) \rightarrow 0$ trong $L^{q_0}(\nu)$ và $T((\phi_n - f) 1_{\Omega \setminus A_n}) \rightarrow 0$ trong $L^{q_1}(\nu)$. Nói riêng, cả hai dãy tiến về 0 theo độ đo, và kết hợp với nhau, ta suy ra rằng $T\phi_n \rightarrow Tf$ theo độ đo. Mặt khác, ta đã có $T\phi_n \rightarrow g$ trong $L^{q_0}(\mu)$, nên ta suy ra $Tf = g$.

Để hoàn thành chứng minh, ta xét các trường hợp còn lại của p_0, q_0 .

+ Giả sử $1 < p_0 < \infty$, và $q_0 = 1$ hoặc $q_0 = \infty$, do đó $q_0 = q_0 = q_1$. Khi đó ta không cần kiểm tra các giá trị khác nhau của q nữa, và do đó ta lặp lại chứng minh trên với hàm F được định nghĩa:

$$F(z) = \Psi(T\phi_z)$$

với Ψ là một hàm tuyến tính cô định trên $L^{q_0}(\nu)$ có chuẩn 1.

+ Với $p_0 = 1$ hoặc $p_0 = \infty$, ta có $p_0 = p_0 = p_1$. Lấy $f \in L^{p_0}(\mu)$, ta có:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{q_0} &= \left\| |Tf|^{1-\theta} \cdot |Tf|^\theta \right\|_{q_0} \\ &\leq \|Tf\|_{q_0}^{1-\theta} \|Tf\|_{q_1}^\theta \\ &\leq \left(M_0^{1-\theta} \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \right) \left(M_1^\theta \|f\|_{p_1}^\theta \right) \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{p_0} \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn



Bây giờ ta chỉ ra hai ứng dụng đơn giản của định lý.

❖ Ứng dụng thứ nhất là về chuỗi Fourier. Cho T là đường tròn đơn vị, không gian độ đo được chuẩn hóa thành độ đo Lebesgue $\frac{d\theta}{2\pi}$

Định nghĩa 2.2.4: Với mỗi $f \in L^p(T)$, biến đổi Fourier của f được định nghĩa:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Hệ quả 2.2.5: (Định lý Hausdorff – Young)

Nếu $f \in L^p(T)$, với $1 \leq p \leq 2$, thì dãy $(\hat{f}(n)) \subset \ell^{p'}(\mathbb{Z})$, với p' liên hiệp với p , và

$$\|\hat{f}(n)\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

Chứng minh:

Ta có

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| |e^{-in\theta}| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta = \|f\|_1$$

Suy ra :

$$\|\hat{f}(n)\|_{\infty} \leq \|f\|_1$$

Mặt khác nếu $f \in L^2(T)$, thì theo bất đẳng thức **Bessel**, ta có:

$$\|\hat{f}(n)\|_2 \leq \|f\|_2$$

Áp dụng định lý Riesz – Thorin 2.2.1 với ánh xạ: $T : f \mapsto \hat{f}(n)$, ta suy ra điều phải chứng minh. ■

❖ Ứng dụng thứ 2 là tích chập (convolutions). Ta sử dụng định nghĩa sau của tích chập:

Định nghĩa 2.2.6: Nếu $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, thì tích chập của f và g là:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

khi tích phân này tồn tại.

Hệ quả 2.2.7: (Bất đẳng thức Young)

Nếu $f \in L^p(\mathbb{R})$ và $g \in L^q(\mathbb{R})$, với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, thì $f * g \in L^r(\mathbb{R})$, với $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, và

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Chứng minh:

Có định $p \in [1; \infty]$ và $f \in L^p(\mathbb{R})$, gọi p' liên hợp với p

Nếu $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$|f * g(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Do đó $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ và

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Nếu $g \in L^1(\mathbb{R})$, theo bất đẳng thức Holder

$$|f * g(x)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\Rightarrow |f * g(x)|^p \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \right)^{\frac{p}{p'}}$$

Lấy tích phân theo x ta có:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Áp dụng định lý Riesz – Thorin 2.2.1 với ánh xạ tuyến tính: $T: f \mapsto f * g$, ta suy ra điều phải chứng minh. ■

Chương 3: XẤP XỈ ĐỀU

❖ Cho K là tập con compact của $\mathbb{C}$, và $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm liên tục. Một bài toán tổng quát trong lý thuyết xấp xỉ là xác định xem liệu với một lớp $\mathcal{C}$ các hàm liên tục trên K , có thể tìm được một dãy hàm liên tục $(f_n) \subset \mathcal{C}$ sao cho f_n hội tụ đều về f trên K không? . Định lý Stone – Weierstrass chỉ ra rằng, câu trả lời là có nếu $\mathcal{C}$ một đại số tự liên hợp và tách các điểm .

Tuy nhiên còn có nhiều trường hợp thú vị khác, mà ở đây $\mathcal{C}$ có thể không tự liên hợp, hoặc không là một đại số. Ta sẽ xem xét một trong các trường hợp này.

Trước hết ta xem xét điều gì sẽ xảy ra khi lớp xấp xỉ $\mathcal{C}$ là một đại số các đa thức. Chú ý, lúc này lớp $\mathcal{C}$ không tự liên hợp.

Trước khi trình bày kết quả phần này, ta đưa ra một vài khái niệm liên quan

Định nghĩa 3. 1. Giả sử K là tập con compact của $\mathbb{C}$ và $n \geq 2$,

$$\delta_n(K) := \sup \left\{ \prod_{j,k: j < k} |\omega_j - \omega_k|^{2/n(n-1)} : \omega_1, \dots, \omega_n \in K \right\}$$

và $\delta_n(K)$ được gọi là n - đường kính của K .

Một bộ n phần tử $\omega_1, \dots, \omega_n \in K$ mà $\sup \left\{ \prod_{j,k: j < k} |\omega_j - \omega_k|^{2/n(n-1)} : \omega_1, \dots, \omega_n \in K \right\}$ đạt được tại đó

được gọi là bộ n điểm Fekete của K .

Khi K là tập compact, một bộ n điểm Fekete của K luôn luôn tồn tại, mặc dù không duy nhất. Nguyên lý cực đại chỉ ra sự thực nó phải nằm trên $\partial_e K$.

Định lý 3.2. (định lý Fekete – Szego) Giả sử K là tập compact con của $\mathbb{C}$. Khi đó dãy $(\delta_n(K))_{n \geq 2}$ là dãy giảm và:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(K) = c(K)$$

Chứng minh:

Để đơn giản những ký hiệu, trong chứng minh này ta sẽ viết δ_n thay cho $\delta_n(K)$. Chúng ta bắt đầu bằng việc chỉ ra rằng dãy $(\delta_n)_{n \geq 2}$ là dãy giảm. Lấy $n \geq 2$ và chọn $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1} \in K$ thỏa:

$$\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} |\omega_j - \omega_k|$$

Khi đó vì $\omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ là một bộ n điểm trong K ,

$$\delta_n^{n(n-1)/2} \geq \prod_{2 \leq j < k \leq n+1} |\omega_j - \omega_k|$$

Có tất cả $n+1$ bất đẳng thức như thế, bất đẳng thức thứ m có được bằng việc bỏ đi những số hạng có chứa ω_m . Nhân các bất đẳng thức này với nhau đưa đến:

$$\left(\delta_n^{n(n-1)/2} \right)^{n+1} \geq \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} |\omega_j - \omega_k|^{n-1} = \left(\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} \right)^{n-1}$$

Do đó $\delta_n \geq \delta_{n+1}$.

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng $\delta_n \geq c(K)$ với mọi $n \geq 2$. Nếu $z_1, z_2, \dots, z_n \in K$ thì:

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \log |z_j - z_k| \leq \log \delta_n$$

Lấy tích phân bất đẳng thức này với chú ý tới $dv(z_1) \dots dv(z_n)$, ở đây v là một độ đo cân bằng của K , ta có được:

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int_K \int_K \log |z_j - z_k| dv(z_j) dv(z_k) \leq \log \delta_n$$

Do đó $I(v) \leq \log \delta_n$ dẫn đến $c(K) \leq \delta_n$, như đòi hỏi.

Cuối cùng, ta chỉ ra rằng $\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq c(K)$. Lấy $\varepsilon > 0$ và xét:

$$K^\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) \leq \varepsilon\}$$

Lấy $n \geq 2$ và chọn $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in K$ sao cho

$$\delta_n^{n(n-1)/2} = \prod_{j < k} |\omega_j - \omega_k|$$

Với mỗi j , lấy μ_j là độ đo *Lebesgue* chuẩn tắc trên đường tròn $\partial B(\omega_j, \varepsilon)$, và đặt

$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_j$. Khi đó $I(\mu)$ được cho bởi:

$$I(\mu) = \frac{1}{n^2} \sum_j \iint \log|z - \omega| d\mu_j(z) d\mu_j(\omega) + \frac{2}{n^2} \sum_{j < k} \iint \log|z - \omega| d\mu_j(z) d\mu_k(\omega)$$

Bây giờ với mỗi j , theo 1.6.4 và hệ quả 1.9.5

$$\iint \log|z - \omega| d\mu_j(z) d\mu_j(\omega) = I(\mu_j) = \log \varepsilon$$

Hơn nữa với mọi cặp $j < k$, vì p_{μ_j} là điều hòa dưới

$$\iint \log|z - \omega| d\mu_j(z) d\mu_k(\omega) = \int p_{\mu_j}(\omega) d\mu_k(\omega) \geq p_{\mu_j}(\omega_k)$$

Vì $\log|z - \omega_k|$ là điều hòa dưới có

$$p_{\mu_j}(\omega_k) = \int \log|z - \omega_k| d\mu_j(z) \geq \log|\omega_j - \omega_k|$$

Do đó

$$I(\mu) \geq \frac{1}{n^2} \sum_j \log \varepsilon + \frac{2}{n^2} \sum_{j < k} \log|\omega_j - \omega_k| = \frac{1}{n} \log \varepsilon + \frac{n-1}{n} \log \delta_n$$

Vì μ có giá trên K^ε , ta có:

$$c(K^\varepsilon) \geq \varepsilon^{1/n} \delta_n(K)^{(n-1)/n}$$

Do đó $\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq c(K^\varepsilon)$ và vì ε tùy ý kết quả có được do áp dụng định lý 1.9.3 (a).

■

❖ Nhiều kết quả quan trọng suy ra từ Định lý này bằng cách kết nối nó với sự xấp xỉ đa thức.

Vì nhiều lý do, người ta quan tâm đến việc tìm các đa thức $q(z)$ có hệ số số hạng bậc cao nhất bằng 1 mà với nó chuẩn sup trên K

$$\|q\|_K := \sup\{|q(z)| : z \in K\}$$

tương đối nhỏ. Bây giờ ta xem xét một lớp đa thức như thế.

Định nghĩa 3.3. Giả sử K là tập con compact của $\mathbb{C}$ và $n \geq 2$. Một *đa thức Fekete bậc n* của K là một đa thức có dạng:

$$q(z) = \prod_{j=1}^n (z - \omega_j),$$

ở đây $\omega_1, \dots, \omega_n$ là một bộ n -điểm Fekete của K .

Định lý 3.4. Giả sử K là tập compact con của $\mathbb{C}$.

(a) Nếu q là một đa thức bậc $n \geq 1$ có hệ số của số hạng bậc cao nhất bằng 1 thì

$$\|q\|_K^{1/n} \geq c(K)$$

(b) Nếu q là một đa thức Fekete có bậc $n \geq 2$ thì $\|q\|_K^{1/n} \leq \delta_n(K)$.

Chứng minh

(a) Vì $K \subset q^{-1}(\overline{B}(0, \|q\|_K))$ từ định lí 1.9.6 có:

$$c(K) \leq c(\overline{B}(0, \|q\|_K))^{1/n} = \|q\|_K^{1/n}$$

(b) Giả sử rằng $q(z) = \prod_{i=1}^n (z - \omega_i)$, ở đây $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ là một bộ n điểm Fekete của K . Nếu $z \in K$ thì $z, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ là một bộ $n+1$ điểm trong K , nên

$$\prod_{i=1}^n |z - \omega_i| \prod_{j < k} |\omega_j - \omega_k| \leq \delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2}$$

và do đó:

$$|q(z)| \leq \frac{\delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2}}{\delta_n(K)^{n(n-1)/2}} \leq \frac{\delta_n(K)^{n(n+1)/2}}{\delta_n(K)^{n(n-1)/2}} = \delta_n(K)^n$$

Vì z là một điểm bất kỳ của K , dẫn đến kết quả cần chứng minh. ■

❖ Hiểu biết về $\|q\|_K$ cũng cho chúng ta thông tin về q trên miền bên ngoài K . Nếu D là một thành phần bị chặn của $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ thì $|q(z)| \leq \|q\|_K$ với mọi $z \in D$ theo nguyên lý cực đại. Điều gì xảy ra khi D là thành phần liên thông không bị chặn? Điều này được thể hiện trong kết quả sau

Định lí 3.5. (Bổ đề Bernstein) Cho K là tập con compact của $\mathbb{C}_\infty$ không là tập cực và D là thành phần của $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ chứa ∞ .

(a) Nếu q là một đa thức bậc $n \geq 1$ thì:

$$\left(\frac{|q(z)|}{\|q\|_K} \right)^{1/n} \leq e^{g_D(z, \infty)} \quad (z \in D \setminus \{\infty\}),$$

ở đây g_D là hàm Green của D .

(b) Nếu q là đa thức Fekete của K bậc $n \geq 2$ thì:

$$\left(\frac{|q(z)|}{\|q\|_K} \right)^{1/n} \geq e^{g_D(z, \infty)} \left(\frac{c(K)}{\delta_n(K)} \right)^{\tau_D(z, \infty)} \quad (z \in D \setminus \{\infty\})$$

ở đây τ_D là khoảng cách Harnack của D .

Chứng minh

(a) Nhân q với một hằng số, ta có thể giả sử rằng nó có hệ số của số hạng có bậc cao nhất bằng 1. Do K không là tập cực nên tồn tại hàm Green trên D . Nếu ta định nghĩa

$$u(z) = \frac{1}{n} \log |q(z)| - \frac{1}{n} \log \|q\|_K - g_D(z, \infty) \quad (z \in D \setminus \{\infty\})$$

thì u là hàm điều hòa dưới trên $D \setminus \{\infty\}$.

Hơn nữa, do $q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ nên

$$\log |q(z)| = \log |z^n| + \log \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| = n \log |z| + o(1)$$

Và theo định lý 1.9.4

$$g_D(z; \infty) = \log |z| - \log c(K) + o(1)$$

Suy ra

$$u(z) = \log |z| - \frac{1}{n} \log \|q\|_K - \log |z| + \log c(K) + o(1) \text{ khi } z \rightarrow \infty.$$

Do đó nếu đặt

$$u(\infty) = \log c(K) - \frac{1}{n} \log \|q\|_K$$

dẫn đến u điều hòa dưới trên D . Bây giờ vì $\partial D \subset K$, ta có:

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq \frac{1}{n} \log |q(\zeta)| - \frac{1}{n} \log \|q\|_K \leq 0 \quad (\zeta \in \partial D)$$

Do đó theo nguyên lý cực đại $u \leq 0$ trên D . Điều này suy ra kết quả.

(b) Nếu q là một đa thức Fekete, thì đặc biệt tất cả các không điểm nằm trong K , và do đó u điều hòa trên D . Hơn nữa từ ý (a), $u \leq 0$ trên D nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Harnack (xem định nghĩa 1.2.1) cho $-u$ có được:

$$u(z) \geq \tau_D(z, \infty) u(\infty) \quad (z \in D)$$

Bây giờ theo Định lý 3.4 (b),

$$u(\infty) = \log c(K) - \frac{1}{n} \log \|q\|_K \geq \log c(K) - \log \delta_n(K).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức sau cùng này lại cho ta kết quả yêu cầu. ■

❖ Bây giờ ta bắt đầu trình bày kết quả mạnh hơn kết quả gốc của Runge. Trước tiên ta giới thiệu kí hiệu sau:

Cho $n \geq 1$, K là tập compact trong $\mathbb{C}$, ta đặt

$$d_n(f, K) = \inf \{ \|f - p\|_K : p \text{ là đa thức có bậc không quá } n \}$$

Định lý 3.6. (Định lý Bernstein-Walsh)

Cho K là tập compact trong $\mathbb{C}$ sao cho $\mathbb{C} \setminus K$ là tập liên thông. Nếu f là hàm chỉnh hình trên một lân cận mở U của K , thì ta có kết quả

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(f, K)^{\frac{1}{n}} \leq \theta < 1 \quad (3.6-1)$$

ở đây

$$\theta = \begin{cases} \sup_{C_\infty \setminus U} e^{-g_{C_\infty \setminus K}(z, \infty)} & \text{nếu } c(K) > 0 \\ 0 & \text{nếu } c(K) = 0 \end{cases} \quad (3.6-2)$$

Chứng minh:

+ Giả sử $c(K) > 0$. Lấy Γ là chu tuyến đóng trong $U \setminus K$ mà uốn một vòng quanh mỗi điểm của K và không bao quanh mỗi điểm của $C \setminus U$

Với $n \geq 2$, gọi q_n là đa thức Fekete bậc n trên K , và ta định nghĩa

$$p_n(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{q_n(z)} \frac{q_n(\omega) - q_n(z)}{\omega - z} dz$$

Do $\frac{q_n(\omega) - q_n(z)}{\omega - z}$ là đa thức bậc cao nhất là $n-1$ theo ω , nên p_n là đa thức có bậc không

quá $n-1$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy với hàm f và thực hiện phép trừ ta có:

$$f(\omega) - p_n(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \omega} \frac{q_n(\omega)}{q_n(z)} dz \quad (\omega \in K) \quad (3.6-3)$$

Cho nên,

$$d_n(f, K) \leq \|f - p_n\|_K \leq C \cdot \frac{\sup_K |q_n|}{\inf_{\Gamma} |q_n|}$$

ở đây C là hằng số độc lập với n . Theo định lý 3.5 (b), ta được

$$\left(\frac{\sup_K |q_n|}{\inf_\Gamma |q_n|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \left(\frac{\delta_n(K)}{c(K)} \right)^\beta$$

ở đây, $\alpha = \sup_\Gamma e^{-g_{\square_\infty \setminus K}(z, \infty)}$ và $\beta = \sup_\Gamma \tau_{\square_\infty \setminus K}(z, \infty)$

Do đó

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(f, K)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} C^n \alpha \left(\frac{\delta_n(K)}{c(K)} \right)^\beta = \alpha$$

Cuối cùng, vì Γ được chọn nằm ngoài mọi tập con compact cho trước của U , ta có làm cho α xấp xỉ với số θ trong định nghĩa (3.6-2) như chúng ta mong muốn. Từ đó ta có (3.6-1).

+ Với $c(K) = 0$. Lấy họ các tập $(K_k)_{k \geq 1}$ là một dãy giảm các tập con compact không là tập

cực của U , với các phần bù của chúng liên thông, thỏa $K_k \downarrow K$. Thật vậy, ta luôn lấy được

dãy như thế, chẳng hạn ta xác định $K_k = \left\{ z : \text{dist}(z, K) \leq \frac{1}{k}, k > 1 \right\}$. Do $(K_k)_{k \geq 1}$ là dãy giảm

các tập compact không là tập cực của U , nên $c(K_k) > 0$ với mọi $k \geq 1$ và

$$c(K_k) \rightarrow c(K) = 0$$

Nếu θ_k được định nghĩa tương tự (3.6-2), thì theo chứng minh trên ta có:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(f, K)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(f, K_k)^{\frac{1}{n}} \leq \theta_k$$

Để hoàn thành chứng minh ta cần chỉ ra $\theta_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$.

Ta định nghĩa,

$$h_k(z) = \begin{cases} g_{C_\infty \setminus K_k}(z, \infty) - g_{C_\infty \setminus K_1}(z, \infty) & \text{khi } z \in \square \setminus K_1 \\ \log c(K_1) - \log c(K_k) & \text{khi } z = \infty \end{cases}$$

khi đó $(h_k)_{k \geq 1}$ là dãy tăng các hàm điều hòa trên $\square_\infty \setminus K_1$, theo định lý Harnack, khi đó

$h_k \rightarrow \infty$ hội tụ đều địa phương hoặc $h_k \rightarrow h$ đều địa phương với h là hàm điều hòa trên

$\square_\infty \setminus K_1$. Mà do $h_k(\infty) = \log c(K_1) - \log c(K_k) \rightarrow \infty$, khi $k \rightarrow \infty$, vì thế, $h_k \rightarrow \infty$ hội tụ

đều địa phương trên $\square_\infty \setminus K_1$. Do đó $g_{\square_\infty \setminus K_k}(z, \infty) \rightarrow \infty$ đều trên $\square_\infty \setminus U$. Từ đó, $\theta_k \rightarrow 0$

khi $k \rightarrow \infty$.

■

Chú ý rằng, nếu $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ là không điểm của q_n trong chứng minh trên, thì $p_n(\omega_j) = f(\omega_j)$ với mỗi j , do đó p_n chính xác là đa thức có bậc $\leq n-1$, và là đa thức nội suy f tại $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Thậm chí nếu ta không nhận ra điều này, ta vẫn có thể chỉ ra rằng $\|f - p_n\|_K \rightarrow 0$ như sau.

Nếu p_n là đa thức khác có bậc $\leq n-1$, thì

$$\|p_n - p\|_K \leq \sum_{j=1}^n |p_n(\omega_j) - p(\omega_j)| = \sum_{j=1}^n |f(\omega_j) - p(\omega_j)| \leq n \|f - p\|_K$$

Khi đó,

$$\|f - p_n\|_K \leq \|f - p\|_K + \|p - p_n\|_K \leq (n+1) \|f - p\|_K$$

Lấy infimum hai vế theo p , chúng ta được

$$\|f - p_n\|_K \leq (n+1) d_n(f, K).$$

Theo định lý 3.6, dãy $d_n(f, K)$ hội tụ về 0 đủ nhanh để đảm bảo rằng

$$\|f - p_n\|_K \rightarrow 0.$$

Định lý Runge ban đầu đã không đủ mạnh để chỉ ra điều này. Điều này nảy sinh một câu hỏi tự nhiên là định lý 3.6 có đưa ra một tốc độ hội tụ tốt nhất về sự dần về 0 của $d_n(f, K)$?

Điều ngược lại sau đây chỉ ra điều đó.

Định lý 3.7. Cho K là tập compact trong $\mathbb{C}$ sao cho $\mathbb{C} \setminus K$ là tập liên thông, và giả định rằng K là tập không mỏng tại mỗi điểm của K . Nếu $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm liên tục thỏa (3.6-1) với θ nào đó mà $\theta < 1$, thì f có mở rộng chỉnh hình trên một lân cận mở U của K sao cho (3.6-2) thỏa mãn.

Chứng minh:

Ta có K không mỏng tại mỗi điểm thuộc nó, nên ta có $c(K) > 0$ và $g_{\mathbb{C} \setminus K}(z, \infty)$ hội tụ về 0 tại mỗi điểm thuộc ∂K . Do đó, ta có thể mở rộng $g_{\mathbb{C} \setminus K}(z, \infty)$ liên tục trên $\mathbb{C}_\infty$, bằng cách đồng nhất nó bằng 0 trên K . Đặt

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C}_\infty : e^{g_{\mathbb{C} \setminus K}(z, \infty)} < \frac{1}{\theta} \right\}$$

Do đó U là một lân cận mở của K sao cho (3.6-2) thỏa mãn.

Theo giả thiết (3.6-1), thì tồn tại dãy đa thức (p_n) , với $\deg p_n \leq n, \forall n$, sao cho

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \theta$$

Ta sẽ chứng minh rằng (p_n) hội tụ đều địa phương trên U . Nếu được vậy, thì giới hạn là một hàm chỉnh hình trên U , phù hợp với f trên K , và định lý được chứng minh.

Lấy L là một tập con compact của U . Theo định lý 3.5 (a),

$$\left(\frac{|(p_n - p_{n-1})(z)|}{\|p_n - p_{n-1}\|_K} \right)^{\frac{1}{n}} \leq e^{g_{\square \setminus K}(z, \infty)} \text{ với } z \in \square \setminus K \text{ và } z \neq \infty.$$

Lấy supremum 2 vế trên L ta suy ra:

$$\|p_n - p_{n-1}\|_L \leq \gamma^n \|p_n - p_{n-1}\|_K$$

ở đây

$$\gamma = \sup_L e^{g_{\square \setminus K}(z, \infty)} < \frac{1}{\theta}$$

Do đó

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|p_n - p_{n-1}\|_L^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma \|p_n - p_{n-1}\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \gamma \theta < 1$$

Từ đó suy ra, $\sum_1^n (p_n - p_{n-1})$ hội tụ đều trên L , hay dãy (p_n) hội tụ đều trên L . Suy ra điều cần chứng minh. ■

Bây giờ ta lại quay lại một kết quả chính nữa của phần này.

Định lý 3.8. (Định lý Keldysh)

Cho K là tập con compact của $\square$, sao cho $\square \setminus K$ là không mỏng tại mọi điểm của ∂K . Lấy Λ là tập con của $\square \setminus K$ mà nó chứa ít nhất một phần tử của mỗi thành phần bị chặn của $\square \setminus K$. Khi đó mỗi hàm liên tục $\phi: \partial K \rightarrow \square$ có thể xấp xỉ đều trên ∂K với một hàm có dạng

$$\operatorname{Re} q(z) + a \log |r(z)| \quad (3.8-1)$$

với $a \in \mathbb{R}$, và q, r là các hàm hữu tỉ sao cho cực của q ; cực và không điểm của r đều thuộc $\Lambda \cup \infty$.

❖ Trước khi chứng minh định lý Keldysh, ta có vài nhận xét sau:

+ Thứ nhất, lớp $\mathcal{C}$ các hàm liên tục dạng (3.8-1) là không gian vectơ, không phải là đại số, vì thế, một lần nữa định lý Stone-Weierstrass không áp dụng được.

+ Thứ hai, số hạng logarit trong (3.8-1) là rất cần thiết. Để thấy điều này, ta lấy K là hình vành khăn $\{z: 1 \leq |z| \leq 2\}$. Nếu $\phi = \operatorname{Re} q$, với q là đa thức hữu tỉ với cực không thuộc K , thì theo định lý Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(2e^{i\theta}) - \phi(e^{i\theta})) d\theta = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{q(z)}{z} dz = 0$$

Và từ đó, ta cũng có kết quả tương tự, với ϕ là giới hạn của các hàm như vậy trên ∂K . Mặt khác, tích phân này không triệt tiêu với mọi hàm liên tục trên ∂K .

+ Thứ ba, định lý 3.8 không còn đúng nếu không có điều kiện $\square \setminus K$ không mỏng. Tuy nhiên điều kiện này sẽ thỏa mãn nếu $\square \setminus K$ chỉ có hữu hạn các thành phần, vì mọi điểm của ∂K thuộc vào bao đóng của một trong các thành phần này, và theo định lý 1.7.3, một tập liên thông khác một điểm thì không mỏng tại mỗi điểm thuộc bao đóng của nó.

Đặc biệt, điều này là đúng nếu $\square \setminus K$ liên thông, và trong trường hợp này, ta cũng có thể lấy Λ là tập rỗng, q là đa thức và r là hằng số. Lúc đó định lý 3.8 được viết lại như sau.

Hệ quả 3.9. (Định lý Walsh-Lebesgue) Lấy K là tập con compact của $\square$ sao cho $\square \setminus K$ là tập liên thông. Thì với mọi hàm liên tục $\phi: \partial K \rightarrow \square$ có thể xấp xỉ đều trên K bởi một hàm có dạng $\operatorname{Re} q$, với q là một đa thức.

Bây giờ ta quay lại với chứng minh của định lý 3.8, trước tiên ta xét bổ đề:

Bổ đề 3.10. Lấy K thỏa mãn các giả thiết như trong định lý 3.8, Nếu $\omega \in \operatorname{int}(K)$, thì tồn tại một độ đo xác suất Borel ω trên ∂K sao cho:

$$\log|z - \omega| = \int_{\partial K} \log|z - \zeta| d\omega(\zeta).$$

Chứng minh:

Gọi H là không gian các hàm liên tục $h: \partial K \rightarrow \square$, mà các hàm này có mở rộng là các hàm điều hòa trên lân cận của K .

Với $h \in H$, định nghĩa $\varepsilon(h)$ là giá trị mở rộng của h tại ω . Nguyên lý cực đại, đảm bảo rằng định nghĩa hợp lý, và $|\varepsilon(h)| \leq \|h\|_{\partial K}$.

Theo định lý Hahn-Banach, ε có mở rộng thành phiếm hàm tuyến tính trên cả không gian các hàm liên tục $C(\partial K)$, thỏa mãn $|\varepsilon(f)| \leq \|f\|_{\partial K}$ với mọi $f \in C(\partial K)$. Rõ ràng là, $\varepsilon(1) = 1$. Với $f \geq 0$, thì

$$\|f\|_{\partial K} - \varepsilon(f) = \varepsilon(\|f\|_{\partial K} 1 - f) \leq \|\|f\|_{\partial K} 1 - f\|_{\partial K} \leq \|f\|_{\partial K}$$

Do đó $\varepsilon(f) \geq 0$. Vì vậy theo định lý phân tích Riesz, có một độ đo xác suất ω trên ∂K sao cho

$$\varepsilon(f) = \int_{\partial K} f d\omega \quad (f \in C(\partial K))$$

Bây giờ, nếu $z \in \mathbb{C} \setminus K$ và $h(\zeta) = \log|z - \zeta|$, thì $h \in H$ và $\varepsilon(h) = \log|z - \omega|$

Từ đó ta có,

$$\log|z - \omega| = \int_{\partial K} \log|z - \zeta| d\omega(\zeta) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus K)$$

Cuối cùng, từ cả 2 vế của phương trình trên đều là hàm nửa liên tục dưới của z , và do $\mathbb{C} \setminus K$ không mỏng tại mỗi điểm thuộc ∂K , do đó, có một phương trình tương tự trên đúng với mọi $z \in \partial K$. ■

Ta *chứng minh định lý 3.8*:

Ta sẽ sử dụng tính đối ngẫu. Theo định lý Hahn-Banach, ta chỉ cần chứng minh mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $C(\partial K)$, mà chúng triệt tiêu trên tất cả các hàm có dạng (3.8-1), phải là hàm đồng nhất không.

Ta có, với mỗi hàm tuyến tính liên tục trên $C(\partial K)$, có thể được biểu thị như là hiệu của 2 hàm tuyến tính dương, mà mỗi hàm trong 2 hàm đó, theo định lý phân tích Riesz được đưa ra bởi một độ đo Borel hữu hạn trên ∂K . Do đó điều chúng ta cần chứng minh như sau: Nếu μ_1, μ_2 là 2 độ đo hữu hạn trên ∂K , sao cho

$$\int_{\partial K} (\operatorname{Re} q) d\mu_1 = \int_{\partial K} (\operatorname{Re} q) d\mu_2 \quad (3.8-2)$$

với mọi hàm hữu tỉ q với cực thuộc $\Lambda \cup \infty$, và

$$\int_{\partial K} \log|r| d\mu_1 = \int_{\partial K} \log|r| d\mu_2 \quad (3.8-3)$$

Với mọi hàm hữu tỉ r với cực và không điểm thuộc $\Lambda \cup \infty$, thì $\mu_1 = \mu_2$

Thật vậy, giả sử rằng μ_1, μ_2 thỏa (3.8-2) và (3.8-3). Nếu $|\omega| > \sup_K |\zeta|$, thì

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_1(\zeta) \\ &= \int_{\partial K} \log \left| 1 - \frac{\zeta}{\omega} \right| du_1(\zeta) + \int_{\partial K} \log |\omega| du_1(\zeta) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\partial K} \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta^k}{\omega^k} \right) du_1(\zeta) + \log |\omega| \int_{\partial K} 1 du_1(\zeta) \end{aligned}$$

Và ta cũng có hệ thức tương tự đối với μ_2 . Do vậy, theo (3.8-2), ta có

$$\int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_1(\zeta) = \int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_2(\zeta) \quad \left(|\omega| > \sup_K |\zeta| \right)$$

Đồng thời, nếu $\lambda \in \Lambda$ và $|\omega - \lambda| < \operatorname{dist}(\lambda, K)$, thì

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_1(\zeta) &= \int_{\partial K} \log \left| 1 - \frac{\omega - \lambda}{\zeta - \lambda} \right| du_1(\zeta) + \int_{\partial K} \log |\zeta - \lambda| du_1(\zeta) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\partial K} \operatorname{Re} \left(\frac{(\omega - \lambda)^k}{(\zeta - \lambda)^k} \right) du_1(\zeta) + \int_{\partial K} \log |\zeta - \lambda| du_1(\zeta) \end{aligned}$$

Ta cũng có kết quả tương tự với μ_2 , và theo (3.8-2) và (3.8-3), ta có

$$\int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_1(\zeta) = \int_{\partial K} \log |\omega - \zeta| du_2(\zeta) \quad (|\omega - \lambda| < \operatorname{dist}(\lambda, K))$$

Suy ra: thế vị của μ_1 và μ_2 bằng nhau ($p_{\mu_1} = p_{\mu_2}$) trên mỗi tập con mở của mỗi thành phần của $C \setminus K$. Khi cả hai là hàm điều hòa trên $C \setminus K$ thì theo nguyên lý đồng nhất (1.1.4), thì $p_{\mu_1} = p_{\mu_2}$ trên $C \setminus K$. Khi chúng là hai hàm điều hòa dưới trên C , và khi $\square \setminus K$ là không mỏng tại mọi điểm thuộc ∂K , thì $p_{\mu_1} = p_{\mu_2}$ trên ∂K . Cuối cùng, nếu $\omega \in \operatorname{int}(K)$, với ω như trong bổ đề 3.10, ta có :

$$p_{\mu_1}(\omega) = \int_{\partial K} p_{\mu_1}(\zeta) d\omega(\zeta) = \int_{\partial K} p_{\mu_2}(\zeta) d\omega(\zeta) = p_{\mu_2}(\omega)$$

Suy ra $p_{\mu_1} = p_{\mu_2}$ trên C . Do đó theo hệ quả 1.6.2 ta có $\mu_1 = \mu_2$. ■

❖ Để kết thúc phần này, ta đưa ra 2 áp dụng của định lý 3.8. Trong cả hai áp dụng sắp trình bày dựa trên nhận xét là các hàm có dạng 3.8-1 là các hàm điều hòa trên $\square \setminus \Lambda$ và do đó thỏa nguyên lý cực đại trên K . Trong hệ quả 3.11 ta đưa ra sự tồn tại nghiệm của bài toán

Dirichlet mà trong trường hợp này vai trò của bài toán biên chính quy được thay bằng điều kiện $\square \setminus K$ là tập không mỏng tại mỗi điểm của ∂K . Trong áp dụng thứ 2 ta nêu ra sự xấp xỉ điều hòa trên K

Hệ quả 3.11. Cho K là tập con compact của C , sao cho $C \setminus K$ là không mỏng tại mọi điểm của ∂K . Khi đó với mỗi hàm liên tục $\phi: \partial K \rightarrow \square$, tồn tại duy nhất hàm liên tục $h: K \rightarrow \square$ sao cho h điều hòa trên $\text{int}(K)$ và $h = \phi$ trên ∂K .

Chứng minh:

+ Sự tồn tại: Theo định lý 3.8, tồn tại dãy hàm điều hòa (h_n) trên lân cận của K sao cho: $h_n \rightarrow \phi$ đều trên ∂K . Theo nguyên lý cực đại, $\|h_n - h_m\|_K = \|h_n - h_m\|_{\partial K}$ với mọi m, n . Do vậy, nên từ (h_n) là dãy Cauchy hội tụ đều trên ∂K , nên (h_n) cũng là dãy Cauchy hội tụ đều trên K .

Do đó (h_n) hội tụ đều về một hàm h thỏa mãn tất cả các yêu cầu của hệ quả.

+ Tính duy nhất: Giả sử có h' thỏa các điều kiện của hệ quả 3.11, ta có $h = h'$ trên ∂K , nên theo nguyên lý cực đại 1.1.3 thì $h = h'$ trên K . ■

Hệ quả 3.12. Cho K là tập con compact của C , sao cho $C \setminus K$ là không mỏng tại mọi điểm của ∂K . Lấy Λ là tập con của $C \setminus K$ mà nó chứa ít nhất một phần tử của mỗi thành phần bị chặn của $C \setminus K$. Nếu $h: K \rightarrow \square$ liên tục trên K là điều hòa trên $\text{int}(K)$ thì h có thể xấp xỉ đều với một hàm điều hòa trên $\square \setminus \Lambda$.

Chứng minh:

Theo định lý 3.8, tồn tại dãy hàm (h_n) điều hòa trên $\square \setminus \Lambda$ sao cho $h_n \rightarrow h$ đều trên ∂K .

Theo nguyên lý cực đại, $\|h_n - h\|_K = \|h_n - h\|_{\partial K}$, với mọi n . Vì vậy, $h_n \rightarrow h$ đều trên K . ■

Chương 4: PHÉP NỘI SUY BỞI CÁC HÀM ĐIỀU HÒA DƯƠNG

❖ Trong chương này, ta đưa ra bài toán nội suy trên một nón các hàm điều hòa dương và mô tả hình học dãy nội suy tương ứng. Trong mục 4.1 ta đưa ra một số kiến thức chuẩn bị để phát biểu và chứng minh bài toán nội suy. Mục 4.2, ta phát biểu và chứng minh bài toán nội suy (định lý 4.2.2). Và cuối chương ta phân tích các điều kiện tương đương với điều kiện bài toán nội suy để một dãy các điểm tách được là dãy nội suy bởi các hàm điều hòa dương (mệnh đề 4.2.8).

4.1. Các khái niệm chuẩn bị:

Gọi $h^+ = h^+(D)$ là nón các hàm điều hòa dương trên đĩa đơn vị D của mặt phẳng phức.

Định nghĩa 4.1.1. Khoảng cách hyperbolic $\beta(z; \omega)$ giữa 2 điểm $z, \omega \in D$ là:

$$\beta(z; \omega) = \log_2 \frac{1 + \left| \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z} \right|}{1 - \left| \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z} \right|} \quad (4.1.1-1)$$

❖ Nhận xét:

$\beta(z; \omega) = \log_2 \tau_D(z; \omega)$ với $\tau_D(z; \omega)$ là khoảng cách Harnack giữa z và ω .

Định nghĩa 4.1.2. Dãy các điểm $\{z_n\}$ trong đĩa đơn vị được gọi là tách nếu

$$\inf_{n \neq m} \beta(z_n; z_m) > 0$$

Định nghĩa 4.1.3. Cho tập $E \subset D$, ta định nghĩa

$$E^* = \{\xi \in \partial D : r\xi \in E \text{ với một giá trị } r \text{ thỏa } 0 \leq r < 1\}$$

E^* được gọi là tập hình chiếu theo bán kính của E lên ∂D .

Định nghĩa 4.1.4.

+ $\omega_D(z, G)$ được kí hiệu là độ đo điều hòa trong D của tập $G \subset \partial D$ từ điểm $z \in D$,

với

$$\omega(z, G) = \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} |d\xi|$$

+ $\omega(z; E; D \setminus E)$ là độ đo điều hòa trong $D \setminus E$ của tập E từ điểm $z \in D \setminus E$

Định nghĩa 4.1.5. Dãy các điểm $\{z_n\}$ trong đĩa đơn vị được gọi là dãy nội suy trong không gian H^∞ , các hàm điều hòa bị chặn trên đĩa đơn vị, nếu với mọi dãy số thực dương bị chặn $\{w_n\}$ đều tồn tại hàm $u \in H^\infty$ sao cho $u(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$

Định lý 4.1.6. Dãy $\{z_n\}$ là dãy nội suy trong không gian $H^\infty(D)$ khi và chỉ khi dãy là tách được và $\sup \frac{1}{\ell(Q)} \sum_{z_n \in Q} (1 - |z_n|) < \infty$

Ở đây, supremum được lấy trên tất cả hình vuông Carleson dạng $Q = \{re^{i\theta} : 0 < 1-r < \ell(Q), |\theta - \theta_0| < \ell(Q)\}$ với một θ_0 nào đó thuộc $[0; 2\pi)$.

Định lý được trích trong [7]

Ta sẽ nói rõ hơn về các hình vuông Carleson trong phần sau

4.2 Phép nội suy bởi các hàm điều hòa dương:

❖ Nếu $u \in h^+$, bất đẳng thức Harnack cổ điển (định lý 1.2.1) chỉ ra:

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \frac{u(z)}{u(0)} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \text{ với } \forall z \in D$$

Kết hợp với (4.1.1-1), ta có $|\log_2 u(z) - \log_2 u(0)| \leq \beta(z; 0)$

Qua tự đẳng cấu trên đĩa tròn, ta suy ra:

$$|\log_2 u(z) - \log_2 u(\omega)| \leq \beta(z; \omega), \quad \forall z, \omega \in D$$

Do đó với mọi $u \in h^+$, một dãy các điểm $\{z_n\} \subset D$, và dãy tương ứng các giá trị $w_n = u(z_n)$, $n=1, 2, \dots$ được liên kết bởi:

$$|\log_2 w_n - \log_2 w_m| \leq \beta(z_n; z_m), \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (4.2-0)$$

Tuy nhiên, khi cho một dãy các điểm $\{z_n\} \subset D$, nó không thể nội suy bởi một hàm trong h^+ với mọi dãy giá trị dương $\{w_n\}$ thỏa mãn điều kiện so sánh ở trên, trừ khi dãy $\{z_n\}$ chỉ có 2 điểm. Thực vậy, để có bất đẳng thức (4.2-0) với 2 điểm rời nhau $z, \omega \in D$, đòi hỏi u là

nhân Poisson, và như thế không thể nội suy với nhiều giá trị hơn. Nói cách khác, (4.2-0) là quá rộng, nên ta sẽ xem xét vấn đề này theo hướng sau:

Định nghĩa 4.2.1. Một dãy các điểm $\{z_n\}$ trên đĩa đơn vị D gọi là dãy nội suy trong h^+ nếu tồn tại một hằng số $\varepsilon = \varepsilon(\{z_n\}) > 0$ sao cho mọi dãy giá trị dương $\{w_n\}$ thỏa mãn

$$|\log_2 u(z_n) - \log_2 u(z_m)| \leq \varepsilon \beta(z_n; z_m), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

đều tồn tại một hàm $u \in h^+$ với $u(z_n) = w_n, n=1, 2, \dots$

❖ Nhận xét rằng, khái niệm 4.2.1 có tính bất biến bảo giác, nghĩa là, nếu $\{z_n\}$ là một dãy nội suy với h^+ , thì dãy $\{\tau(z_n)\}$ cũng là dãy nội suy, với mọi τ là tự đồng cấu trên đĩa tròn đơn vị.

❖ Sau đây là kết quả chính của chương này

Định lý 4.2.2. Một dãy các điểm tách được $\{z_n\}$ trong một đĩa tròn đơn vị là dãy nội suy với h^+ khi và chỉ khi tồn tại các hằng số $M > 0$ và $0 < \alpha < 1$, sao cho:

$$\#\{z_j : \beta(z_j; z_n) \leq \ell\} \leq M 2^{\alpha \ell}, \text{ với mọi } n, \ell = 1, 2, \dots \quad (4.2.2-1)$$

❖ Thông thường đối với bài toán nội suy loại này, việc mô tả hình học của dãy nội suy được cho theo điều kiện dày đặc, mà cho ta biết rằng dãy nội suy không quá dày đặc.

Số 2 trong (4.2.2-1) có là do sự chuẩn tắc hóa khoảng cách Hypebolic. Người ta chọn sự chuẩn tắc hóa này vì nó phù hợp hoàn toàn với phân tích nhị phân. Ở cuối chương này ta sẽ chứng minh một số điều kiện tương đương với điều kiện 4.2.2-1

Khi nhận xét điều kiện 4.2.2-1 theo quan điểm dãy, thì dãy thỏa điều kiện 4.2.2-1 thừa thớt hơn dãy chỉ là dãy tách được. Thực vậy, một dãy các điểm $\{z_n\} \subset D$ là hợp hữu hạn dãy tách được nếu và chỉ nếu 4.2.2-1 đúng với $\alpha = 1$

Ta cũng cần lưu ý rằng, trong điều kiện 4.2.2-1, người ta đếm các điểm trong dãy mà khoảng cách hypebolic đến một điểm cho trước trong dãy z_n nhỏ hơn ℓ .

Chứng minh định lý 4.2.2:

I. Điều kiện cần:

Giả sử $\{z_n\} \subset D$ là dãy nội suy với h^+ , ta cần chứng minh tồn tại hằng số $M > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho (4.2.2-1) thỏa mãn.

Cho $E \subset D$, theo bổ đề cổ điển Hall, tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho $\omega(0, E, D \setminus E) \geq C|E^*|$ với mọi $E \subset D$.

Ta xét bổ đề:

Bổ đề 4.2.3: Tồn tại một hằng số $C > 0$, sao cho với mọi $u \in h^+$ và $\lambda > 0$, thì ta có:

$$\left| \left\{ z \in D : \frac{u(z)}{u(0)} > \lambda \right\}^* \right| \leq \frac{C}{\lambda}$$

Chứng minh:

Ta có thể giả sử rằng $\lambda > 1$. Cố định $u \in h^+$, gọi $E = \{z \in D : u(z) > \lambda u(0)\}$

Theo nguyên lý cực đại ta có:

$$u(z) \geq \lambda u(0) \omega(z, E, D \setminus E), \quad z \in D \setminus E$$

Cho $z = 0$, từ bất đẳng thức trên ta có: $\omega(0, E, D \setminus E) \leq \frac{1}{\lambda}$, và áp dụng bổ đề Hall ta có điều phải chứng minh. ■

Ta quay lại chứng minh điều kiện cần của định lý:

Do tính bất biến bảo giác nên ta chỉ cần chứng minh với z_n là điểm gốc. Vì thế, giả sử rằng, $z_1 = 0$ và $\omega_k = 2^{\varepsilon \beta(z_k, 0)}$, $k = 1, 2, \dots$

Ta có:

$$|\log_2 u(z_n) - \log_2 u(z_m)| = \varepsilon |\beta(z_n, 0) - \beta(z_m, 0)| \leq \varepsilon \beta(z_n; z_m), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Do đó tồn tại $u \in h^+$, sao cho $u(z_k) = \omega_k$, $k = 1, 2, \dots$

Gọi D_k là đĩa Hyperbolic có tâm z_k , bán kính hyperbolic bằng 1.

Theo bổ đề Harnack, và do $\beta(z_k, z) \leq 1$, $z \in D_k$, suy ra

$$\log_2 u(z_k) \leq \log_2 u(z) + 1 \Leftrightarrow u(z) \geq \frac{\omega_k}{2}$$

Với mọi $z \in D_k$, $k = 1, 2, \dots$

Đặt $A(j)$ là tập các chỉ số k , ứng với z_k , thỏa $j-1 \leq \beta(z_k, 0) \leq j$, $j = 1, 2, \dots$

Từ $u(0) = 1$ và các đánh giá trên, ta có:

$$\log_2 2u(z) \geq \log_2 u(z_k) = \log_2 2^{\varepsilon \beta(z_k, 0)} \geq \varepsilon(j-1)$$

$$\Rightarrow u(z) \geq 2^{\varepsilon(j-1)-1}$$

Áp dụng bổ đề 5.2.3, tồn tại hằng số $C_1 > 0$, sao cho

$$\left| \left(\bigcup_{k \in A(j)} D_k \right)^* \right| \leq C_1 2^{\varepsilon(1-j)}$$

Vì, $\{z_n\}$ là dãy tách được, và các đĩa $\{D_k\}$ là tựa rời nhau, nên

$$\sum_{k \in A(j)} (1 - z_k) \leq C' \sum_{k \in A(j)} |D_k^*| \leq C_2 2^{\varepsilon(1-j)}$$

Do $1 - |z_k|$ so sánh được với 2^{-j} với mọi $k \in A(j)$, nên

$$\#A(j) \leq C_3 2^{(1-\varepsilon)j}$$

Cho $j = 1, 2, \dots, \ell$ cộng tất cả lại ta có: $\#\{z_k : \beta(z_k, 0) \leq \ell\} \leq C_4 2^{(1-\varepsilon)\ell}$. ■

II. Điều kiện đủ:

Ch dãy $\{z_n\}$ tách được và thỏa 4.2.2-1, và dãy các giá trị dương $\{w_n\}$ thỏa mãn điều kiện so

sánh $|\log_2 w_n - \log_2 w_m| \leq \varepsilon \beta(z_n; z_m)$, $n, m = 1, 2, \dots$. Ta phải tìm hàm $u \in h^+$, sao cho

$u(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$. Áp dụng bổ đề Farkas trong giải tích lồi, thay vì xây dựng trực tiếp

hàm $u \in h^+$ nội suy, ta chỉ cần chứng minh rằng: với mọi phân hoạch dãy $\{z_n\}$ thành 2 dãy

con rời nhau, $\{z_n\} = T \cup S$, đều có một hàm $u = u(T, S) \in h^+$ sao cho

$$u(z_n) \geq w_n, \quad \text{khi } z_n \in T$$

$$u(z_n) \leq w_n, \quad \text{khi } z_n \in S$$

Việc xây dựng hàm u như thế được chia thành ba bước:

Bước 1 (chứng minh điều kiện đủ của định lý 4.2.2):

Ta có kết quả sau trong giải tích lồi. Cho $e_1, e_2, \dots, e_m$ là hệ vectơ của không gian O-clit $\square^d$.

Bổ đề Farkas khẳng định rằng, một vectơ $e \in \square^d$ thuộc nón sinh bởi $\{e_i : i = 1, 2, \dots, m\}$,

nghĩa là $e = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$ với một λ_i nào đó mà $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$, khi và chỉ khi $\langle x, e \rangle \leq 0$ với

mọi vectơ $x \in \square^d$ mà $\langle x, e_i \rangle \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$. (xem [HL]).

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 4.2.4: Lấy $\{z_n\}$ là dãy các điểm rời nhau trong một đĩa đơn vị, và lấy $\{w_n\}$ là dãy các giá trị dương. Giả thiết rằng, mọi phân hoạch của dãy $\{z_n\} = T \cup S$ thành 2 dãy con rời nhau T và S , tồn tại $u = u(T, S) \in h^+$ sao cho $u(z_n) \geq w_n$, khi $z_n \in T$, và $u(z_n) \leq w_n$, khi $z_n \in S$. Khi đó tồn tại $u \in h^+$ sao cho $u(z_n) = w_n$, $n=1, 2, \dots$

Chứng minh:

Ta có thể giả thiết, cả hai dãy các điểm $\{z_n\}$ và dãy giá trị bao gồm d điểm hữu hạn. Xét tập tất cả các phân hoạch $\{z_n\} = T_k \cup S_k$, $k=1, 2, \dots, m$ của dãy $\{z_n\}$. Theo giả thiết, có dãy các hàm tương ứng $u_1, u_2, \dots, u_m \in h^+$ sao cho $u_k(z_n) \geq w_n$ nếu $z_n \in T_k$ và $u_k(z_n) \leq w_n$ với $z_n \in S_k$, xét các vector:

$$u_i = (u_i(z_1), u_i(z_2), \dots, u_i(z_d)), i=1, 2, \dots, m$$

Nếu $x \in \square^d$ thỏa $\langle x, u_i \rangle \leq 0, i=1, 2, \dots, m$, nghĩa là $\sum_{n=1}^d u_i(z_n) x_n \leq 0$, ta đặt $F = \{z_n : x_n \geq 0\}$.

Khi đó $F = T_k$, với một k nào đó, và đặt $S_k = \{z_n\} \setminus F$. Theo giả thiết có các hàm tương ứng u_k thỏa $x_n w_n \leq x_n u_k(z_n)$ với mọi $n=1, 2, \dots, d$

Vì thế nên

$$\langle x, w \rangle = \sum_{n=1}^d w_n x_n \leq \sum_{n=1}^d u_k(z_n) x_n \leq 0$$

Từ đó, theo bổ đề Farkas, $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$ thuộc vào nón sinh bởi hệ vector $\{u_i : i=1, 2, \dots, m\}$. Vì thế tồn tại $\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$ sao cho $u(z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i(z) \in h^+$ và $u(z_n) = w_n, n=1, 2, \dots, d$. ■

Bước 2 (chứng minh điều kiện đủ của định lý 4.2.2):

Ở bước thứ 2 này ta sẽ xây dựng dãy các tập con đôi một rời nhau $\{G_n\}$ của đường tròn đơn vị không phụ thuộc vào các độ đo điều hòa $\{\omega(z_n, \cdot) : n=1, 2, \dots\}$. Khái niệm chính xác của $\{G_n\}$ được đưa ra trong kết quả sau:

Bổ đề 4.2.5: Cho $\{z_n\}$ là dãy các điểm rời nhau trong đĩa tròn đơn vị, và chúng thỏa mãn (4.2.2-1). Khi đó với mọi $\delta > 0$, tồn tại các số $N = N(\delta) > 0$, $\eta = \eta(\delta) > 0$ và các tập con $\{G_n\}$ rời nhau đôi một của đường tròn đơn vị sao cho:

$$\omega\left(z_n, \bigcup_{k \in A(n)} G_k\right) \geq 1 - \delta, n = 1, 2, \dots \quad (4.2.5-1)$$

Và

$$\sum_{k \notin A(n)} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) < \delta, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.5-2)$$

ở đây, $A(n) = A(n, N)$ là tập các chỉ số k sao cho $\beta(z_k, z_n) \leq N$.

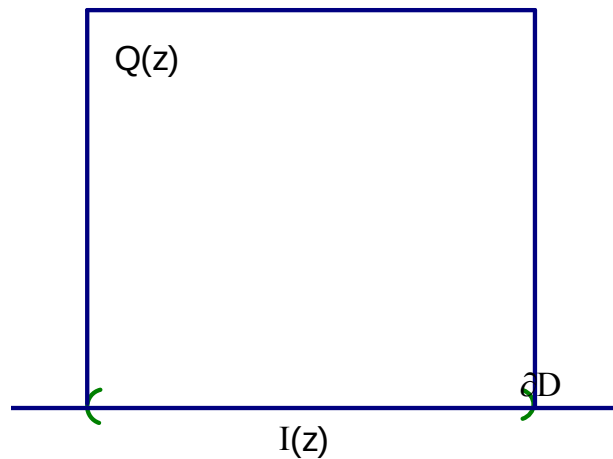
Trước khi chứng minh bổ đề trên, ta đưa ra các khái niệm. Cho một điểm $z \in D$ và $C > 0$, ta định nghĩa:

$$I(z) = \{e^{i\theta} : -\pi(1-|z|) < \theta - \text{Agr}z \leq \pi(1-|z|)\}$$

$$Q(z) = \{re^{i\theta} : 0 < 1-r \leq 1-|z|, e^{i\theta} \in I(z)\}$$

$$CI(z) = \{e^{i\theta} : -\pi C(1-|z|) < \theta - \text{Agr}z \leq \pi C(1-|z|)\}$$

$$CQ(z) = \{re^{i\theta} : 0 < 1-r \leq C(1-|z|), e^{i\theta} \in CI(z)\}$$



Nhận xét: Nếu $C(1-|z|) \geq 1$, ta có $CI(z) = \partial D$, $CQ(z) = D$

Khi $z = z_k \in \{z_n\}$ ta kí hiệu $I_k = I(z_k)$

Để chứng minh bổ đề 4.2.5 ta cần chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 4.2.6. Cố định một số $\delta > 0$, tồn tại $M_0 = M_0(\delta) > 0$ sao cho :

$$\omega(z_k, M_0 I_k) \geq 1 - \frac{\delta}{100} \quad k=1,2,\dots$$

Chứng minh:

Nếu $z_k = 0$, lấy $M_0 = 1$, ta có $\omega(0; I_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{I_k} \frac{1}{|\xi|^2} |d\xi| = 1 \geq 1 - \frac{\delta}{100}$

Nếu $z_k \neq 0$, ta có nhận xét: tồn tại hằng số $C_0 > 0$, sao cho $|e^{it} - z_k| \geq C_0 |t - \text{Agr} z_k|$

Từ $\omega(z_k, \partial D \setminus M_0 I_k) = \frac{1 - |z_k|^2}{2\pi} \int_{\partial D \setminus M_0 I_k} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_k|^2}$

(ở đây, M_0 là hằng số, sẽ được chọn sau)

Suy ra

$$\omega(z_k, \partial D \setminus M_0 I_k) \leq \frac{1 - |z_k|^2}{2\pi C_0^2} \int_{\pi M_0(1 - |z_k|)}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \omega(z_k, \partial D \setminus M_0 I_k) \leq \frac{1 - |z_k|^2}{2\pi C_0^2} \cdot \frac{1}{\pi M_0(1 - |z_k|)} \leq \frac{1}{\pi^2 C_0^2 M_0}$$

Chọn $M_0 = \frac{100}{\pi^2 C_0^2 \delta}$, ta có: $\omega(z_k, \partial D \setminus M_0 I_k) \leq \frac{\delta}{100}$

$$\Rightarrow \omega(z_k, M_0 I_k) = \omega(z_k, \partial D) - \omega(z_k, \partial D \setminus M_0 I_k) \geq 1 - \frac{\delta}{100}.$$

■

Bổ đề 4.2.7. Cố định $M > 0$, tồn tại một hằng số $C = C(M)$, sao cho với mọi cặp điểm $z, w \in D$, và $w \in 20MQ(z)$. Khi đó

$$\left| \beta(z, w) - \log_2 \frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right| \leq C$$

Chứng minh:

Ta có thể giả sử rằng $z, w \in D \setminus \{0\}$.

Ta có: $|1 - \bar{w}z| \geq (1 - |z||w|) \geq 1 - |z|$

Mặt khác: do $w \in 20MQ(z)$, nên

$$0 < 1 - |w| \leq 20M(1 - |z|) \quad \text{và} \quad |\text{Agr} w - \text{Agr} z| \leq \pi 20M(1 - |z|)$$

$$\begin{aligned}
|1 - \bar{w}z| &= |w| \left| \frac{1}{\bar{w}} - z \right| \\
&\leq |w| \left(\left| \frac{1}{\bar{w}} - e^{iA_{grw}} \right| + |e^{iA_{grw}} - e^{iA_{grz}}| + |e^{iA_{grz}} - z| \right) \\
&\leq |w| \left| \frac{1}{\bar{w}} - e^{iA_{grw}} \right| + |e^{iA_{grw}} - e^{iA_{grz}}| + |e^{iA_{grz}} - z| e^{iA_{grz}}| \\
&\leq (20M + 20M\pi + 1)(1 - |z|)
\end{aligned}$$

Ta suy ra: $1 - |z| \leq |1 - \bar{w}z| \leq K(M)(1 - |z|)$ (4.2.7-1)

với $K(M) = 20M + 20M\pi + 1$.

Ta lại có $|1 - \bar{w}z|^2 = |z - w|^2 + (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$

Ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\beta(z, w) &= \log_2 \left(1 + \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 \right) - \log_2 \left(1 - \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 \right) \\
&= 2 \log_2 \left(1 + \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 \right) - \log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2} \right) = C_1 + \log_2 \left(\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right) \\
\Rightarrow C_1 &= \beta(z, w) - \log_2 \left(\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right) \quad (4.2.7-2)
\end{aligned}$$

$$\text{với } C_1 = 2 \log_2 \left(1 + \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|^2 \right) - \log_2 \left(\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right) - \log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2} \right)$$

Do (4.2.7-1), nên ta có

$$\begin{aligned}
\log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{(1 - |z|)^2} \right) &\geq \log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2} \right) \geq \log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{K^2(M)(1 - |z|)^2} \right) \\
\Rightarrow \log_2 ((1 + |z|)(1 + |w|)) - \log_2 \left(\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right) &\geq \log_2 \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{w}z|^2} \right) \\
&\geq \log_2 ((1 + |z|)(1 + |w|)) - 2 \log_2 K(M) - \log_2 \left(\frac{1 - |z|}{1 - |w|} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) &\geq \log_2 \left(\frac{1-|z|}{1-|w|} \right) + \log_2 \left(\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \right) \\
&\geq \log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) - 2\log_2 K(M) \\
\Rightarrow -\log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) &\leq -\log_2 \left(\frac{1-|z|}{1-|w|} \right) - \log_2 \left(\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \right) \\
&\leq -\log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) + 2\log_2 K(M) \\
\Rightarrow 2\log_2 \left(1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| \right) - \log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) &\leq C_1 \leq 2\log_2 \left(1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| \right) \\
&\quad - \log_2 \left((1+|z|)(1+|w|) \right) + 2\log_2 K(M) \\
\Rightarrow -2 \leq C_1 \leq 2 + 2\log_2 K(M) &\quad (4.2.7-3)
\end{aligned}$$

Từ (4.2.7-2) và (4.2.7-3) ta suy ra điều cần chứng minh. ■

❖ Bây giờ ta quay lại chứng minh **bổ đề 4.2.5**:

Để xây dựng các tập $\{G_n\}$ theo yêu cầu bổ đề, ta lần lượt thực hiện qua 3 giai đoạn sau:

1. Với mỗi $z_k \in \{z_n\}$ và $\lambda > 0$, ta sẽ xây dựng các điểm $z_n^\gamma(k) \in D$ với $I(z_n) \subset I(z_n^\gamma(k))$

và thỏa:

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ \beta(z_k, z_n) \geq N}} \left(1 - |z_n^\gamma(k)| \right) \leq \lambda (1 - |z_k|) \text{ với mọi } z_k \in \{z_n\} \quad (4.2.5-3)$$

2. Ta tiếp tục xây dựng các tập $E_k \subset \partial D$, với $E_k \cap E_j = \emptyset$, nếu $\beta(z_k, z_j) > N$ sao cho :

$$\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\delta}{10} \quad (4.2.5-4)$$

Khi xây dựng E_k , ta sẽ sử dụng các điểm $z_n^\gamma(k)$ ở giai đoạn 1 thỏa đánh giá (4.2.5-3) ở trên với λ được cố định đủ nhỏ.

3. Cuối cùng ta sẽ xây dựng các tập G_n đôi một rời nhau và thỏa điều kiện (4.2.5-1) và (4.2.5-2)

Cụ thể như sau:

1. **Xây dựng các điểm** $z_n^\gamma(k) \in D$

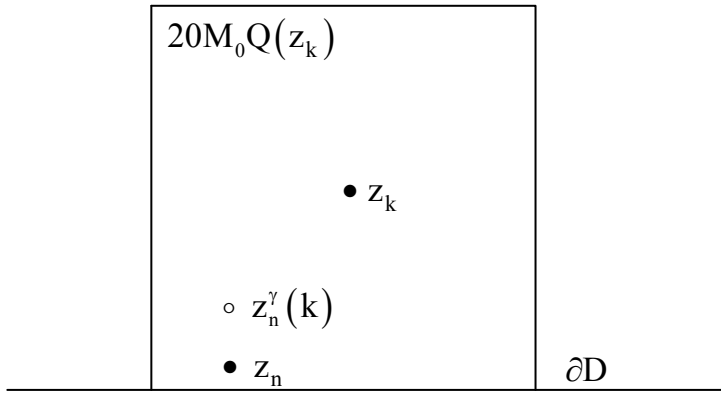
Cố định $\delta > 0$, áp dụng **bổ đề 4.2.6**, tồn tại một hằng số $M_0 = M_0(\delta)$ sao cho

$$\omega(z_k, M_0 I_k) \geq 1 - \frac{\delta}{100} \quad k=1,2,\dots$$

Cố định $z_k \in \{z_n\}$. Lấy $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$, là một số nhỏ mà ta sẽ chọn cố định sau. Với mọi $z_n \in 20M_0Q(z_k)$ với $\beta(z_k, z_n) \geq N$, ta định nghĩa $z_n^\gamma(k)$ như một điểm thuộc D thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- i) $\text{Agr}(z_n) = \text{Agr}(z_n^\gamma(k))$
- ii) $\beta(z_n^\gamma(k), z_n) = \gamma\beta(z_k, z_n)$
- iii) $|z_n^\gamma(k)| < |z_n|$

ở đây $N = N(\gamma, M_0, \lambda)$ là một số lớn, ta sẽ cố định sau. Nói riêng, N sẽ được chọn đủ lớn sao cho $z_n^\gamma(k) \in 20M_0Q(z_k)$ với bất kì điểm $z_n \in 20M_0Q(z_k)$ thỏa mãn $\beta(z_k, z_n) \geq N$.



Theo bổ đề 4.2.7 và $\beta(z_n^\gamma(k), z_n) = \gamma\beta(z_k, z_n)$, ta có, tồn tại các hằng số $C_1; C_2$ sao cho

$$\left| \beta(z_k, z_n) - \log_2 \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right| \leq C_1 \Rightarrow \left| \gamma\beta(z_k, z_n) - \log_2 \left(\frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right)^\gamma \right| \leq \gamma C_1$$

$$\left| \beta(z_n^\gamma(k), z_n) - \log_2 \frac{1 - |z_n^\gamma(k)|}{1 - |z_n|} \right| \leq C_2$$

$$\Rightarrow \left| \log_2 \frac{1 - |z_n^\gamma(k)|}{1 - |z_n|} - \log_2 \left(\frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right)^\gamma \right| \leq \gamma C_1 + C_2 = C_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right)^{\frac{\gamma}{C}} \leq \frac{1 - |z_n^\gamma(k)|}{1 - |z_n|} \leq \left(\frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right)^{C\gamma} \quad (\text{với } C \text{ là một hằng số phụ thuộc } M_0)$$

Vì thế, ta có

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ \beta(z_k, z_n) \geq N}} (1 - |z_n^\gamma(k)|) \leq (1 - |z_k|)^{C\gamma} \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ j \leq \beta(z_n, z_k) < j+1}} (1 - |z_n|)^{1-C\gamma} \quad (4.2.5-5)$$

Nếu $z_n \in 20M_0Q(z_k)$ và $j \leq \beta(z_k, z_n) < j+1$, thì theo bổ đề 4.2.7, ta lại có:

$$\left| \beta(z_n, z_k) - \log_2 \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_k|} \right| \leq K_1(M_0)$$

$$\Rightarrow -K_1(M_0) + \beta(z_n, z_k) \leq \log_2 \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \leq \beta(z_n, z_k) + K_1(M_0)$$

$$\Rightarrow \frac{2^j}{2^{K_1(M_0)}} \leq \frac{2^{\beta(z_n, z_k)}}{2^{K_1(M_0)}} \leq \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \leq 2^{\beta(z_n, z_k)} \cdot 2^{K_1(M_0)}$$

$$\Rightarrow 1 - |z_n| \leq (1 - |z_k|) \cdot \frac{2^{K_1(M_0)}}{2^j} = (1 - |z_k|) \cdot 2^{-j} \cdot K(M_0)$$

$$\Rightarrow 1 - |z_n| \leq K(M_0) 2^{-j} (1 - |z_k|)$$

Lại do điều kiện (4.2.2-1), nên vế phải của (4.2.5-5) bị chặn bởi

$$K(M_0)^{1-C\gamma} (1 - |z_k|) \sum_{j=N}^{\infty} M 2^{\alpha j} \cdot 2^{-j(1-C\gamma)} = M \cdot K(M_0)^{1-C\gamma} (1 - |z_k|) \sum_{j=N}^{\infty} 2^{j(\alpha+C\gamma-1)}$$

Do $0 < \alpha < 1$, chọn $\gamma > 0$ đủ nhỏ sao cho $\alpha + C\gamma < 1$, theo công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn, ta có vế phải của (4.2.5-5) bị chặn bởi

$$M \cdot K(M_0)^{1-C\gamma} (1 - |z_k|) \frac{2^{N(\alpha+C\gamma-1)}}{1 - 2^{\alpha+C\gamma-1}}$$

Với $\lambda > 0$ cho trước, chọn N đủ lớn thì ta có

$$\sum_{\substack{z_n \in 20M_0Q(z_k) \\ \beta(z_k, z_n) \geq N}} (1 - |z_n^\gamma(k)|) \leq \lambda (1 - |z_k|) \text{ với mọi } z_k \in \{z_n\} \quad \blacksquare$$

2. Xây dựng các tập $E_k \subset \partial D$

Với mỗi $z_n^\gamma(k)$, ta kí hiệu $I_n^\gamma(k) = I(z_n^\gamma(k))$. Cố định $M_0 > 0$ và $N > 0$, ta định nghĩa:

$$B(k) = \{z_n : |z_n| \geq |z_k|, \beta(z_k, z_n) \geq N, z_n \in 20M_0Q(z_k)\}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng tập $E_k = M_0 I_k \setminus \bigcup_{z_n \in B(k)} I_n^\gamma(k)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\delta}{10} \quad (5.2.5-6)$$

Ta có: $1 \leq |e^{it} - z_k| + |z_k|, \forall t$

$$\Rightarrow 1 - |z_k| \leq |e^{it} - z_k|$$

$$\Rightarrow (1 - |z_k|)^2 \leq |e^{it} - z_k|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 - |z_k|^2}{|e^{it} - z_k|^2} \leq \frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|}$$

Suy ra:

$$\omega\left(z_k, \bigcup_{z_n \in B(k)} I_n^\gamma(k)\right) \leq \sum_{z_n \in B(k)} \frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|} \int_{I_n^\gamma(k)} \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{2}{1 - |z_k|} \sum_{z_n \in B(k)} (1 - |z_n^\gamma(k)|) \quad (4.2.5-7)$$

Theo giai đoạn 1, ta có vế phải của 4.2.5-7, phải nhỏ hơn 2λ

$$\text{Mặt khác, từ } \omega(z_k, E_k) = \omega(z_k, M_0 I_k) - \omega\left(z_k, \bigcup_{z_n \in B(k)} I_n^\gamma(k)\right)$$

$$\text{Từ bổ đề 4.2.6 ta được: } \omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\delta}{100} - 2\lambda$$

$$\text{Ta chọn } \lambda \text{ đủ nhỏ thì } \omega(z_k, E_k) \geq 1 - \frac{\delta}{10}.$$

Do $M_0 I_n \subset I_n^\gamma(k)$, nên từ định nghĩa của tập các tập E_k ta có $E_k \cap E_j = \emptyset$, nếu $\beta(z_k, z_j) > N$. ■

3. Xây dựng các tập G_n :

Bằng cách hoán đổi vị trí, ta sắp xếp dãy $\{z_n\}$ sao cho dãy $\{1 - |z_n|\}$ giảm. Với mỗi điểm z_n ta sẽ xây dựng tương ứng một tập $G_n \subset E_n$ để họ các tập $\{G_n\}$ đôi một rời nhau và thỏa (4.2.5-1), và (4.2.5-2). Việc xây dựng G_n được thực hiện bằng quy nạp và đảm bảo rằng $\{G_n\}$ rời nhau đôi một và thỏa 4.2.5-1.

$$\text{Lấy } G_1 = E_1, \text{ ta có } \omega(z_1, G_1) = \omega(z_1, E_1) \geq 1 - \frac{\delta}{10} \geq 1 - \delta$$

Do đó (4.2.5-1) thỏa với $n=1$

Giả sử rằng ta đã xây dựng được các tập con đôi một rời nhau $G_1, G_2, \dots, G_{j-1}$ của đĩa tròn đơn vị thỏa:

$$\omega\left(z_n, \bigcup_{k \leq n, k \in A(n)} G_k\right) \geq 1 - \delta, \text{ với } n = 1, 2, \dots, j-1$$

Các tập G_j được xây dựng theo 2 trường hợp sau:

(1) Nếu $\beta(z_j, \{z_1, z_2, \dots, z_{j-1}\}) = \inf\{\beta(z_j, z_k) : k = 1, 2, \dots, j-1\} \geq N$, ta định nghĩa $G_j = E_j$.

Theo 5.2.5-6, ta có

$$\omega\left(z_j, \bigcup_{k \leq j, k \in A(j)} G_k\right) \geq \omega(z_j, G_j) \geq 1 - \delta$$

Bây giờ ta chỉ ra là $G_k \cap G_j = \emptyset$ với mọi $k=1, 2, \dots, j-1$. Mà do $G_k \subset E_k$ và $G_j \subset M_0 I_j$, nên ta chỉ cần chỉ ra $M_0 I_j \cap E_k = \emptyset$, $k=1, 2, \dots, j-1$.

Cố định $k = 1, 2, \dots, j-1$, ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $z_j \in 20M_0 Q(z_k)$: Từ $M_0 I_j \subset I_j^\gamma(k)$ và $E_k \subset M_0 I_k \setminus \bigcup I_j^\gamma(k)$, ta có $M_0 I_j \cap E_k = \emptyset$.

+ Nếu $z_j \notin 20M_0 Q(z_k)$: Từ $|z_j| > |z_k|$, ta có $M_0 I_j \cap M_0 I_k = \emptyset$, nên $M_0 I_j \cap E_k = \emptyset$.

(2) Nếu $\beta(z_j, \{z_1, z_2, \dots, z_{j-1}\}) \leq N$, ta xét tập

$$F = F(j) = \{k \in \{1, 2, \dots, j-1\} : \beta(z_k, z_j) \leq N\}$$

ta có 2 trường hợp sau:

+ Nếu $\omega\left(z_j, \bigcup_{k \in F} G_k\right) \geq 1 - \delta$, thì ta định nghĩa $G_j = \emptyset$. Lúc này ta cũng có:

$$\omega\left(z_j, \bigcup_{k \leq j, k \in A(j)} G_k\right) \geq 1 - \delta$$

+ Nếu $\omega\left(z_j, \bigcup_{k \in F} G_k\right) < 1 - \delta$, ta định nghĩa: $G_j = E_j \setminus \bigcup_{k \in F} G_k$. Tương tự như trong trường hợp

(1), ta có $G_k \cap G_j = \emptyset$ với mọi $k=1, 2, \dots, j-1$

Và ta cũng có: $\omega\left(z_j, \bigcup_{k \leq j, k \in A(j)} G_k\right) \geq \omega(z_j, E_j) \geq 1 - \delta$

Vì vậy theo nguyên lý quy nạp ta đã xây dựng được họ các tập con $\{G_n\}$ đôi một rời nhau của đường tròn đơn vị và thỏa 4.2.5-1. Bây giờ ta chỉ còn phải chứng tỏ họ $\{G_n\}$ thỏa điều kiện 4.2.5-2, nghĩa là, tồn tại $\eta = \eta(\delta) > 0$ sao cho:

$$\sum_{k: \beta(z_k, z_n) \geq N} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq \delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Cố định $n = 1, 2, \dots$. Ta xét 3 tập chỉ số sau:

$$\mathcal{A} = \{k : \beta(z_k, z_n) \geq N, z_k \in 20M_0Q(z_n)\}$$

$$\mathcal{B} = \{k : \beta(z_k, z_n) \geq N, 2M_0I_k \cap M_0I_n = \emptyset\}$$

$$\mathcal{C} = \{k : \beta(z_k, z_n) \geq N, k \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\}$$

Bây giờ ta phân tích tổng trên thành 3 phần

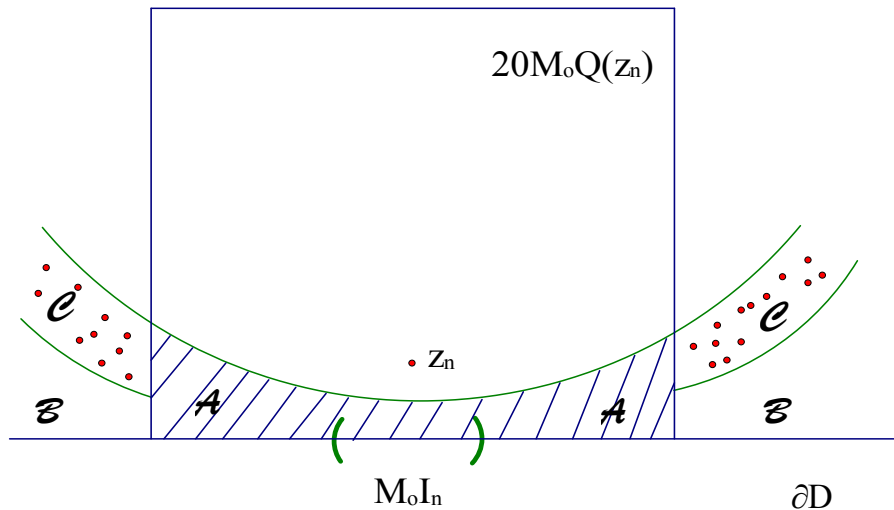
$$\sum_{k: \beta(z_k, z_n) \geq N} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) = (A) + (B) + (C)$$

với

$$(A) = \sum_{k \in \mathcal{A}} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$

$$(B) = \sum_{k \in \mathcal{B}} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$

$$(C) = \sum_{k \in \mathcal{C}} 2^{\eta \beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$



- Với mỗi z_k trong phần (A), ta có $z_k \in 20M_0Q(z_n)$. Từ $G_n \subset M_0I_k$, theo đánh giá của

nhân Poisson, chỉ ra rằng $\frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|^2} \leq \frac{1 + |z_n|}{1 - |z_n|}$, nên

$$\omega(z_n, G_k) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{M_0 I_k} \frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|} dt \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 + |z_n|}{1 - |z_n|} 2\pi M_0 (1 - |z_k|)$$

$$\Rightarrow \omega(z_n, G_k) \leq 2M_0 \frac{(1 - |z_k|)}{1 - |z_n|}$$

Theo bổ đề, 4.2.7, từ $z_k \in 20M_0 Q(z_n)$, tồn tại hằng số C phụ thuộc M_0 , sao cho:

$$\log_2 \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \leq C(M_0) - \beta(z_k, z_n)$$

Vì thế, nếu $z_k \in 20M_0 Q(z_n)$, ta có:

$$\omega(z_n, G_k) \leq C \cdot 2^{-\beta(z_k, z_n)} \quad \text{với } C = 2M_0 2^{C(M_0)}$$

- Với mỗi z_k trong phần (B), ta có $2M_0 I_k \cap M_0 I_n = \emptyset$.

Ta có với mọi $e^{it} \in I_k$, tồn tại hằng số $C_1 = C_1(M_0) > 0$ sao cho:

$$|e^{it} - z_n| \geq C_1 |1 - z_n \overline{z_k}|$$

Từ đó thì

$$\omega(z_n, G_k) \leq \int_{M_0 I_k} \frac{1 - |z_n|^2}{|e^{it} - z_n|^2} \frac{dt}{2\pi} \leq \int_{M_0 I_k} \frac{1 - |z_n|^2}{C_1^2 |1 - z_n \overline{z_k}|^2} \frac{dt}{2\pi} \leq C_1^{-2} M_0 \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - z_n \overline{z_k}|^2}$$

Tương tự như cách chứng minh bổ đề 4.2.7, ta thấy tồn tại hằng số $C_2 > 0$ sao cho

$$\beta(z_n, z_k) \leq C_2 - \log_2 \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - z_n \overline{z_k}|^2}$$

$$\Rightarrow \omega(z_n, G_k) \leq C \cdot 2^{-\beta(z_n, z_k)} \quad \text{với } C = C_1^{-2} M_0 2^{C_2}$$

$$\text{Vậy ta có: } (A) + (B) \leq C \sum_{k: \beta(z_k, z_n) \geq N} 2^{(\eta-1)\beta(z_k, z_n)}$$

Mặt khác từ điều kiện 4.2.2-1, ta có

$$\sum_{k: \beta(z_k, z_n) \leq j} 2^{(\eta-1)\beta(z_n, z_k)} \leq M 2^{(\eta+\alpha-1)j} \quad \text{với } j=1, 2, \dots$$

Do $0 < \alpha < 1$, ta có thể chọn $0 < \eta = \eta(\alpha) < 1 - \alpha$, lúc này ta có $\alpha + \eta - 1 < 0$. Vì thế, cộng vế theo vế tất cả các đánh giá trên với $j \geq N$, ta có:

$$(A) + (B) \leq C \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{k: \beta(z_k, z_n) \leq j} 2^{(\eta-1)\beta(z_k, z_n)} \leq C \sum_{j=N}^{\infty} M 2^{(\eta+\alpha-1)j}$$

$$\Rightarrow (A) + (B) \leq CM \frac{2^{(\eta+\alpha-1)j}}{1-2^{\eta+\alpha-1}}$$

Lấy $N > 0$ đủ lớn, ta sẽ có $(A) + (B) \leq \frac{\delta}{3}$

Bây giờ việc đánh giá tổng (C) phụ thuộc vào cách chọn hằng số $\gamma > 0$ xuất hiện trong cách xây dựng tập $\{E_n\}$. Cố định z_n , xét tập

$$U(n) = \{z_k : \beta(z_k, z_n) \geq N, z_k \notin 2M_0Q(z_n), 2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset\}$$

$$\text{Khi đó: } (C) = \sum_{z_k \in U(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$

Nhận xét rằng, nếu $z_k \in U(n)$, thì $|z_k| < |z_n|$ và $z_n \in 3M_0Q(z_k)$. Đặc biệt, $z_n \in 2M_0Q(z_k)$, nên theo cách xây dựng các tập $\{G_k\}$, ta có $G_k \subset M_0I_k \setminus I_n^\gamma(k)$. Do vậy

$$\omega(z_n, G_k) \leq \int_{M_0I_k \setminus I_n^\gamma(k)} \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \frac{|d\xi|}{2\pi} \leq \int_{\partial D \setminus I_n^\gamma(k)} \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \frac{|d\xi|}{2\pi}$$

và với phép đổi biến cho một hằng số $C_3 > 0$, sao cho

$$\omega(z_n, G_k) \leq C_3 (1-|z_n|) \int_{1-|z_n^\gamma(k)|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq C_3 \frac{1-|z_n|}{1-|z_n^\gamma(k)|} \quad (4.2.5-9)$$

Nhận xét rằng, nếu $z_k \in U(n)$, thì z_k thuộc góc Stolz:

$$\Gamma_n(M_0) = \{z \in D : |z - e^{i\text{Agr}z_n}| \leq 11M_0(1-|z|)\} \text{ với đỉnh } e^{i\text{Agr}z_n} \text{ và phụ thuộc vào } M_0. \text{ Vì}$$

$$2M_0I_k \cap M_0I_n \neq \emptyset \text{ dẫn đến } |\text{Agr}(z_k) - \text{Agr}(z_n)| \leq 10M_0(1-|z_k|)$$

$$\Rightarrow |z_k - e^{i\text{Agr}z_n}| \leq 11M_0(1-|z_k|)$$

$$\text{Đặt } V(n) = \{z_k \in \Gamma_n : \beta(z_k, z_n) \geq N, |z_k| < |z_n|\}$$

Ta có

$$(C) = \sum_{z_k \in U(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k)$$

Theo chứng minh trên, $\left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right)^{\frac{\gamma}{C}} \leq \frac{1-|z_n^\gamma(k)|}{1-|z_n|} \leq \left(\frac{1-|z_k|}{1-|z_n|}\right)^{C\gamma}$, và từ (4.2.5-9) ta được:

$$(C) \leq C_3 \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \frac{1-|z_n|}{1-|z_n^\gamma(k)|} \leq C_3 \sum_{z_k \in V(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \left(\frac{1-|z_n|}{1-|z_k|}\right)^{C^{-1}\gamma}$$

Vì $z_n \in 3M_0Q(z_k)$, theo bổ đề 4.2.7, ta có

$$\left| \beta(z_k, z_n) - \log_2 \frac{1 - |z_k|}{1 - |z_n|} \right| \leq C(M_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1 - |z_n|}{1 - |z_k|} \leq 2^{C(M_0) - \beta(z_k, z_n)}$$

Do đó

$$(C) \leq C_3 2^{C(M_0)C^{-1}\gamma} \sum_{z_k \in V(n)} 2^{(\eta - C^{-1}\gamma)\beta(z_k, z_n)}$$

Do dãy $\{z_n\}$ là tách được, nên tồn tại $C_4 = C_4(M_0) > 0$, sao cho với mọi $j \geq 0$, thì số các điểm $z_k \in V(n)$ mà $j \leq \beta(z_k, z_n) \leq j+1$ không hơn C_4 . Vì thế

$$(C) \leq C_3 C_4 2^{C(M_0)C^{-1}\gamma} \sum_{j=N}^{\infty} 2^{(\eta - C^{-1}\gamma)j}$$

Chọn $\eta > 0$ đủ nhỏ sao cho $\eta - C^{-1}\gamma < 0$, và tương tự như trên, ta lấy $N > 0$ đủ lớn thì ta được

$$(C) \leq \frac{\delta}{3}$$

Vậy, ta đã chứng minh được:

$$(A) + (B) + (C) = \sum_{k: \beta(z_k, z_n) \geq N} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq \delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bước 3: (của chứng minh điều kiện đủ của định lý 4.2.2)

Trong bước này ta chứng minh rằng với phân hoạch $\{z_n\} = T \cup S$ và các tập $\{G_n\}$ đã xây dựng ở trên sẽ được dùng để chỉ ra hàm $u = u(T, S)$ thỏa các điều kiện mà ta đã giả thiết là đúng trong bổ đề 4.2.4.

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy $\{z_n\}$ tách được thỏa mãn điều kiện $\#\{z_j : \beta(z_j, z_n) \leq \ell\} \leq M 2^{\alpha\ell}$, với mọi $n, \ell = 1, 2, \dots$ thì cũng thỏa mãn điều kiện của định lý 4.1.6.

Thật vậy, để chứng minh $\sup \frac{1}{\ell(Q)} \sum_{z_n \in Q} (1 - |z_n|) < \infty$ ta chỉ cần chứng minh với các hình vuông Carleson Q mà chứa một điểm của $\{z_n\}$ trong phần trên của nó:

$$T(Q) = \{re^{i\theta} : 1 - r > \ell(Q)\}$$

Xét Q là hình vuông Carleson dạng này, lấy $z_n \in T(Q)$ và $A(j) = \{k : z_k \in Q, j-1 \leq \beta(z_k, z_n) < j\}$, theo bổ đề 4.2.7 thì với mọi $k \in A(j)$ thì $1 - |z_k|$ so sánh được với $2^{-j} \ell(Q)$. Do đó, từ $\#\{z_j : \beta(z_k; z_n) \leq j\} \leq M2^{\alpha j}$, ta có:

$$\sum_{k \in A(j)} (1 - |z_k|) \leq C_1 2^{-j} \ell(Q) \# A(j) \leq C_1 M 2^{(\alpha-1)j} \ell(Q)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell(Q)} \sum_{k \in A(j)} (1 - |z_k|) \leq C_1 M 2^{(\alpha-1)j}$$

Do $0 < \alpha < 1$, nên

$$\frac{1}{\ell(Q)} \sum_{z_n \in Q} (1 - |z_n|) = \frac{1}{\ell(Q)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in A(j)} (1 - |z_n|) < \infty$$

Vì thế, $\{z_n\}$ là dãy nội suy trong H^∞ .

Theo định lý ánh xạ mở, tồn tại hằng số $\gamma = \gamma(\{z_n\})$ sao cho với mọi phân hoạch của dãy $\{z_n\} = T \cup S$, đều tồn tại $h = h(T, S) \in H^\infty$ với $\sup\{|h(z)| : z \in D\} < 1$ và $h(z_n) > \gamma$ với $z_n \in T$; $h(z_n) < -\gamma$ với $z_n \in S$. Lấy $\delta > 0$ là số nhỏ (sẽ cố định sau) và lấy $N = N(\delta), \eta = \eta(\delta)$ là các hằng số dương và $\{G_n\}$ là các tập con đôi một rời nhau của đĩa đơn vị ta đã xây dựng trong bổ đề 4.2.5. Lấy $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ nhỏ sao cho $\varepsilon \delta^{-1} \rightarrow 0$ khi $\delta \rightarrow 0$.

Xét dãy các giá trị dương $\{w_n\}$ thỏa mãn $|\log_2 w_n - \log_2 w_m| \leq \varepsilon \beta(z_n; z_m)$, $n, m = 1, 2, \dots$

(4.2-0)

Với một phân hoạch $\{z_n\} = T \cup S$ đã cho, ta xét hàm $u = u(T, S) \in h^+$ được định nghĩa bởi:

$$u(z) = \sum_k w_k \int_{G_k} P_z(\xi) (1 + h(\xi)) |d\xi|$$

ở đây $h = h(T, S)$ và $P_z(\xi)$ là nhân Poisson

$$P_z(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $u(z_n) \geq w_n$ với $z_n \in T$ và $u(z_n) \leq w_n$ với $z_n \in S$. Với $n=1,2,\dots$, ta đặt $A(n)$ là tập các chỉ số k sao cho $\beta(z_k, z_n) \leq N$.

Ta viết lại: $u(z_n) = (I) + (II)$, với

$$(I) = \sum_{k \notin A(n)} w_k \int_{G_k} P_{z_n}(\xi) (1 + h(\xi)) |d\xi|$$

$$(II) = \sum_{k \in A(n)} w_k \int_{G_k} P_{z_n}(\xi) (1 + h(\xi)) |d\xi|$$

+ Trước tiên ta chứng minh: $(I) < 2\delta w_n$, $n=1,2,\dots$

Thật vậy, nếu hằng số $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ được chọn sao cho $\varepsilon < \eta$, và từ (4.2-0), ta có

$$(I) \leq \sum_{k \notin A(n)} w_n 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} 2 \int_{G_k} \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} |d\xi| = w_n \sum_{k \notin A(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} 2\omega(z_n, G_k)$$

Theo bổ đề 4.2.5, thì $2 \sum_{k \notin A(n)} 2^{\eta\beta(z_k, z_n)} \omega(z_n, G_k) \leq 2\delta$

Suy ra $(I) < 2\delta w_n$, $n=1,2,\dots$

+ Do $\{G_n\}$ đôi một rời nhau, và (4.2-0), ta có

$$(II) = \sum_{k \in A(n)} w_k \int_{G_k} P_{z_n}(\xi) (1 + h(\xi)) |d\xi| \leq 2^{\varepsilon N} w_n (1 + h(z_n))$$

Từ $\sup\{|h(z)| : z \in D\} < 1$, (4.2-0) và 4.2.5-1 ta có

$$(II) \geq w_n 2^{-\varepsilon N} \left(1 + h(z_n) - \int_{\bigcup_{k \in A(n)} G_k} P_{z_n}(\xi) (1 + h(\xi)) |d\xi| \right)$$

$$\geq w_n 2^{-\varepsilon N} (1 + h(z_n) - 2\delta)$$

Vì thế,

$$2^{-\varepsilon N} w_n (1 + h(z_n) - 2\delta) \leq (II) \leq 2^{\varepsilon N} w_n (1 + h(z_n))$$

Vậy

+ Nếu $z_n \in T$, thì $h(z_n) \geq \gamma$ nên $u(z_n) \geq (II) \geq w_n 2^{-\varepsilon N} (1 + \gamma - 2\delta)$

+ Nếu $z_n \in S$, thì $h(z_n) \leq -\gamma$ nên $u(z_n) = (I) + (II) \leq w_n (2\delta + 2^{-\varepsilon N} (1 - \gamma))$

Cố định $\gamma > 0$, lấy $\delta = \delta(\gamma) > 0$ và $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \eta, N) > 0$ đủ nhỏ thì ta suy ra được

$u(z_n) \geq w_n$ với $z_n \in T$ và $u(z_n) \leq w_n$ với $z_n \in S$.

Theo bổ đề 4.2.4 thì ta có được chứng minh điều kiện đủ của định lý.

❖ Sau đây là một số điều kiện tương đương với điều kiện ta đưa ra ở định lý 4.2.2.

Mệnh đề 4.2.8:

Cho $\{z_n\}$ là dãy các điểm tách được trong D . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương

(a) Tồn tại một số $M > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho

$$\#\{z_j : \beta(z_j, z_n) \leq \ell\} \leq M 2^{\alpha \ell}$$

với mọi $n, \ell = 1, 2, \dots$

(b) Tồn tại một số $M_1 > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho

$$\#\left\{z_j : \left| \frac{z_j - z_n}{1 - \bar{z}_n z_j} \right| \leq r\right\} \leq M_1 (1-r)^{-\alpha}$$

với $0 < r < 1$ và với mọi $n = 1, 2, \dots$

(c) Tồn tại một số $M_2 > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho

$$\#\{z_j \in Q(z_n) : 2^{-\ell-1}(1 - |z_n|) \leq 1 - |z_j| \leq 2^{-\ell}(1 - |z_n|)\} \leq M_2 2^{\alpha \ell}$$

với mọi $n, \ell = 1, 2, \dots$

(d) Tồn tại một số $M_3 > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho

$$\sum_{z_j \in Q(z_n)} (1 - |z_j|)^{\alpha} \leq M_3 (1 - |z_n|)^{\alpha}$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$

Chứng minh:

+ (a) $\Leftrightarrow$ (b):

$$\text{Ta có } \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| = \frac{2^{\beta(z,w)} - 1}{2^{\beta(z,w)} + 1} = 1 - \frac{2}{2^{\beta(z,w)} + 1}$$

Nên với $z, w \in D$, ta có

$$\beta(z, w) \leq \ell \Leftrightarrow \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| \leq 1 - \frac{2}{2^{\ell} + 1}$$

Chọn $r = 1 - \frac{2}{2^{\ell} + 1}$ ta có (a) $\Leftrightarrow$ (b)

+ (a) $\Rightarrow$ (c):

Cố định 2 số nguyên dương n, ℓ .

Với mọi $z_j \in \left\{ z_j \in Q(z_n) : 2^{-\ell-1}(1-|z_n|) \leq 1-|z_j| \leq 2^{-\ell}(1-|z_n|) \right\}$, nghĩa là $z_j \in Q(z_n)$ và

$$2^{-\ell-1}(1-|z_n|) \leq 1-|z_j| \leq 2^{-\ell}(1-|z_n|)$$

Áp dụng bổ đề 4.2.7 ta có tồn tại một hằng số C sao cho

$$\left| \beta(z_n, z_j) - \log_2 \frac{1-|z_n|}{1-|z_j|} \right| \leq C$$

$$\Rightarrow C - \log_2 \frac{1-|z_n|}{1-|z_j|} \leq \beta(z_n, z_j) \leq C + \log_2 \frac{1-|z_n|}{1-|z_j|}$$

$$\Rightarrow C + \ell \leq \beta(z_n, z_j) \leq C + \ell + 1$$

$$\Rightarrow \left| \beta(z_n, z_j) - \ell \right| \leq C$$

Vì vậy ta có

$$\left\{ z_j \in Q(z_n) : 2^{-\ell-1}(1-|z_n|) \leq 1-|z_j| \leq 2^{-\ell}(1-|z_n|) \right\} \subset \left\{ z_j : \beta(z_j, z_n) \leq \ell + C \right\}$$

Do đó ta có (a) $\Rightarrow$ (c)

+ (c) $\Rightarrow$ (d):

Ta có :

$$2^{-\ell-1}(1-|z_n|) \leq 1-|z_j| \leq 2^{-\ell}(1-|z_n|)$$

$$\Rightarrow (1-|z_j|)^\alpha \leq 2^{-\ell\alpha} (1-|z_n|)^\alpha$$

$$\Rightarrow \sum_{z_j \in Q(z_n)} (1-|z_j|)^\alpha \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\ell\alpha} (1-|z_n|)^\alpha \leq M_3 (1-|z_n|)^\alpha$$

Ta đã có (c) $\Rightarrow$ (d)

+ (d) $\Rightarrow$ (a):

Theo tính bất biến bảo giác, ta có thể giả sử rằng $z_n = 0$, từ điều kiện (d) suy ra:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|)^\alpha \leq M_3$$

Mặt khác: $\beta(z_j, 0) \leq \ell \Leftrightarrow \log_2 \frac{1+|z_j|}{1-|z_j|} \leq \ell \Leftrightarrow \frac{1+|z_j|}{1-|z_j|} \leq 2^\ell$

Nếu $\beta(z_j, 0) \leq \ell$ thì $1-|z_j| \geq \frac{2}{2^\ell+1}$

Suy ra $\#\{z_j : \beta(z_j, 0) \leq \ell\} \leq M_3 \left(\frac{2}{2^\ell+1}\right)^{-\alpha}$ ■

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Luận văn được chia thành 4 chương với nội dung là ba ứng dụng của Lý Thuyết Thế Vị và Hàm Điều Hòa, đó là: Phép nội suy trong không gian L^p , Xấp xỉ đều, phép nội suy bởi các hàm điều hòa dương. Qua đây giúp ta hiểu sâu sắc hơn về Lý Thuyết Thế Vị, hàm điều hòa; thấy được các ứng dụng, cách thực vận dụng trong các bài toán cụ thể. Và cũng thấy được mối liên hệ giữa Lý thuyết thế vị, giải tích phức và các ngành toán học khác có nhiều mối liên hệ mật thiết với nhau.

Qua quá trình nghiên cứu vấn đề này, tôi nhận thấy vẫn còn nhiều ứng dụng nữa, các kết thu được còn có thể mở rộng thêm. Chẳng hạn phép nội suy các hàm điều hòa dương có số chiều lớn hơn, dãy nội suy trong các không gian khác (Không gian dạng Besov, ...), xấp xỉ hàm điều hòa bởi đa thức điều hòa và bởi hàm điều hòa hữu tỉ, xấp xỉ đều trong nón các hàm điều hòa dương.... Nhưng do kiến thức và thời gian còn hạn chế, nên luận văn chưa thể thực hiện được. Tác giả mong tiếp tục được nghiên cứu theo hướng này. Tác giả rất mong sự góp ý và chỉ bảo của Quý Thầy Cô trong hội đồng.

TP Hồ Chí Minh, tháng 10 năm 2009

TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. Tiếng việt:

- [1] TS. Nguyễn Văn Đông, *Giáo Trình Giải Tích Phức*
- [2] PGS.TS. Nguyễn Bích Huy, *Giáo Trình Giải Tích Thực*
- [3] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải, *Hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc Gia Hà nội 2001

II. Tiếng Anh:

- [4] D.Blasi & A.Nicolau, *Interpolation by positive harmonic functions*, arXiv:Math-2006
- [5] L.Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J.Math, 1958
- [6] L.Carleson & J.Garnett, *Interpolation sequences and separation properties*, I.Anal.Math,1975
- [7] J.B.Conway, *Function of one complex variable II*, Springs – Verlag, Newyork, 1995
- [8] J.B.Hiriart-Urrty & C.lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I.Fundamentals*, Springer – Verlag, Berlin, 1993
- [9] D.E.Marshall & C.Sundberg, *Harmonic Measure anh radial projection*, Spring – Verlag, New York, 1994
- [10] Thomas Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Mathematical Society Student Texts 28, Cambridge University Press
- [11] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York,1987.

CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

BÁO CÁO

(V/v: Tiến độ làm đề tài luận văn)

**Kính gửi: - Phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Sư Phạm Thành
Phố Hồ Chí Minh.**

Tên tôi là: **Nguyễn Văn Quang**, hiện là học viên cao học Khoá 17, chuyên ngành Toán Giải tích, Trường Đại Học Sư phạm TP.HCM.

Tên đề tài: ***“Lý thuyết Thế vị phẳng và một số phép nội suy”***.

Người hướng dẫn khoa học: Tiến sĩ **Nguyễn Văn Đông**.

Từ ngày nhận đề tài 3/8/2008 đến ngày 15/2/2009 tôi xin báo cáo tiến độ thực hiện đề tài của tôi như sau:

- Đã làm được:

Mở đầu.

- ✓ **Chương 1:** Nghiên cứu tài liệu về lý thuyết thế vị phẳng
- ✓ Rút ra các kiến thức chuẩn bị cho chương sau.

- Hướng làm sắp tới:

Chương 2: Phép nội suy trong không gian L^p .

và **Chương 3.** Xấp xỉ đều.

Vậy nay tôi làm báo cáo này để phòng đào tạo sau đại học rõ.

Trân trọng kính chào.

TP.HCM, ngày 12 tháng 02 năm 2009

Người hướng dẫn khoa học

Người báo cáo

TS. Nguyễn Văn Đông

Nguyễn Văn Quang

CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

BÁO CÁO

(V/v: Tiến độ làm đề tài luận văn)

**Kính gửi: - Phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Sư Phạm Thành
Phố Hồ Chí Minh.**

Tên tôi là: **Nguyễn Văn Quang**, hiện là học viên cao học Khóa 17, chuyên ngành Toán Giải tích, Trường Đại Học Sư phạm TP.HCM.

Tên đề tài: ***“Lý thuyết Thế vị phẳng và một số phép nội suy”***.

Người hướng dẫn khoa học: Tiến sĩ **Nguyễn Văn Đông**.

Từ ngày nhận đề tài 16/2/2008 đến ngày 15/5/2009 tôi xin báo cáo tiến độ thực hiện đề tài của tôi như sau:

- Đã làm được:

Mở đầu.

- ✓ **Chương 2:** Phép nội suy trong không gian L^p
- ✓ **Chương 3.** Xấp xỉ đều.

- Hướng làm sắp tới:

Chương 4: Phép nội suy Bôlzano các hàm điều hòa dương.

Vậy nay tôi làm báo cáo này để phòng đào tạo sau đại học rõ.
Trân trọng kính chào.

Người hướng dẫn khoa học

TP.HCM, ngày 14 tháng 05 năm 2009

Người báo cáo

TS. Nguyễn Văn Đông

Nguyễn Văn Quang

CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

BÁO CÁO

(V/v: Tiến độ làm đề tài luận văn)

**Kính gửi: - Phòng đào tạo sau đại học Trường Đại Học Sư Phạm Thành
Phố Hồ Chí Minh.**

Tên tôi là: **Nguyễn Văn Quang**, hiện là học viên cao học Khóa 17, chuyên ngành Toán Giải tích, Trường Đại Học Sư phạm TP.HCM.

Tên đề tài: ***“Lý thuyết Thế vị phẳng và một số phép nội suy”***.

Người hướng dẫn khoa học: Tiến sĩ **Nguyễn Văn Đông**.

Từ ngày nhận đề tài 16/7/2008 đến ngày 15/7/2009 tôi xin báo cáo tiến độ thực hiện đề tài của tôi như sau:

- Đã làm được:

Mở đầu.

✓ **Chương 4:** Phép nội suy bởi các hàm điều hòa dương

- Hướng làm sắp tới:

+ Kiểm tra, chỉnh sửa luận văn.

Vậy nay tôi làm báo cáo này để phòng đào tạo sau đại học rõ.

Trân trọng kính chào.

Người hướng dẫn khoa học

TP.HCM, ngày 14 tháng 07 năm 2009

Người báo cáo

TS. Nguyễn Văn Đông

Nguyễn Văn Quang