

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

LƯU THANH HẪN

VÀI VẤN ĐỀ CƠ BẢN
CỦA HÀM NHIỀU BIẾN PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

LƯU THANH HẪN

VÀI VẤN ĐỀ CƠ BẢN
CỦA HÀM NHIỀU BIẾN PHỨC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**

Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS ĐẬU THỀ CẤP

LỜI CẢM ƠN

Lời cảm ơn sâu sắc nhất, tôi xin trân trọng kính gởi **PGS.TS Đậu Thế Cấp, TS Nguyễn Văn Đông** đã tận tình hướng dẫn và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện luận văn này.

Tôi cũng xin cảm ơn tất cả quý Thầy đã giảng dạy tôi trong suốt quá trình học Cao học, xin cảm ơn quý Thầy cô trong Hội đồng Khoa học đã đọc và có những ý kiến quý báu.

Sau cùng, tôi xin chân thành cảm ơn đến quý Thầy cô Phòng Khoa Học Công Nghệ & Sau Đại Học Trường ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, Ban Giám Hiệu, quý Thầy cô tổ Toán – Tin Trường THPT Bắc Bình và những người thân đã động viên, nhiệt tình giúp đỡ tôi trong công việc để tôi được thuận lợi hơn trong quá trình học và làm luận văn này.

Bắc Bình, ngày 15 tháng 10 năm 2011

Lư Thanh Hân

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN.....	5
MỤC LỤC	6
MỞ ĐẦU.....	1
1.Lý do chọn đề tài:	1
2.Mục đích nghiên cứu:	1
3.Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:	1
4.Ý nghĩa khoa học và thực tiễn:.....	1
5.Cấu trúc luận văn:.....	1
Chương 1. Hàm chỉnh hình nhiều biến phức.....	3
1.1.Không gian $\mathcal{E}^n$ và hàm chỉnh hình.....	3
1.2.Công thức tích phân Cauchy trên đa đĩa.....	6
1.3.Chuỗi lũy thừa	14
Chương 2. Dạng Levi và mở rộng Hartogs.....	18
2.1.Hàm điều hòa dưới	18
2.2.Dạng Levi.....	28
2.3.Trung bình trên loga của bán kính Taylor của các hàm chỉnh hình	35
Chương 3. Miền chỉnh hình và miền giả lồi.....	40
3.1.Miền chỉnh hình.....	40
3.2.Miền giả lồi	46
KẾT LUẬN.....	53
TÀI LIỆU THAM KHẢO	54

MỞ ĐẦU

1.Lý do chọn đề tài:

Những tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình nhiều biến phức là nền tảng ban đầu để tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sâu hơn trong lý thuyết hàm nhiều biến phức. Tôi chọn đề tài này để bước đầu tìm hiểu về sự thác triển hàm chỉnh hình nhiều biến phức, một lĩnh vực được sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới.

2.Mục đích nghiên cứu:

Tìm hiểu sự thác triển chỉnh hình nhiều biến phức qua việc chỉ ra miền hội tụ của chuỗi lũy thừa của hàm nhiều biến phức, cũng như chỉ ra mối liên hệ giữa miền chỉnh hình và miền giả lồi.

3.Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu một số vấn đề cơ bản của hàm nhiều biến phức liên quan đến hàm chỉnh hình, hàm đa điều hòa dưới, miền chỉnh hình và miền giả lồi.

4.Ý nghĩa khoa học và thực tiễn:

Luận văn sẽ là một tài liệu tham khảo để hiểu thêm về sự thác triển chỉnh hình của hàm chỉnh hình nhiều biến, một trong các vấn đề cơ bản của hàm nhiều biến phức.

5.Cấu trúc luận văn:

Nội dung luận văn được trình bày theo 3 chương:

Chương 1: Trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình nhiều biến phức, đặc biệt ta quan tâm việc biểu diễn chúng dưới dạng tích phân Cauchy và dạng chuỗi lũy thừa.

Chương 2: Trình bày dạng Levi của một hàm thuộc lớp C^2 trên một miền của $\mathbb{C}^n$ và sử dụng nó để chứng minh các kết quả về thác triển chỉnh hình. Nêu ra khái niệm trung bình trên loga của bán kính Taylor của hàm chỉnh hình, các kiến thức về hàm điều hòa dưới, đa điều hòa dưới và mối liên hệ giữa tính chỉnh hình theo từng biến và chỉnh hình toàn cục.

Chương 3: Trình bày các khái niệm, các tính chất cơ bản của miền chỉnh hình, miền giả lồi và mối liên hệ của hai miền này.

Chương 1. Hàm chỉnh hình nhiều biến phức

Chương này trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình nhiều biến phức, đặc biệt ta quan tâm việc biểu diễn chúng dưới dạng tích phân Cauchy và dạng chuỗi lũy thừa. Nội dung chính của chương là định lý 1.3.7, chỉ ra rằng một miền Reinhardt đầy đủ, lõi loga là miền hội tụ của một chuỗi lũy thừa.

Nhắc lại một số kí hiệu

Tập hợp các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Tập hợp các số thực: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Tập hợp các số phức: $\mathbb{C}$.

1.1. Không gian $\mathbb{C}^n$ và hàm chỉnh hình

Định nghĩa 1.1.1. Ta gọi không gian gồm những điểm $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ là không gian $\mathbb{C}^n$. Đặc biệt khi $n=1$ thì $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}$: mặt phẳng phức.

Khi đó ta đồng nhất được $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ xác định bởi hàm:

$$(x, y) \mapsto z = x + iy$$

(1.1.1)

trong đó $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Trong phép tương ứng (1.1.1), ta viết $x = \operatorname{Re} z$ và $y = \operatorname{Im} z$.

Định nghĩa 1.1.2. Mọi $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j \in \mathbb{C}$; $1 \leq j \leq n$. Ta định nghĩa

- $|z| = \max \{ |z_j|; 1 \leq j \leq n \}$ là mô đun của z .
- $\bar{z} = x - iy$ là liên hợp của z trong $\mathbb{E}^n$.

Định nghĩa 1.1.3.

- Hàm $l: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}$ gọi là $\mathbb{C}$ -tuyến tính (tương ứng $\mathbb{E}$ -tuyến tính) nếu
 - i) $l(z + z') = l(z) + l(z'), \forall z, z' \in \mathbb{E}^n$;
 - ii) $l(\lambda z) = \lambda l(z), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{E}^n$ (tương ứng $\forall \lambda \in \mathbb{E}, \forall z \in \mathbb{E}^n$)
- Hàm $f: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$, với Ω là tập mở trong $\mathbb{E}^n$, được gọi là $\mathbb{C}^{2n}$ -khả vi (tương ứng $\mathbb{E}^n$ -khả vi) tại $z \in \Omega$ nếu tồn tại một ánh xạ $\mathbb{C}$ -tuyến tính $l: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}$ (tương ứng $\mathbb{E}$ -tuyến tính) sao cho

$$f(z+h) = f(z) + l(h) + \varphi(h) \quad \text{với} \quad \frac{\varphi(h)}{h} \rightarrow 0 \text{ khi } h \rightarrow 0.$$

Ta cũng chứng minh được, nếu f là $\mathbb{C}^{2n}$ -khả vi trên Ω thì $df = \partial f + \bar{\partial} f$,

trong đó:
$$\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \quad \text{và} \quad \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Định nghĩa 1.1.4.

- Hàm $f \in C^1(\Omega)$ được gọi là chỉnh hình (giải tích) tại $z_0 \in \mathbb{E}^n$ nếu nó $\mathbb{E}^n$ -khả vi tại mỗi điểm thuộc một lân cận nào đó của z_0 .
- Hàm $f \in C^1(\Omega)$ được gọi là (giải tích) chỉnh hình theo từng biến nếu nó chỉnh hình với mỗi biến khi các biến còn lại cố định.
- Hàm $f \in C^1(\Omega)$ được gọi là hàm chỉnh hình (hàm giải tích) khi $df = \partial f$, nghĩa là f thỏa hệ phương trình $\partial_{\bar{z}_j} f = 0, j = 1, \dots, n$. (1.1.2)

Tập hợp các hàm chỉnh hình trên Ω được kí hiệu là $hol(\Omega)$.

Hệ phương trình (1.1.2) được gọi là hệ Cauchy – Riemann (viết tắt hệ C-R). Như vậy, df một cách tổng quát là ánh xạ i - tuyến tính, thì trong trường hợp này là một ánh xạ $\mathcal{E}$ - tuyến tính, nghĩa là ta có sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc} i^{2n} & \xrightarrow{df} & i^n \\ \mathcal{P} & & \mathcal{P} \\ \mathcal{E}^n & \xrightarrow{\partial f} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.1.3)$$

Nếu chúng ta phân tích $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, thì hệ C-R là hệ gồm $2n$ phương trình thực

$$\begin{cases} \partial_{x_j} \operatorname{Re} f - \partial_{y_j} \operatorname{Im} f = 0 \\ \partial_{y_j} \operatorname{Re} f + \partial_{x_j} \operatorname{Im} f = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Định lý 1.1.5. Cho $f(z) = (f_j(z))_{j=1, \dots, n}$ là hàm giải tích trong một lân cận z_0 , ta giả thiết rằng $\det(\partial_{z_i} f_j)_{ji} \neq 0$ tại z_0 . Khi đó tồn tại hàm giải tích $g(z) = (g_j(z))_{j=1, \dots, n}$ trong lân cận $w_0 = f(z_0)$ sao cho $g \circ f = \operatorname{id}$.

Chứng minh. Ta tăng gấp đôi biến $z \in \mathcal{E}^n$ thành cặp $(z, w) \in \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^n$ và chứng minh cho trường hợp tổng quát hơn. Cho hàm giải tích $h: \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{E}^n, h = (h_j(z, w))_j$, giả sử rằng $h = 0$ và $\det(\partial_z h) \neq 0$ tại (z_0, w_0) , hệ phương trình $(h_j(z, w))_{j=1, \dots, n} = 0$ có duy nhất nghiệm giải tích $z = (z_j)(w)$ trong lân cận w_0 với $z(w_0) = z_0$. Điều này suy ra kết quả của định lý khi xét $m = n$ và $h_j = w_j - f_j(z)$. Ta cần chứng tỏ rằng $dh_j = 0$ và $dw_k = 0$ với $j = 1, \dots, n$ và $k = 1, \dots, m$ kéo theo $dz_j = 0, j = 1, \dots, n$: nhưng điều này xảy ra do $\det(\partial_z h) \neq 0$. Do đó theo định lý hàm ẩn, phương trình $h_j = 0$ xác định duy nhất nghiệm $z = (z_j)(w)$ trong lân cận w_0 với $z(w_0) = z_0$. Từ

nghiệm $z(w)$ này, đồng nhất thức $dh = \partial_z h dz + \partial_w h dw = 0$ suy ra rằng dz_j là tổ hợp của dw_k , do đó z_j là hàm chỉnh hình. $\forall$

1.2. Công thức tích phân Cauchy trên đa đĩa

Cho $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ là một điểm trên $\mathbb{E}^n$ và $r = (r_1, \dots, r_n)$ là một n -bán kính trên $(\mathbb{C}^+)^n$. Ta kí hiệu $\partial_0 P = \{ |z_j - z_j^0| = r_j, j = 1, \dots, n \}$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $\Delta_{z_j^0 r_j} = \{ z_j \in \mathbb{E} : |z_j - z_j^0| < r_j \}$ là đĩa tâm z_j^0 và bán kính r_j . Ta định nghĩa $P_{z^0 r} = \prod_{j=1, \dots, n} \Delta_{z_j^0 r_j}$ là đa đĩa tâm z^0 và n -bán kính r .

Định lý 1.2.2. Cho f là một hàm liên tục trên đa đĩa $\bar{P}$ và là một hàm chỉnh hình theo từng biến z_j , với mọi j , khi cố định các biến z_k với $k \neq j$. Khi đó: với mọi $z \in P$ ta có

$$f(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma_1 - z_1) \cdots (\varsigma_n - z_n)} d\varsigma_1 \wedge \dots \wedge d\varsigma_n. \quad (1.2.1)$$

Chứng minh.

• Ta chứng minh bằng quy nạp theo n chiều của không gian $\mathbb{E}^n$. Với $n = 1$, để đơn giản kí hiệu, ta giả sử $z^0 = 0$ và $r = 1$, do đó P trùng với đĩa đơn vị Δ . Để chứng minh định lý ta cần đến bổ đề sau

Bổ đề 1.2.3. Cho $g \in C^1(\bar{\Delta})$, với mỗi $z \in \Delta$ ta có

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\partial \Delta} \frac{g(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \iint_{\Delta} \frac{\partial_{\bar{\varsigma}} g(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \wedge d\bar{\varsigma} \right] \quad (1.2.2)$$

Chứng minh. Với $z \in \Delta$, giả sử $\varepsilon < d(z, \partial\Delta)$, khi đó $\Delta^\varepsilon = \Delta_{z\varepsilon}$ thỏa $\bar{\Delta}^\varepsilon \Subset \Delta$. Chú ý $\partial\Delta$ và $\partial\Delta^\varepsilon$ là các phần biên của $\Delta \setminus \Delta^\varepsilon$ suy ra phần bù $+\partial(\Delta \setminus \Delta^\varepsilon) = +\partial\Delta - \partial\Delta^\varepsilon$. Ta dùng kí hiệu ω thay cho 1-dạng $\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Do công thức Stokes cho ta kết quả

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Delta^\varepsilon} \omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{+\partial\Delta} \omega - \iint_{\Delta \setminus \Delta^\varepsilon} d\omega \right] \quad (1.2.3)$$

Chú ý hàm dưới dấu tích phân trong tích phân cuối cùng ở (1.2.3) là

$$-d\omega = \frac{\partial_{\bar{\zeta}} g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Vì $d\omega$ là hàm dưới tích phân theo biến z , nên

$$\iint_{\Delta \setminus \Delta^\varepsilon} d\omega \rightarrow \iint_{\Delta} d\omega.$$

Ta cũng chú ý

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\Delta^\varepsilon} \omega \rightarrow g(z),$$

Vì g liên tục tại z nên qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$, (1.2.3) trở thành (1.2.2).

Đặc biệt, nếu thay một hàm tổng quát $g \in C^1$ bởi một nghiệm f của phương trình $\partial_{\bar{z}} f = 0$, (1.2.2) ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

Đó là công thức (1.2.2) cho trường hợp $n = 1$.

• Ta tiếp tục chứng minh quy nạp và giả sử rằng (1.2.1) đúng với hàm chỉnh hình $n-1$ biến số $z_1, \dots, z_{n-1}$. Kí hiệu P' là đa đĩa $\prod_{j \leq n-1} \Delta_{z_j^0 r_j}$ và viết (1.2.1) theo $z_1, \dots, z_{n-1}$ với tham số z_n ta được

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \int_{\partial_0 P'} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_{n-1} - z_{n-1})} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{n-1}. \quad (1.2.4)$$

Thực hiện phép thế trong công thức Cauchy 1-chiều ta được

$$f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - z_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_n - z_n)} d\zeta_n. \quad (1.2.5)$$

Từ (1.2.4), (1.2.5) ta suy ra được (1.2.1) nhờ định lý Fubini. W

Chú ý 1.2.4. Tính chỉnh quy C^1 theo từng biến z_j riêng biệt là cần thiết cho công thức Stokes, và đồng thời tính chỉnh quy C^0 thì cần thiết cho định lý Fubini.

Cho $f \in C^0(\Omega)$ là hàm chỉnh hình theo từng biến z_j riêng biệt, ta muốn áp dụng công thức (1.2.1) cho mọi đa đĩa $\bar{P} \Subset \Omega$. Vì hàm biến z được sinh ra bởi các tích phân theo ζ là thuộc lớp C^∞ , nên kết quả đó có thể kiểm tra qua việc lấy đạo hàm theo biến z_j trong tích phân hội tụ.

Hệ quả 1.2.5. Nếu f là hàm thuộc lớp C^0 trên Ω và là hàm chỉnh hình theo từng biến z_j riêng biệt thì nó là hàm thuộc lớp C^∞ và đặc biệt là hàm chỉnh hình.

Ta kí hiệu những dãy điểm trong $\partial_0 P(z, r)$ như sau $\varsigma = (\varsigma_j)$ với $\varsigma_j = z_j + r_j e^{i\theta_j}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P(z, r)} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma_1 - z_1) \cdots (\varsigma_n - z_n)} d\varsigma_1 \wedge \dots \wedge d\varsigma_n \\ &= \int_{[0,1]^n} f\left(z + \left(r_1 e^{i2\pi\theta_1}, \dots, r_n e^{i2\pi\theta_n}\right)\right) d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n. \end{aligned}$$

Công thức (1.2.1) nói lên rằng một hàm chỉnh hình thỏa mãn tính chất giá trị trung bình: giá trị của hàm f tại z bằng giá trị trung bình của nó trên biên của đĩa đĩa bất kì chứa trong miền mà tại đó f là hàm chỉnh hình. Nếu thay f bởi $|f|$ trong công thức (1.2.1) thì ta thấy rằng $|f(z)|$ được đánh giá bởi giá trị trung bình của $|f|$ trên $\partial_0 P(z, r)$: ta nói rằng $|f|$ có các tính chất giá trị trung bình dưới trong trường hợp này. Đặc biệt nếu $|f|$ đạt cực đại tại điểm z thuộc miền Ω mà trên đó f chỉnh hình thì khi đó $|f|$ phải là một hằng số bằng với giá trị $|f(z)|$ trong $\partial_0 P(z, r)$ với mọi $\partial P(z, r) \subseteq \Omega$. Do đó $|f|$ là hằng số trong lân cận của z . (Thật ra chính f là hàm hằng vì $|\partial_z f|^2 = \partial_z \partial_{\bar{z}} |f|^2 = 0$). Nó cho phép f thỏa mãn cái được gọi là nguyên lý mô đun cực đại.

Định lí 1.2.6. Cho Ω là tập bị chặn và f liên tục trên $\bar{\Omega}$, chỉnh hình trên Ω . Khi đó $|f|$ đạt cực đại trên $\partial\Omega$.

Chứng minh. Hàm f là hằng số địa phương tại mọi điểm thuộc phần trong của Ω , mà trên đó $|f|$ đạt cực đại. Vì vậy, tập hợp các điểm này cũng là tập đóng, không thể khác rỗng trừ khi nó là một thành phần liên thông của Ω . Mặt khác những giá trị cực đại của $|f|$ đạt tại các điểm biên đều bằng nhau.

Cho đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ta đặt $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ và $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Ta định nghĩa đa lũy thừa là $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot r_n^{\alpha_n}$ và đa đạo hàm là $\partial_z^\alpha f = \partial_{z_1}^{\alpha_1} f \cdot \dots \cdot \partial_{z_n}^{\alpha_n} f$, mà đôi lúc ta cũng kí hiệu là $f^{(\alpha)}$. Ta viết $(\alpha+1)$ thay cho $(\alpha_1+1, \dots, \alpha_n+1)$ và nếu β là đa chỉ số khác sao cho $\beta_j < \alpha_j$ với mọi j , ta định nghĩa $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Ta nói rằng một chuỗi lũy thừa $\sum_\alpha a_\alpha (z - z_0)^\alpha$ hội tụ chuẩn tắc trên đa đĩa $P(z_0, r)$ nếu với mọi r' thỏa $r'_j < r_j$ với mọi j thì ta có: $\sum_\alpha |a_\alpha| r'^\alpha < +\infty$.

Với β cố định, ta kí hiệu $\left(\sum_\alpha a_\alpha (z - z_0)^\alpha\right)^{(\beta)}$ là đạo hàm cấp β của chuỗi

$\sum_\alpha a_\alpha (z - z_0)^\alpha$, tức là chuỗi $\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} a_\alpha (z - z_0)^{\alpha - \beta}$. Đó chỉ là bài toán

áp dụng định lí Abel để chỉ ra rằng nếu một chuỗi lũy thừa tâm z_0 hội tụ trên đa đĩa $P(z_0, r)$ thì đạo hàm theo mọi cấp β của nó hội tụ trên $P(z_0, r)$. Với chú ý này ta có thể thấy rõ một chuỗi lũy thừa là một hàm chỉnh hình trên miền mà nó hội tụ.

Định lí 1.2.7. Cho $\sum_\alpha a_\alpha (z - z_0)^\alpha$ hội tụ trong $P(z_0, r)$. Khi đó tổng f của chúng là một hàm chỉnh hình trên $P(z_0, r)$.

Chứng minh. Tổng riêng $S_\nu = \sum_{|\alpha| \leq \nu} a_\alpha (z - z_0)^\alpha$ cũng như các đạo hàm

của chúng hội tụ đều trong mọi tập con compact của P . Đặc biệt hệ thức $\partial_{\bar{z}_j} S_\nu = 0$ với mọi j , qua giới hạn và trở thành $\partial_{\bar{z}_j} f = 0$. $\forall$

Bây giờ chúng ta muốn chứng minh tính chất ngược lại “Mọi hàm chỉnh hình trên một lân cận nào đó của z_0 là tổng của một chuỗi lũy thừa hội tụ trong một đa đĩa $P(z_0, r)$, mà là chuỗi Taylor của nó tại z_0 .”

Định lí 1.2.8. Cho $f \in \text{hol}(\Omega)$ và $z_0 \in \Omega$. Khi đó

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{f^{(\alpha)}(z_0)}{\alpha!} (z - z_0)^{\alpha},$$

với sự hội tụ chuẩn tắc trên bất kì đĩa đĩa $P = P(z_0, r) \subset \Omega$.

Chứng minh. Ta chọn $z_0 = 0$. Ta viết

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1}{\zeta_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_n}{\zeta_n}\right)} = \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\zeta^{\alpha+1}} \quad (1.2.6)$$

với sự hội tụ chuẩn tắc khi $\left| \frac{z_j}{\zeta_j} \right| < 1$ với mọi j . Đặc biệt sự hội tụ là tuyệt đối

và đều với z thuộc tập con compact của P và $\zeta \in \partial_0 P$. Do đó, ta thế (1.2.6) vào công thức Cauchy và được

$$\begin{aligned} f(z) &= (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P} \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\zeta^{\alpha+1}} f(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ &= \sum_{\alpha} \left((2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \right) z^{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

với sự hội tụ chuẩn tắc theo $z \in P$. Do đó f là tổng của chuỗi lũy thừa có tâm tại $z_0 = 0$. Việc lấy đạo hàm lặp lại của đồng nhất thức của f với tổng của chuỗi và việc tính đạo hàm tại z_0 dẫn đến hệ số trong (1.2.7) là hệ số Taylor

của hàm f tại $z_0 = 0$, nghĩa là bằng $\frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}$. W

Việc chứng minh định lý cho ta biểu diễn các hệ số tích phân Fourier là

$$\frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\alpha+1}} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n. \quad (1.2.8)$$

Hệ quả 1.2.9 (Sự thác triển giải tích). Cho $\Omega_0 \subset \Omega$ là tập con mở của $\mathbb{C}^n$ với $\Omega_0 \neq \emptyset$, Ω liên thông và cho $f \in \text{hol}(\Omega)$ thỏa $f|_{\Omega_0} \equiv 0$. Khi đó $f \equiv 0$ trên khắp Ω .

Nói cách khác, hai hàm chỉnh hình trên Ω mà trùng nhau trên một tập mở khác rỗng, phải trùng nhau khắp nơi trên Ω .

Do f là tổng của chuỗi Taylor của nó nên cũng có thể nói: Nếu $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ với mọi α thì $f \equiv 0$ trên Ω .

Chứng minh. Cho Ω_1 là tập con mở lớn nhất của Ω thỏa $f|_{\Omega_1} \equiv 0$. (lớn nhất được hiểu lấy hợp của tất cả các tập con như thế). Ω_1 khác rỗng vì nó chứa Ω_0 . Ta phải có $\Omega_1 = \Omega$. Nếu không, giả sử ζ là một điểm trong Ω_1 sao cho khoảng cách từ điểm này tới $\partial\Omega$ dài hơn khoảng cách từ nó tới $\partial\Omega_1$: điểm ζ như thế phải tồn tại vì tính liên thông của Ω . Bây giờ chuỗi Taylor của f tại ζ bằng 0 và nó biểu diễn cho hàm f trên mọi đa đĩa chứa trong Ω , đặc biệt trong những đa đĩa mà mở rộng dọc theo mặt phẳng mà qua đó ta nhận được khoảng cách từ z_0 đến $\partial\Omega_1$. Nhưng các đa đĩa này nằm ngoài Ω_1 và mang những không điểm của hàm f vượt ra ngoài tập hợp lớn nhất của chúng. $\square$

Định lý 1.2.10 (Các bất đẳng thức Cauchy). Cho f là hàm chỉnh hình trong P và liên tục trên $\bar{P}$. Khi đó với mọi α và với $c = c_{\alpha r}$ thích hợp, ta có

$$\left| f^{(\alpha)}(z_0) \right| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \sup_{\partial_0 P(z_0, r)} |f|, \quad (1.2.9)$$

$$\left| f^{(\alpha)}(z_0) \right| \leq c \|f\|_{L^1(P(z_0, r))}. \quad (1.2.10)$$

Chứng minh. Viết $\varsigma_j = z_{0j} + r_j e^{i\theta_j}$, khi đó (1.2.8) trở thành

$$\frac{f^{(\alpha)}(z_0)}{\alpha!} = (2\pi i)^{-n} i^n \int_{[0, 2\pi]^n} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r^\alpha} e^{-i\theta(\alpha-1)} d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n.$$

Lấy môđun hai vế, ta có

$$\left| f^{(\alpha)}(z_0) \right| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} (2\pi)^{-n} \int_{[0, 2\pi]^n} \left| f(z_0 + r e^{i\theta}) \right| d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n, \quad (1.2.11)$$

kết quả trên cho ra (1.2.9). Bằng việc cho đa bán kính r' thay đổi với ràng buộc $0 \leq r' \leq r$, nhân cả hai vế của (1.2.11) với $r'^{\alpha+1}$ và lấy tích phân theo biến r' ta có (1.2.10). $\square$

Định lí 1.2.11 (Stjelties – Vitali). Cho $\{f_\nu\}$ là một dãy bị chặn trong $hol(\Omega)$. Khi đó có một dãy con $\{f_{\nu_k}\}$ hội tụ đều trên mọi tập con compact của Ω về hàm giới hạn $f \in hol(\Omega)$.

Chứng minh. Do định lý 1.2.10, “dãy $\{f_\nu\}$ bị chặn” kéo theo “dãy $\{\partial_{z_j} f_\nu\}$ bị chặn” trên các tập con compact. Do đó dãy $\{f_\nu\}$ là liên tục đồng bậc và theo định lí Arzela nó hội tụ đến một hàm giới hạn. Bằng cách chuyển đổi $\partial_{\bar{z}_j}$ với “lim”, giới hạn đó cũng là một hàm chỉnh hình. $\square$

1.3. Chuỗi lũy thừa

$$\text{Cho} \quad \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} a_{\alpha} z^{\alpha} \quad (1.3.1)$$

là một chuỗi lũy thừa tâm tại 0.

Định nghĩa 1.3.1. Ta kí hiệu D là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (1.3.1) là tập hợp những điểm mà trong lân cận của nó chuỗi lũy thừa hội tụ chuẩn tắc, nghĩa là, hội tụ tuyệt đối và đều.

Định nghĩa 1.3.2. Ta kí hiệu B là tập bị chặn của chuỗi (1.3.1), đó là tập hợp những điểm z sao cho $|a_{\alpha} z^{\alpha}| < c$ với mọi α .

Định lí 1.3.3. Ta có $D = \overset{0}{B}$.

Chứng minh. Hiển nhiên D là mở và chứa trong $\overset{0}{B}$. Ngược lại, nếu $z_0 \in \overset{0}{B}$, khi đó có một điểm $w \in B$, số dương $k_j < 1$ và một lân cận V của z_0 thỏa $|z_j| \leq k_j |w_j|$ với mọi j và $z \in V$. Đặt $k = (k_1, \dots, k_n)$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |a_{\alpha} z^{\alpha}| &\leq c \sum_{\alpha} k^{\alpha} \\ &= c \prod_{j=1, \dots, n} (1 - k_j)^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

với mọi $z \in V$.

$\forall$

Như vậy, miền hội tụ D của chuỗi lũy thừa cho thấy trước hết hai đặc điểm nổi bật sau

- Nó bất biến dưới phép quay: nếu $z \in D$ thì $e^{i\theta} z \in D$ với mọi $\theta \in [0, 2\pi]^n$
- Nếu $w \in D$ thì với mọi z thỏa $|z_j| \leq |w_j|$ với mọi j , ta có: $z \in D$.

Một tập mở thỏa tính chất thứ nhất được gọi là miền Reinhardt. Một miền Reinhardt thỏa tính chất thứ hai được gọi là miền Reinhardt đầy đủ.

Định nghĩa 1.3.4. Miền A được gọi là lõi loga nếu $A^* = \left\{ \xi \in \mathbb{C}^n : \xi_j = \log |z_j|, j = 1, \dots, n, \text{ với } z \in A \right\}$ là tập lõi.

Định lý 1.3.5. Miền hội tụ D của chuỗi lũy thừa là miền lõi loga.

Chứng minh. Nhớ rằng $D = \overset{0}{B}$, vì vậy ta cần chứng minh rằng nếu

$$\begin{cases} |a_\alpha z^\alpha| < c, \\ |a_\alpha w^\alpha| < c \end{cases} \quad (1.3.3)$$

thì với $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$|a_\alpha z^{\lambda\alpha} w^{(1-\lambda)\alpha}| < c \quad (1.3.4)$$

Điều này suy ra được từ giả thiết. W

Định lý 1.3.6. Cho Ω là một miền liên thông Reinhardt chứa 0 và cho

$$f \in \text{hol}(\Omega). \text{ Khi đó ta có } f(z) = \sum_{\alpha} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} z^\alpha, \text{ hội tụ chuẩn tắc trong } \Omega.$$

Chứng minh. Ta kí hiệu Ω_ε là thành phần liên thông của 0 trong tập hợp $\{z \in \Omega : d(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > \varepsilon |z|\}$. Các tập Ω_ε là tăng khi cho $\varepsilon \downarrow 0$ và hợp của các tập này theo ε phủ toàn bộ Ω bởi vì Ω là liên thông. Ta kí hiệu $P_{1+\varepsilon}$ là đa đĩa $P_{1+\varepsilon} = \{t \in \mathbb{C}^n : |t_j| < 1 + \varepsilon, \text{ với mọi } j = 1, \dots, n\}$ và định nghĩa

$$g(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P_{1+\varepsilon}} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n. \quad (1.3.5)$$

Vì $z \in \Omega_\varepsilon$ nên $(1+\varepsilon)z \in \Omega$; vì $t \in \partial_0 P_{1+\varepsilon}$ và Ω là Riemannstein nên $tz \in \Omega$. Do đó tích phân được xác định và sinh ra một hàm trơn của z . Bằng cách chuyển đổi δ_{z_j} qua dấu tích phân, ta thấy g là một hàm chỉnh hình. Nói chung khi t không thuộc $\partial_0 P_{1+\varepsilon}$ và nằm trong $P_{1+\varepsilon}$, khi đó tz không còn chứa trong Ω nữa. Tuy nhiên, trường hợp này đúng cho biến nhỏ z vì Ω chứa một lân cận của 0. Với những giá trị này của z , thế $\zeta = tz$ và $P_{1+\varepsilon}^z = \{tz : t \in P_{1+\varepsilon}\}$ vào trong (1.3.5) ta được

$$g(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P_{1+\varepsilon}^z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n.$$

Tuy nhiên số hạng ở vế phải là tích phân Cauchy của hàm f tại biên z trên đa đĩa $P_{1+\varepsilon}^z$ mà nó là một miền đầy đủ được chứa trong một miền mà f là hàm chỉnh hình. Vì thế $f(z) = g(z)$ với các giá trị của z đó, suy ra $f \equiv g$ trên Ω_ε do sự mở rộng giải tích.

Ta còn chú ý tới chuỗi lũy thừa

$$\frac{1}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} = \sum_{\alpha} t^{-\alpha-1},$$

với sự hội tụ chuẩn tắc đối với $t \in \partial_0 P_{1-\varepsilon}$. Nếu ta lấy $\sum_{\alpha}$ bên ngoài của tích phân vế phải trong (1.3.5), ta được $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$, trong đó f_{α} là hàm giải tích

$$\text{xác định bởi: } f_{\alpha}(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\partial_0 P_{1+\varepsilon}} \frac{f(tz)}{t^{\alpha+1}} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

Tương tự hàm g trước đây, ta thấy rằng: $f_{\alpha}(z) = \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} z^{\alpha}$ trên Ω_ε . Khi đó

f là tổng của những chuỗi lũy thừa.

W

Định lí 1.3.7. Cho Ω là một miền Reinhardt liên thông chứa điểm 0 và Ω° là miền Reinhardt lõi loga đầy đủ nhỏ nhất chứa Ω . Khi đó ta có một sự mở rộng ánh xạ $hol(\Omega) \xrightarrow{\text{mở rộng}} hol(\Omega^\circ)$.

Chứng minh. Vì một hàm chỉnh hình trên một miền Reinhardt chứa 0 được biểu diễn qua một chuỗi lũy thừa nên hàm có thể mở rộng chỉnh hình trên tập hợp các điểm mà chuỗi lũy thừa hội tụ. Những điểm trước tiên được bổ sung vào miền Ω ban đầu là những điểm z sao cho $|z_j| \leq |w_j| \quad \forall j$ với $w \in \Omega$ nào đó, sau đó là những điểm z mà có $w_1, w_2 \in \Omega$ sao cho $\log |z_j| = \lambda \log |w_j^1| + (1 - \lambda) \log |w_j^2|$ với mọi $j \leq n$, với mọi $\lambda \in [0, 1]$ $\forall$

Nhận xét Ω° là tập lớn nhất của mở rộng chỉnh hình, nghĩa là có một hàm chỉnh hình mà không thể mở rộng ra khỏi Ω° (chứng minh kết quả này có thể xem trong hệ quả 4.5.8 của [4]). Mặt khác hàm này được biểu diễn bởi một chuỗi lũy thừa duy nhất. Do đó miền Reinhardt lõi loga đầy đủ chính là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Chương 2. Dạng Levi và mở rộng Hartogs

Nội dung chính của chương là mục 2.2, trình bày dạng Levi của một hàm thuộc lớp C^2 trên một miền của $\mathbb{C}^n$. Mục 2.3 đưa ra để vận dụng trong chứng minh các định lý về thác triển hàm chỉnh hình, đặc biệt định lý 3.2.2.

Nhắc lại rằng một hàm h thuộc lớp C^2 trên miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ xác định bởi $h(z) = h(x, y)$ với $z = x + iy \in \Omega$, được gọi là hàm điều hòa nếu $\partial_z \partial_{\bar{z}} h = 0$.

2.1. Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 2.1.1. Một hàm thực φ trên $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ có giá trị trong $[-\infty, +\infty)$ là điều hòa dưới khi

i) φ là nửa liên tục trên, nghĩa là với mọi z_0 , $\varphi(z_0) \geq \limsup_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)$;

ii) Với mọi $K \Subset \Omega$ và mọi hàm h liên tục trên K và điều hòa trên $\overset{0}{K}$,

$$\varphi|_{\partial K} \leq h|_{\partial K} \text{ kéo theo } \varphi|_K \leq h|_K. \quad (2.1.1)$$

Định lý 2.1.2. Cho $\varphi : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là một hàm nửa liên tục trên. Các tính chất sau đây là tương đương

i) $\varphi \in SH(\Omega)$.

ii) Với mọi đĩa $\Delta_{z_0 r} \Subset \Omega$ và mọi đa thức $P = P(z)$,

$$\varphi|_{\partial\Delta_{z_0 r}} \leq \operatorname{Re} P|_{\partial\Delta_{z_0 r}} \text{ kéo theo } \varphi|_{\bar{\Delta}_{z_0 r}} \leq \operatorname{Re} P|_{\bar{\Delta}_{z_0 r}}$$

iii) Với mọi $\bar{\Delta}_{z_0 r} \Subset \Omega$, ta có

$$\varphi(z_0) \leq (2\pi r)^{-1} \int_{\partial\Delta_{z_0 r}} \varphi ds,$$

trong đó ds là phần tử của cung.

iv) Với mọi $\bar{\Delta}_{z_0 r} \Subset \Omega$, ta có

$$\varphi(z_0) \leq (-2i\pi r^2)^{-1} \iint_{\Delta_{z_0 r}} \varphi d\tau \wedge d\bar{\tau}.$$

iv)_{loc} Với mọi z_0 , tồn tại $r_0 < d(z_0, \partial\Omega)$ sao cho với mọi $r \leq r_0$, tính chất iv) đúng.

Chứng minh.

i) $\Rightarrow$ ii) và iv) $\Rightarrow$ iv)_{loc} là hiển nhiên, trong khi iii) $\Rightarrow$ iv) được chứng minh trực tiếp qua phép lấy tích phân theo dr .

ii) $\Rightarrow$ iii). Ta lấy một hàm liên tục $f(\theta) \geq \varphi(z_0 + re^{i\theta})$ và xấp xỉ hàm

f bởi một hàm đa thức lượng giác thực $g(\theta) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{ik\theta}$ với $a_{-k} = \bar{a}_k$

$$\varphi(z_0 + re^{i\theta}) \leq f(\theta) \leq g(\theta) \leq f(\theta) + \varepsilon. \quad (2.1.2)$$

Ta viết $P(z) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{z - z_0}{r} \right)^k$, do đó $g = \operatorname{Re} P|_{\partial\Delta_{z_0 r}}$ và vì thế (2.1.2) có

thể được viết lại như sau

$$\varphi|_{\partial\Delta_{z_0r}} \leq \operatorname{Re} P|_{\partial\Delta_{z_0r}}$$

Do ii) mà đẳng thức phải đúng trong toàn bộ $\bar{\Delta}_{z_0r}$, đặc biệt tại tâm z_0 cho ta kết quả

$$\begin{aligned}\varphi(z_0) &\leq \operatorname{Re} P(z_0) \\ &= a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta,\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Ở đây đẳng thức cuối cùng được suy ra từ kết quả mọi hàm điều hòa khác hằng đều triệt tiêu khi được lấy tích phân trên toàn bộ chu kỳ. Cuối cùng do đẳng thức thứ ba của (2.1.2), ta có

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \varepsilon.\tag{2.1.4}$$

Kết hợp (2.1.3) và (2.1.4), và khi đó lấy cận dưới đúng theo f và ε ta được kết quả iii)

$iv)_{loc} \Rightarrow i)$. Cho $K \Subset \Omega$ và cho h là hàm điều hòa trên $\overset{0}{K}$, liên tục trên K và thỏa

$$\varphi|_{\partial K} \leq h|_{\partial K}\tag{2.1.5}$$

Giả sử $M = \max_K (\varphi - h)$, ta lập luận bằng phản chứng và giả thiết $M > 0$.

Ta định nghĩa hàm $u = \varphi - h$ và tập hợp $F = u^{-1}(M)$: u là nửa liên tục trên

và F là một tập con compact của $\overset{0}{K}$ do (2.1.5). Cho z_0 là một điểm của ∂F .

Khi đó có một đĩa $\Delta(z_0, r)$ nào đó thỏa $\Delta(z_0, r) \cap (K \setminus F) \neq \emptyset$. Đồng thời, ta giả sử rằng r đủ nhỏ để mà $iv)_{loc}$ đúng với z_0 và r . Khi đó ta được

$$\begin{aligned} M &= u(z_0) \\ &\leq (\pi r^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^r t u dt \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, giá trị trung bình của u phải được lấy trên toàn bộ đĩa mà nó có một phần mở phía ngoài F , tập hợp M các giá trị cực đại của hàm u . Do đó các giá trị trung bình này phải nhỏ hơn M , ta gặp mâu thuẫn. $\square$

Ví dụ 2.1.3. Nếu φ không là nửa liên tục trên, thì trung bình dưới không tương đương với trung bình dưới địa phương. Ví dụ hàm φ trên đĩa Δ với $\varphi = 0$ khi $\operatorname{Re} \tau \leq 0$ và $\varphi = 1$ khi $\operatorname{Re} \tau > 0$ thỏa tính chất $iii)_{loc}$ và $iv)_{loc}$ nhưng không thỏa $iii)$ và $iv)$. Mặt khác, nếu ta áp đặt φ là nửa liên tục trên bằng cách gán cho nó giá trị 1 tại $\operatorname{Re} \tau = 0$ thì nó không thỏa tính chất trung bình dưới địa phương. Một cách tổng quát là hàm điều hòa dưới thì tính chất trung bình dưới và nửa liên tục trên là đối lập nhau.

Mệnh đề 2.1.4. Cho $\{\varphi_\nu\}$ là hàm điều hòa dưới và bị chặn đều. Khi đó $\limsup_\nu \varphi_\nu$ là hàm điều hòa dưới nếu nó là nửa liên tục trên.

Chứng minh. Với mọi z ta có:

$$\limsup_\nu \varphi_\nu(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \limsup_\nu \varphi_\nu(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad (2.1.6)$$

vì tính chất hàm điều hòa dưới của φ_ν và bổ đề Fatou. $\square$

Chú ý 2.1.5. Nếu $\limsup_\nu \varphi_\nu$ không phải là nửa liên tục trên, nhưng nó khả tích và còn thỏa (2.1.6) thì nó luôn có tính chất trung bình dưới.

Bổ đề 2.1.6. Nếu $\{\varphi_\nu\}_\nu$ là một dãy giảm của các hàm điều hòa dưới thì $\varphi = \inf_\nu \varphi_\nu$ cũng là hàm điều hòa dưới.

Chứng minh. Chú ý với mọi c ta có $\{z : \varphi(z) < c\} = \bigcup_\nu \{z : \varphi_\nu(z) < c\}$ là một tập mở, do đó φ là nửa liên tục trên. Bây giờ nếu $h|_{\partial K} \geq \varphi|_{\partial K}$ và $\varepsilon > 0$ thì $K_\nu = \{z \in \partial K : \varphi_\nu(z) \geq h(z) + \varepsilon\}$ là compact và giảm. Do giới hạn khi $\nu \rightarrow +\infty$ là rỗng nên tập K_ν phải rỗng khi ν đủ lớn. Do đó $\varphi_\nu|_K \leq h|_K + \varepsilon$ với mọi giá trị của ν . $\forall$

Định lí 2.1.7. Cho χ là một hàm số từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa $\chi^g \geq 0$ và $\chi^g \geq 0$ (được mở rộng tại $-\infty$ như sau $\chi(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi(t)$). Giả sử φ là hàm điều hòa dưới, khi đó $\chi(\varphi)$ cũng là hàm điều hòa dưới.

Chứng minh. Vì χ lồi nên với mọi t_0 và với c thích hợp, ta có:

$$\chi(t_0) \leq \chi(t) - c(t - t_0) \quad (2.1.7)$$

Thay t bởi $\varphi(z + re^{i\theta})$ vào trong (2.1.7) và lấy tích phân theo θ ta được

$$\chi(t_0) \leq (2\pi)^{-1} \left[\int_0^{2\pi} \chi(\varphi)(z + re^{i\theta}) d\theta - c \left(\int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{i\theta}) d\theta - 2\pi t_0 \right) \right]. \quad (2.1.8)$$

Bây giờ ta chọn $t_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{i\theta}) d\theta$ và được

$$\begin{aligned} \chi(\varphi(z)) &\leq \chi \left((2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(z + re^{i\theta}) d\theta \right) \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \chi(\varphi)(z + re^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức đầu tiên sinh ra từ hàm điều hòa dưới φ và thực tế là χ tăng và bất đẳng thức thứ hai là từ (2.1.8) qua sự lựa chọn t_0 . $\square$

Bổ đề 2.1.8. Nếu $f \in \text{hol}(\Omega)$, thì $\log|f| \in SH(\Omega)$.

Chứng minh. Giả sử K là một tập compact của Ω và P là một đa thức thỏa

$$\log|f|_{\partial K} \leq \text{Re } P|_{\partial K}. \quad (2.1.9)$$

Ta áp dụng cho cơ số e mũ và được $e^{\text{Re } P} = |e^P|$, do đó (2.1.9) cho ra kết quả

$$\left| \frac{f}{e^P} \right|_{\partial K} \leq 1. \quad (2.1.10)$$

Do nguyên lý cực đại nên (2.1.10) vẫn còn đúng khi thay ∂K thành K , và từ (2.1.9) và (2.1.10) ta suy ra được

$$\log|f|_K \leq \text{Re } P|_K.$$

Vì thế $\log|f|$ là hàm điều hòa dưới do tính chất ii) của định lý 2.1.2. $\square$

Định lý 2.1.9. Cho $\varphi \in C^2(\Omega)$, khi đó φ là hàm điều hòa dưới nếu và chỉ nếu

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \geq 0 \quad (2.1.11)$$

(Chú ý rằng $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ sai khác một thừa số không đổi với toán tử Laplace đã biết: $\partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$.)

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh từ tính chất trung bình dưới kéo theo công thức (2.1.11). Ta viết lại tính chất trung bình dưới ở tính chất iii) của định lý (2.1.2) như sau

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(z_0 + re^{i\theta}) - \varphi(z_0)] d\theta \geq 0. \quad (2.1.12)$$

Nếu ta biểu thị hiệu số biểu thức trong dấu ngoặc của công thức (2.1.12) bằng khai triển Taylor đến cấp 2 thì (2.1.12) trở thành

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} ([\partial_z \varphi(z_0) re^{i\theta} + \partial_{\bar{z}} \varphi(z_0) re^{-i\theta}] + \\ & + \frac{1}{2} [\partial_z^2 \varphi(z_0) r^2 e^{2i\theta} + \partial_{\bar{z}}^2 \varphi(z_0) r^2 e^{-2i\theta} + 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi(z_0) r^2]) d\theta + o(r^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Bây giờ, số hạng duy nhất còn lại sau khi lấy tích phân là hàm không điều hòa, do đó công thức (2.1.13) áp dụng với r đủ nhỏ thì $\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \geq 0$.

Ngược lại, giả sử $\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \geq 0$. Viết $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, khi đó:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$. Theo quy tắc đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} \partial_\theta = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta, \\ \partial_y &= \frac{\partial r}{\partial y} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial y} \partial_\theta = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta. \end{aligned}$$

Thế vào $\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} (\partial_x^2 + \partial_y^2)$ ta được biểu thức $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ trong tọa độ (r, θ) là

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right).$$

Từ giả thiết ban đầu suy ra được

$$\int_0^{2\pi} \left(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2 \right) \varphi(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \geq 0. \quad (2.1.14)$$

Chú ý dưới dấu tích phân, số hạng chứa đạo hàm theo θ triệt tiêu. Ta kí hiệu $M(r)$ là giá trị trung bình của φ trên đường tròn tâm z_0 , bán kính r , khi đó:

$$M(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Do đó (2.1.14) ghi lại: $r \overset{\mathfrak{g}}{M}(r) + \overset{\mathfrak{g}}{M}(r) \geq 0.$

Tuy nhiên số hạng của vế trái biểu thức trên là đạo hàm của $r \overset{\mathfrak{g}}{M}(r)$. Do đó $r \overset{\mathfrak{g}}{M}(r)$ là tăng và vì nó bằng 0 tại $r = 0$ nên suy ra được $\overset{\mathfrak{g}}{M}(r) \geq 0$ và từ đó $M(r)$ cũng tăng. Nhưng $M(0) = \varphi(z_0)$ và vì thế bất đẳng thức $M(0) \leq M(r)$ chính xác là tính chất trung bình dưới. $\square$

Chú ý 2.1.10. Khẳng định của định lí 2.1.7 là đúng khi ta cho φ là hàm điều hòa dưới thuộc lớp C^2 . Thật vậy: giả sử $\overset{\mathfrak{g}}{\chi} \geq 0$ và $\overset{\mathfrak{g}}{\chi} \geq 0$, ta có:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \chi(\varphi) = \overset{\mathfrak{g}}{\chi} \partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi + \overset{\mathfrak{g}}{\chi} \partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi \geq 0.$$

Định lí 2.1.11. Cho $\{\varphi_\nu\}_\nu$ là một dãy các hàm điều hòa dưới và bị chặn đều trên mọi tập compact của Ω . Cho $\limsup_\nu \varphi_\nu(z) \leq l$ với mọi $z \in \Omega$. Khi đó với mọi ε và mọi $K \Subset \Omega$, tồn tại $\nu_{\varepsilon K}$ thỏa

$$\sup_{z \in K} \varphi_\nu(z) \leq l + \varepsilon \text{ với mọi } \nu \geq \nu_{\varepsilon K}. \quad (2.1.15)$$

Chứng minh. Cố định $z_0 \in K$; với $|z - z_0| < \delta$ và $r < d(z_0, \partial\Omega) - \delta$ với $\delta \ll r$, ta có tính chất trung bình dưới:

$$\begin{aligned}
 \varphi_\nu(z) &\leq (\pi r^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^r t \varphi_\nu(z + te^{i\theta}) d\theta \wedge dt \\
 &\leq (\pi(r+\delta)^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{r+\delta} t \varphi_\nu(z + te^{i\theta}) d\theta \wedge dt + O(\delta),
 \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

ở đây có phần điều chỉnh $O(\delta)$ đối với sai số khi chuyển từ việc lấy tích phân trên $B(z, r)$ sang lấy tích phân trên $B(z_0, r + \delta)$ là do tính chặn đều của φ_ν . Theo bổ đề Fatou, nên từ (2.1.16), ta có thể suy ra

$$\begin{aligned}
 \limsup_\nu \sup_{z \in B(z_0, \delta)} \varphi_\nu(z) &\leq (\pi(r+\delta)^2)^{-1} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{r+\delta} \limsup_\nu t \varphi_\nu(z_0 + te^{i\theta}) d\theta \wedge dt + O(\delta) \\
 &\leq l + O(\delta).
 \end{aligned}$$

Do lập luận về một phủ hữu hạn đối với K và do tính tùy ý của δ ta kết luận được

$$\limsup_\nu \sup_{z \in K} \varphi_\nu(z) \leq l. \quad \forall$$

Để chuẩn bị cho chứng minh định lý Hartogs ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 2.1.12 *Cho f là hàm chỉnh hình theo từng biến và bị chặn trên tập con compact của Ω . Khi đó f liên tục và do đó f chỉnh hình trên Ω .*

Chứng minh. Bằng cách lặp lại, ta có thể giả thiết Ω là một tập con của $\mathbb{E}^2$. Giả sử $z^0 \in \Omega$ và $z_1^\nu \rightarrow z_1^0$, giả sử z_2 tiến gần z_2^0 sao cho khoảng cách $d((z_1^\nu, z_2), \partial\Omega) > r$ và giả sử $|f|$ bị chặn đều bởi c trong r -lân cận của các điểm này. Đặt $F_\nu(z_2) := f(z_1^\nu, z_2)$, theo bất đẳng thức Cauchy ta suy ra:

$$\left| \partial_{z_2} F_\nu(z_2) \right| \leq \frac{c}{r}.$$

Do đó $\{F_\nu\}_\nu$ liên tục đồng bậc và đặc biệt, nếu ta cho $z_2^\nu \rightarrow z^0$ thì ta cũng thu được kết quả $f(z_1^\nu, z_2^\nu) \rightarrow f(z_1^0, z_2^0)$. $\forall$

Định lý 2.1.13 (Định lý Hartogs). *Giả sử f là một hàm chỉnh hình theo từng biến trên miền $\Omega \subset \mathbb{E}^n$. Khi đó f chỉnh hình trên Ω .*

Chứng minh. Giả sử $\Omega \ni \bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$ trong $\mathbb{E}^2$, ta chứng minh f là hàm chỉnh hình trên $\Delta \times \Delta$. Với một số dương đủ lớn l , ta định nghĩa $E_l = \left\{ z_2 \in \Delta : \sup_{z_1 \in \Delta} |f(z_1, z_2)| \leq l \right\}$. Tính liên tục của hàm $f(z_1, \cdot)$ với z_1 cố định kéo theo là nếu $z_2^\nu \rightarrow z_2^0$ với $z_2^\nu \in E_l$ thì $z_2^0 \in E_l$. Do đó E_l là tập đóng. Tính liên tục của hàm $f(\cdot, z_2)$ trên $\bar{\Delta}$ với z_2 cố định kéo theo là $\bigcup_l E_l = \Delta$.

Do đó áp dụng định lý Baire, ta suy ra E_l có phần trong khác rỗng với l đủ lớn. Khi đó ta áp dụng bổ đề 2.1.12 suy ra được f là hàm chỉnh hình trên $\Delta \times E_l^0$. Tương tự ta xét E_l trên mọi tập con mở của Δ , khi đó f là hàm chỉnh hình trên $\Delta \times B$ với B là một tập con mở trù mật trong Δ . Tập này chứa một dải nằm ngang tùy ý đóng $z_2 = 0$. Trong bước này ta có thể không quan tâm tới f là hàm chỉnh hình từng biến theo z_1 , trong khi đó vẫn giữ giả thiết f là chỉnh hình từng biến đối với $z_2 \in \Delta$ và chứng minh f chỉnh hình trên $\Delta \times \Delta$. Hơn nữa, phát biểu định lý này, không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng dải có tâm tại 0, tức là dạng $\Delta \times \Delta_\varepsilon$. Như vậy định lý 2.1.13 là hệ quả của định lý sau.

Định lý 2.1.14 *Cho f là hàm chỉnh hình trên $\Delta \times \Delta_\varepsilon$ và chỉnh hình từng biến theo $z_2 \in \Delta$ khi z_1 được cố định trên Δ . Khi đó $f \in \text{hol}(\Delta \times \Delta)$.*

Chứng minh. Do ta cần chứng minh f là hàm chỉnh hình trên mỗi đa đĩa compact tương đối nên ta có thể giả thiết f là hàm chỉnh hình trên một dải lớn hơn $\Delta \times \Delta_\varepsilon$ một ít. Khi đó ta xét chuỗi Taylor của hàm f đối với z_2 tại $z_2 = 0$:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial_{z_2}^\nu}{\nu!} z_2^\nu \quad (2.1.17)$$

Chuỗi (2.1.17) hội tụ chuẩn tắc theo $(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta_\varepsilon$, tức là, hội tụ tuyệt đối đều trên tập con compact của $\Delta \times \Delta_\varepsilon$. Khi đó ta viết:

$$\varphi_\nu(z_1) = \left(\frac{|\partial_{z_2}^\nu f(z_1, 0)|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Họ các hàm $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ là hàm điều hòa dưới và theo bất đẳng thức Cauchy thỏa:

$$\limsup_{\nu} \sup_{z_1 \in \Delta} \varphi_\nu \leq \varepsilon^{-1}.$$

Với giả thiết f chỉnh hình theo z_2 , với mọi z_1 cố định, ta có

$$\limsup_{\nu} \varphi_\nu(z_1) \leq 1.$$

Nhưng khi đó, theo định lý 2.1.11 ta có

$$\limsup_{\nu} \sup_{\Delta} \varphi_\nu \leq 1.$$

Do đó theo định lý Hadamard, chuỗi lũy thừa (2.1.17) hội tụ chuẩn tắc theo $(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta$ và do đó tổng của chúng là một hàm chỉnh hình trên $\Delta \times \Delta$.

∎

Như vậy định lý 2.1.14 đã được chứng minh, do đó định lý 2.1.13 cũng được chứng minh. ∎

2.2. Dạng Levi

Định nghĩa 2.2.1. Cho r là một hàm thực thuộc lớp C^2 trong một miền của $\mathbb{C}^n$, ta định nghĩa dạng Levi của hàm r tại điểm z_0 như là dạng Hecmit:

$$L_r(z_0) = \sum_{ij} \partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_j} r dz_i \otimes d\bar{z}_j. \quad (2.2.1)$$

Định lí 2.2.2. Dạng Levi (2.2.1) thì bất biến qua phép biến đổi chỉnh hình các tọa độ: Nếu $z \in \mathbb{C}^n$ là một vi phôi chỉnh hình và nếu ρ là r trong hệ mới (tức là $F^*\rho = r$) thì:

$$F^*L_\rho = L_r \quad (2.2.2)$$

(ở đây F^* kí hiệu cái kéo lại của F)

Chứng minh. Ta cần phải chứng minh

$$L_\rho(F'u, \overline{F'v}) = L_r(u, \bar{v}) \text{ với mọi } (u, \bar{v}) \in \mathcal{E}^n \times \overline{\mathcal{E}}^n \quad (2.2.3)$$

Bây giờ, các hệ số trong đẳng thức $L_r = L_{\rho \circ F}$ được tính theo quy tắc hàm hợp

Đầu tiên, viết $\rho(z)$ thay cho $F(z)$, ta được

$$\partial_{z_h} \partial_{\bar{z}_k} (\rho \circ F) = \partial_{z_h} \left[\sum_i \partial_{\bar{z}_k} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i} + \sum_i \partial_{\bar{z}_k} \overline{\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i}} \right].$$

Nhưng tổng đầu tiên triệt tiêu vì $\partial_{\bar{z}_k} \rho = 0$. Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \partial_{z_h} \sum_i \left(\partial_{\bar{z}_k} \rho \right) \overline{\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i}} &= \sum_{ji} \partial_{z_h} \partial_{\bar{z}_k} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i} \overline{\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}} \\ &+ \sum_{ji} \partial_{z_h} \partial_{\bar{z}_k} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_i} \overline{\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}} + \sum_{ji} \partial_{\bar{z}_i} \rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k} \overline{\rho \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}} \end{aligned}$$

Mặt khác, những tổng ở dòng thứ hai bị triệt tiêu. Viết $F(z)$ thay cho $\rho(z)$, ta có được đồng nhất cho các ma trận

$$L_r = \overline{J(F)}^t \cdot L_\rho \cdot J(F), \quad \text{với } J(F) \text{ là jacobin của } F$$

Biểu thức trên là cách viết khác của (2.2.3).

W

Dạng Levi được gọi là “ma trận phức Hess” của r . Ma trận Hess toàn phương, số hạng bậc hai trong khai triển của r , viết trong tọa độ $(z, \bar{z}) \in \mathcal{E}^n \times \bar{\mathcal{E}}^n$ là

$$\text{hess } r = \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_{z_i} \partial_{z_j} r dz_i \otimes dz_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_{\bar{z}_i} \partial_{\bar{z}_j} r d\bar{z}_i \otimes d\bar{z}_j + \sum_{ij} \partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_j} r dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

Tổng của hai số hạng đầu của vế phải là đa thức điều hòa được gọi là “đa thức Levi”. Ta kí hiệu $LP_r = \text{Re} \sum_{ij} \partial_{z_i} \partial_{z_j} r dz_i \otimes dz_j$; như vậy $r = LP_r + L_r$.

Mệnh đề 2.2.3. *Ta có*

$$L_r(u, \bar{u}) = \frac{1}{2} [\text{hess } r(u, u) + \text{hess } r(iu, iu)].$$

Chứng minh. Ta có

$$LP_r(iu, iu) = -LP_r(u, u), \quad (2.2.4)$$

$$L_r(iu, \overline{i u}) = L_r(u, \bar{u}). \quad (2.2.5)$$

Từ đó suy ra được

$$\begin{aligned} & \text{hess } r(u, u) + \text{hess } r(iu, iu) \\ &= (LP_r(iu, iu) + LP_r(u, u)) + (L_r(iu, \overline{i u}) + L_r(u, \bar{u})) \\ &= 2L_r(u, \bar{u}). \end{aligned} \quad \square$$

Cho $M \subset \mathcal{E}^n$ là một siêu mặt. Ta giả sử M được xác định địa phương bởi phương trình $r = 0$ với $\partial r \neq 0$. Ta kí hiệu $T^\mathcal{E} M$ là phân thớ tiếp xúc phức của M xác định bởi $TM \perp iTM$. Với $z \in M$ thớ $T_z^\mathcal{E} M$ là không gian trực giao với $\partial r(z)$ qua tích Hecmit ký hiệu $\partial r(z)^\perp$

Định nghĩa 2.2.4. Dạng Levi của siêu mặt M tại điểm $z \in M$ được định nghĩa bởi

$$L_M(z) = L_r(z) \Big|_{T_z^\varepsilon M},$$

trong đó $T_z^\varepsilon M$ là không gian tiếp xúc của M tại $z \in M$.

Định lí 2.2.5 (Tọa độ chuẩn tắc đối với siêu mặt). Cho M là một siêu mặt của $\mathbb{E}^n$ và z_0 là một điểm của M . Khi đó, qua một phép biến đổi chỉnh hình (phép biến đổi bậc hai) và với kí hiệu $z = (z_1, z')$, về địa phương tại $z_0 = 0$ ta có thể viết phương trình của M có dạng

$$y_1 = \left(-\sum_{j=2}^{s^++1} |z_j|^2 + \sum_{j=s^++2}^{s^++s^-+1} |z_j|^2 \right) + o^2(x_1, z'). \quad (2.2.6)$$

trong đó s^+, s^- lần lượt là số các giá trị riêng dương và âm của L_M .

Chứng minh. Bằng một sự biến đổi tuyến tính về tọa độ, ta có thể giả thiết rằng $z_0 = 0$ và tại đó phương trình $r = 0$ của M thỏa $2 \operatorname{Re} \partial r(0) = dy_1$.

Do đó M là đồ thị địa phương của: $y_1 = f(z', \bar{z}', x_1)$ với $\partial f(0) = 0$.

Do đó $f = O^2$ và vì vậy ta có thể phân tích:

$$f = \left(Q(z', \bar{z}') + L(z', \bar{z}')x_1 + Cx_1^2 \right) + o^2(x_1, z'),$$

trong đó Q là bậc hai, L tuyến tính, C là hằng số và tất cả đều thực. Ta có thể viết một cách rõ ràng

$$Q = \sum_{ij} a_{ij} z'_i z'_j + \sum_{ij} \bar{a}_{ij} \bar{z}'_i \bar{z}'_j + \sum_{ij} 2b_{ij} z'_i \bar{z}'_j$$

(với $b_{ji} = \bar{b}_{ij}$) và $L = \sum_i c_i z'_i + \bar{c}_i \bar{z}'_i$.

Bây giờ ta thực hiện phép biến đổi tọa độ bậc hai như sau

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow z_1 - i \left(\sum_i 2c_i z_i z_1 + C z_1^2 \right), \\ z' \rightarrow z'. \end{cases}$$

Từ định lý hàm ẩn phương trình của M trở thành

$$y_1 = Q(z', \bar{z}') + o^2(x_1, z').$$

Bây giờ muốn khử đa thức Levi trong Q , ta thực hiện phép biến đổi bậc hai

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow z_1 - i \sum_{ij} 2a_{ij} z'_i z'_j, \\ \end{cases}$$

và phương trình viết lại: $y_1 = 2 \sum_{ij} b_{ij} z'_i \bar{z}'_j + o^2(x_1, z')$.

Để kết thúc phần chứng minh này, ta thực hiện phép biến đổi trực giao các tọa độ bên trong mặt phẳng $\mathbb{R}^{n-1}$; $T_0 M$ theo các biến z' chéo hóa được ma trận Levi $(b_{ij})_{ij} = L_M$ và qua phép giãn tạo thành các giá trị riêng unita. Điều này đưa đến dạng chuẩn tắc (2.2.6) trong phát biểu của định lý. $\square$

Ví dụ 2.2.6. Cho Ω được xác định bởi $y_1 < -2x_2^2 + y_2^2 + \dots$ trong đó những dấu $\dots$ kí hiệu cho các số hạng có bậc lớn hơn hoặc bằng 3 trong $z_2, \bar{z}_2$; ta cũng viết được bất đẳng thức trong định nghĩa Ω là $r < 0$. Vì thế, với cấu trúc thực của mặt phẳng x_2, y_2 , tập $M = \partial\Omega$ không lõm mà cũng không lõm. Nhưng nó thì lõm hơn là lõm và do đó nó lõm theo nghĩa phức. Thực vậy nếu $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ thì:

$$\begin{aligned} L_M(e_2, \bar{e}_2) &= \frac{1}{2} [hess r(e_2, e_2) + hess r(ie_2, ie_2)] \\ &= \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Vì thế e_2 là một vécơ riêng dương đối với dạng Levi. Theo như dạng chuẩn đã chứng minh trong định lý 2.2.5 phải có một phép biến đổi tọa độ $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mà qua phép biến đổi đó bất đẳng thức định nghĩa miền xác định thay đổi thành

$$y_1 < -|z_2|^2 + \dots \quad (2.2.7)$$

Để đạt mục đích này ta chỉ cần xét phép biến đổi:

$$\begin{cases} \varphi_1 = z_1 + i \frac{3}{2} z_2^2, \\ \varphi_2 = \frac{z_2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

và bất đẳng thức ban đầu biến đổi thành (2.2.7).

Chú ý 2.2.7. Tính chính quy C^2 của $M = \partial\Omega$ tại một điểm z_0 nào đó dẫn đến tính chất của Ω chứa một quả cầu tiếp xúc với M tại điểm z_0 từ phần trong của Ω . Bán kính của nó là bán kính có độ cong nhỏ nhất theo các hướng khác nhau. Mặt khác, tính dương ngặt của dạng Levi $L_M(z_0) > 0$ qua phép biến đổi chỉnh hình tọa độ tương đương với điều là Ω được chứa trong một lân cận của $z_0 = 0$ trong tập hợp được xác định bởi:

$$\begin{aligned} y_1 &< -\varepsilon |z'|^2 - x_1^2 + o^2 \\ &< -\frac{\varepsilon}{2} (|z'|^2 + x_1^2). \end{aligned}$$

Vì vậy, bây giờ Ω được chứa trong một quả cầu (tâm $-i\frac{2}{\varepsilon}$ và bán kính $\frac{2}{\varepsilon}$).

Xét Ω là miền trong $\mathcal{E}^n$, U là miền trong $\mathcal{E}^{n-1}$, Δ là một đĩa trong $\mathcal{E}$ và

$$\Phi : \Delta \times U \rightarrow \Omega$$

$$w \quad a \quad z = \Phi(w)$$

là một ánh xạ 1 – 1 sao cho với mỗi đĩa Δ ta định nghĩa $A_{w'} = \Phi_{w'}(\Delta)$ với $\Phi_{w'}(\cdot) = \Phi(\cdot, w')$.

Ta cũng có thể giả thiết rằng Φ mở rộng như một vi phôi chỉnh hình tại một lân cận của $\partial\Delta$ và đặt $\partial A_{w'} = \Phi_{w'}(\partial\Delta)$. Với một tập mở $\Omega_0 \subset \Omega$, giả sử

$$\begin{cases} \partial A_{w'} \in \bar{\Omega}_0 \text{ với mọi } w' \in U \\ \bar{A}_{w'} \in \bar{\Omega}_0 \text{ với } w' \text{ trong tập mở } U' \subset U. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Trong trường hợp này, ta gặp một trong số các hiện tượng sơ cấp nhất của sự mở rộng chỉnh hình mà về cơ bản nó là hệ quả của công thức Cauchy:

$$hol(\Omega_0) \overset{\text{ext}}{---} > hol(\Omega).$$

Định lí 2.2.8 (Định lí Hartogs mở rộng). *Cho Ω là một miền với biên thuộc lớp C^2 , $z_0 \in M = \partial\Omega$ và giả sử rằng L_M có ít nhất một giá trị riêng âm. Khi đó, với mọi lân cận B của z_0 có một lân cận $B' \subset B$ thỏa:*

$$hol(\Omega \cap B) \overset{\text{ext}}{---} > hol((\Omega \cap B) \cup B').$$

Chứng minh. Từ giả thiết về dạng Levi, ta có thể giả sử Ω chứa trong một lân cận của z_0 , tập $y_n < |z_1|^2 - Q(z_2, \dots, z_{n-1}) - o^2(x_n, z_2, \dots, z_{n-1})$, trong đó Q kí hiệu cho số hạng bậc hai theo $z_2, \dots, z_{n-1}$. Ta xét số hạng bậc hai này và o^2 như một sai số $\varepsilon = \varepsilon(x_n, z_2, \dots)$ và định nghĩa

$U = \{z' \in \mathbb{E}^{n-1} : y_n < 1 - \varepsilon\}$ và $U' = \{z' : y_n < -\varepsilon\}$. Bây giờ, họ của các đĩa thẳng mà trong đó z_1 được sắp xếp có thứ tự trên Δ và z' được cố định trong U thỏa: $\partial A_{z'} \in \Omega$ với $z' \in U$, $A \in \Omega$ với $z' \in U'$.

Mặt khác, rõ ràng là họ $\{A_{z'}\}$ phủ một lân cận B' của $z_0 = 0$. Khi đó kết luận là một hệ quả của tiêu chuẩn mở rộng kèm theo đã được chứng minh. $\square$

2.3. Trung bình trên loga của bán kính Taylor của các hàm chỉnh hình

Định nghĩa 2.3.1. Ta nói một hàm thực nửa liên tục trên φ trong $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ là đa điều hòa dưới khi thu hẹp nó trên mọi đĩa $A = \Phi(\Delta) \subset \Omega$ là hàm điều hòa dưới.

Ta cũng định nghĩa φ là đa điều hòa trên khi $-\varphi$ là đa điều hòa dưới. Khi φ thuộc lớp C^2 thì tính đa điều hòa dưới được đặc trưng bởi biểu thức $\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_j} \varphi \geq 0$ với mọi i, j . Do đó tính điều hòa dưới dọc theo đĩa thẳng $\tau a + w_0 + \tau w$, thật ra chỉ là các tia tọa độ với $w = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$. Tuy nhiên điều này luôn luôn đúng không chỉ với các hàm thuộc lớp C^2 .

Mệnh đề 2.3.2. Cho $\varphi \neq -\infty$ là hàm nửa liên tục trên và điều hòa dưới dọc theo mỗi tia Decac. Khi đó có một dãy hàm đa điều hòa dưới $\{\varphi_\nu\}_\nu$ thuộc lớp C^∞ trên $\Omega_\nu = \left\{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \frac{1}{\nu}\right\}$ thỏa $\varphi_\nu \nearrow \varphi$. Đặc biệt φ là hàm đa điều hòa dưới.

Chứng minh. Ta lấy hàm $\chi \in C_c^\infty$ của $|z_1|, \dots, |z_n|$ có giá chứa trong $|z| < 1$, thỏa $\chi \geq 0$ và $\int \chi \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(-2i)^n} = 1$, đặt

$$\varphi_\nu(z) = \int_{\Delta \times \dots \times \Delta} \varphi\left(z - \frac{\zeta}{\nu}\right) \chi(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(-2i)^n}.$$

Rõ ràng là mỗi φ_ν thuộc lớp C^∞ trong Ω_ν . Bây giờ ta chứng minh rằng φ_ν là đa điều hòa dưới. Vì nó là trơn nên ta chỉ cần kiểm tra tính chất này dọc theo mỗi mặt phẳng phức Decac. Bằng cách lấy tích phân lặp lại ta chỉ cần chứng minh điều này trong trường hợp 1-chiều đối với việc lấy tích phân theo một biến đơn $\zeta \in \Delta$. Ta có điều này vì

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\nu(w_0 + r e^{i\theta}) d\theta \\ &= \iint_{\Delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(w_0 + r e^{i\theta} - \frac{\zeta}{\nu}\right) d\theta \right) \chi(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{-2i} \\ &\geq \iint_{\Delta} \varphi\left(w_0 - \frac{\zeta}{\nu}\right) \chi(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{-2i} = \varphi_\nu(w_0). \end{aligned}$$

Ta trở lại trường hợp n-chiều. Do φ_ν là đa điều hòa dưới nên khi đó $(\varphi_\nu)_{\frac{1}{\varepsilon}}$ giảm khi $\varepsilon \downarrow 0$ (bằng việc lặp lại trung bình dưới 2-chiều trên ε -đĩa). Cho $\nu \rightarrow \infty$, chính $(\varphi_\nu)_{\frac{1}{\varepsilon}}$ giảm: viết ν vào vị trí $\frac{1}{\varepsilon}$, ta kết luận $(\varphi_\nu)_{\frac{1}{\varepsilon}} \searrow \varphi$. Cuối cùng ta chỉ ra rằng φ là đa điều hòa dưới. Nó là nửa liên tục trên với lý do tương tự như trong trường hợp một biến (xem chứng minh trong bổ đề 2.1.6). Hơn nữa, qua phép hợp thành với tham số hóa của một đĩa $A = \Phi(\Delta)$, ta có:

$$(\varphi_\nu)_{\frac{1}{\varepsilon}} \circ \Phi \searrow \varphi \circ \Phi.$$

Do mỗi $(\varphi_\nu)_{\frac{1}{\varepsilon}} \circ \Phi$ là điều hòa dưới nên khi đó qua giới hạn đơn điệu $\varphi \circ \Phi$ là điều hòa dưới do bổ đề 2.1.6. W

Cho Ω là một tập mở, u là một vector đơn vị trong $\mathbb{E}^n$, f là một hàm chỉnh hình trong Ω . Ta xét đến hàm

$$r_f^u(z) = \left(\limsup_v \left| \frac{\partial_u^v f(z)}{v!} \right|^{\frac{1}{v}} \right)^{-1}, \quad z \in \Omega \quad (2.3.1)$$

Hàm $r_f^u(z)$ biểu diễn cho bán kính của đĩa lớn nhất theo phương u mà trên đó chuỗi Taylor của hàm f tại điểm z là hội tụ từng biến và do đó f là chỉnh hình từng biến. Khi ta đơn trị hóa trên $u \in S^{2n-1}$ mặt cầu $(2n-1)$ chiều, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.3. Cho f là hàm chỉnh hình trên lân cận của z . Khi đó:

$$\inf_{u \in S^{2n-1}} r_f^u(z) = \sup \{ r : f \in \text{hol}(\mathbb{B}^n(z, r)) \}, \quad (2.3.2)$$

trong đó $\mathbb{B}^n(z, r)$ là quả cầu n chiều, có tâm z và bán kính r .

Chứng minh. Chiều " $\geq$ " rõ ràng suy từ bất đẳng thức Cauchy. Chiều ngược lại, giả sử $r < r_f^u(z)$ với mọi u . Khi đó f là chỉnh hình từng biến dọc theo nửa đường thẳng $z + u\Delta_r$ và hơn nữa f còn là chỉnh hình trên một lân cận của z . Do đó theo định lý 2.1.14 thì f là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{B}^n(z, r)$. $\forall$

Với $z \in \Omega$ và với $\{B\}$ là một hệ các lân cận của z trong mặt phẳng $(n-1)$ chiều trực giao với u , xét $\overset{\vee}{r}_f^u$ được xác định bởi công thức sau:

$$\overset{\vee}{r}_f^u = \sup_B \inf_{z' \in B} r_f^u(z')$$

Ta gọi $\overset{\vee}{r}_f^u(z)$ là bán kính Taylor của f theo phương u trong lân cận của z .

Mệnh đề 2.3.4 Ta có

$$\overset{\vee}{r}_f^u(z') = \sup \{ r : f \text{ là chỉnh hình trên } u\Delta_r \times B \text{ với } B \text{ thích hợp} \}. \quad (2.3.3)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức " $\geq$ " sinh ra từ bất đẳng thức Cauchy. Còn chiều ngược lại " $\leq$ ", ta giả thiết rằng phương của u là phương của trục z_1 và kí hiệu z' là các biến còn lại. Trong mọi đa đĩa có tâm ξ_0 và chứa trong Ω , f là tổng của một chuỗi lũy thừa kép theo $z_1 - \xi_1$ và $z' - \xi'$ mà ta có thể sắp xếp lại như sau:

$$\sum_v \frac{\partial_u^\nu f(z')}{\nu!} (z_1 - \xi_1)^\nu. \quad (2.3.4)$$

Giả sử $r < r_f^u(\xi_0)$ và vì thế $r < \left(\limsup_v \left| \frac{\partial_u^\nu f(z')}{\nu!} \right|^{\frac{1}{\nu}} \right)^{-1}$ với mọi $z' \in \xi'_0 + B$ đối

với lân cận B nào đó của 0. Điều này suy ra

$$\sup_{z' \in B} \limsup_v \left| \frac{\partial_u^\nu f(z')}{\nu!} \right|^{\frac{1}{\nu}} \leq r^{-1}. \quad (2.3.5)$$

Do đó nếu ta áp dụng định lí 2.1.11 ta có thể đổi chỗ "sup" và "lim sup" trong (2.3.5); đặc biệt chuỗi lũy thừa (2.3.4) hội tụ chuẩn tắc theo $z_1 - \xi_1 \in \Delta_r$, hội tụ đều theo $z' \in \xi'_0 + B$ và vì vậy nó xác định một hàm chỉnh hình trên $u\Delta_r \times B$ mà tập này trùng với hàm f . Do đó r thuộc tập hợp trong vế phải (2.3.3), tức là mệnh đề 2.3.4 đã được chứng minh. $\forall$

Cho $z \in \Omega$ và $z_0 \in \partial\Omega$ là cặp điểm sao cho $z_0 - z$ là chuẩn tắc với $\partial\Omega$ tại z_0 .

Ta viết $u = \frac{z_0 - z}{|z_0 - z|}$ và $d(z) = |z_0 - z|$, do đó $d(z)$ là khoảng cách từ z đến $\partial\Omega$. Với một hàm f chỉnh hình trong Ω ta có:

Nếu $r_f^u(z)$ thì f có thể mở rộng chỉnh hình qua $\partial\Omega$ tại z_0 .

Định lí 2.3.5 Hàm $\log r_f^u$ có các tính chất trung bình trên dọc theo mọi đĩa

Chứng minh. Đặt $\varphi_\nu = \frac{1}{\nu} \log \left| \frac{\partial_u^\nu f}{\nu!} \right|$. Vì

$$-\log \left(\limsup_\nu \cdot \right) = -\limsup_\nu (\log \cdot),$$

nên

$$\begin{aligned} \log r_f^u &= \log \left(\limsup_\nu \left| \frac{\partial_u^\nu f}{\nu!} \right|^{\frac{1}{\nu}} \right)^{-1} \\ &= -\limsup_\nu \varphi_\nu. \end{aligned}$$

ở đây

$$\begin{cases} \varphi_\nu \text{ là đa điều hòa dưới (do bổ đề 2.1.8)} \\ \varphi_\nu \text{ là bị chặn đều (do bất đẳng thức Cauchy).} \end{cases}$$

Thu hẹp φ_ν 's trên đĩa A , nghĩa là thực hiện phép hợp thành $\varphi_\nu \circ \Phi$ với tham số hóa Φ . Từ chú ý 2.1.5, ta có

$$\log r_f^u \circ \Phi = -\limsup_\nu \varphi_\nu \circ \Phi \text{ có các tính chất trung bình trên.} \quad \mathbf{W}$$

Chương 3. Miền chỉnh hình và miền giả lồi

Mục 3.1 của chương giới thiệu các khái niệm về miền chỉnh hình, miền giả lồi. Mục 3.2 trình bày đặc trưng của miền giả lồi qua hàm vết kiệt đa điều hòa dưới và mối liên hệ giữa miền giả lồi và miền chỉnh hình.

3.1. Miền chỉnh hình

Ta nói một hàm $f \in \text{hol}(\Omega)$ không mở rộng qua $\partial\Omega$ tại $z_0 \in \partial(\Omega)$ khi với mọi lân cận B_{z_0} của z_0 không tồn tại hàm $\not\in \text{hol}(B_{z_0})$ mà hạn chế của nó trên một thành phần liên thông mở nào đó của $B_{z_0} \cap \Omega$ bằng f . Khi đó ta còn nói f không có mở rộng $\not$ tại z_0 .

Định nghĩa 3.1.1. Một miền $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ được gọi là miền chỉnh hình nếu với mọi điểm biên $z_0 \in \partial\Omega$ mà tại đó tồn tại $f_{z_0} \in \text{hol}(\Omega)$ không mở rộng vượt qua $\partial\Omega$ tại z_0 .

Mọi miền Ω của $\mathbb{E}$ đều là miền chỉnh hình (có $f_{z_0} = \frac{1}{z - z_0}$ như là các hàm tới hạn tại các điểm khác nhau $z_0 \in \partial\Omega$).

Định nghĩa 3.1.2. Nếu $K \Subset \Omega$ thì ta định nghĩa Ω - bao chỉnh hình của K là $\mathcal{K}_\Omega = \left\{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f| \quad \forall f \in \text{hol}(\Omega) \right\}$.

Nếu $\Omega_1 \subset \Omega_2$ thì $\mathcal{K}_{\Omega_1} \subset \mathcal{K}_{\Omega_2}$, bất chấp việc lựa chọn Ω như thế nào cũng dễ dàng kiểm tra được trong mọi trường hợp tập hợp $\mathcal{K}_\Omega$ luôn chứa trong bao lồi mà ta kí hiệu là $\mathcal{K}$. Thật vậy, cho K chứa trong $H_{z_0, \zeta}$, nửa không gian chứa z_0 với pháp tuyến $\zeta : K \subset \{z : \text{Re}\langle z - z_0, \zeta \rangle \leq 0\}$.

Ở đây $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích hermit trong $\mathbb{E}^n$ được định nghĩa bởi $\langle z, \zeta \rangle = \sum_j z_j \bar{\zeta}_j$.

Bổ đề 3.1.3.

$$\inf_K r_f^u = \inf_{\hat{K}_\Omega} r_f^u. \quad (3.1.1)$$

Chứng minh. Chiều “ $\geq$ ” là hiển nhiên. Chiều ngược lại “ $\leq$ ”, giả sử $r < \inf_K r_f^u$. Khi đó ta có

$$|\partial_u^\nu f(w)| \leq \nu! r^{-\nu} \text{ với mọi } w \in K \text{ và } \nu \geq \nu_0. \quad (3.1.2)$$

Từ định nghĩa của $\mathcal{K}_\Omega$ và vì $\partial_u^\nu f \in \text{hol}(\Omega)$, ta có đẳng thức (3.1.2) đúng với mọi $w \in \mathcal{K}_\Omega$. Điều này kéo theo $r < \inf_{\mathcal{K}_\Omega} r_f^u$. $\forall$

Bổ đề 3.1.4. Cho Ω là một miền chỉnh hình. Khi đó

$$d(z, \partial\Omega) = \inf_{u \in S^{2n-1}, f \in \text{hol}(\Omega)} r_f^u(z),$$

trong đó S^{2n-1} là mặt cầu $2n - 1$ chiều thực trong $\mathbb{E}^n$.

Chứng minh. Chiều “ $\leq$ ” suy ra từ bất đẳng thức Cauchy. Ngược lại, Ω là một miền chỉnh hình, nếu $r > d(z, \partial\Omega)$ thì phải tồn tại $f \in \text{hol}(\Omega)$ sao cho $f \notin \text{hol}(\mathbb{B}^n(z, r))$ ($\mathbb{B}^n(z, r)$ là quả cầu tâm z bán kính r trong $\mathbb{E}^n$). Do mệnh đề 2.3.3 nên phải tồn tại u sao cho $r_f^u(z) < r$. $\forall$

Tập $\mathcal{K}_\Omega$ thì luôn đóng trong Ω nhưng không nhất thiết compact trong Ω . Tuy nhiên, điều này xảy ra khi Ω là miền chỉnh hình. Chính xác hơn, nếu kí hiệu d là khoảng cách ơclit thì ta có định lí sau:

Định lí 3.1.5. Cho Ω là một miền chỉnh hình và $K \Subset \Omega$ là một tập con compact. Khi đó

$$d(K, \partial\Omega) = d(\mathcal{K}_\Omega, \partial\Omega).$$

Chứng minh. Áp dụng bổ đề 3.1.3. và 3.1.4 ta có:

$$\begin{aligned} d(K, \partial\Omega) &= \inf_{z \in K} d(z, \partial\Omega) \\ &= \inf_{z \in K} \inf_{v, f} r_f^v(z) \\ &= \inf_{z \in \mathcal{K}_\Omega} \inf_{v, f} r_f^v(z) \\ &= d(\mathcal{K}_\Omega, \partial\Omega). \end{aligned}$$

$\forall$

Định nghĩa 3.1.6. Một miền Ω được gọi là lồi chỉnh hình nếu với mọi tập K compact trong Ω thì tập $\mathcal{K}_\Omega$ cũng compact trong Ω .

Đặc biệt, định lý 3.1.5 nói rằng “một miền chỉnh hình là lời chỉnh hình”. Hơn nữa, do $K_\Omega \subset K$ dẫn đến một miền lời là lời chỉnh hình. Tính lời chỉnh hình ổn định qua phép giao.

Mệnh đề 3.1.7. Nếu Ω_j là các miền lời chỉnh hình với mọi j thì giao $\Omega = \bigcap_j \Omega_j$ cũng là lời chỉnh hình.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} d(K_\Omega, \partial\Omega_j) &\geq d(K_{\Omega_j}, \partial\Omega_j) \\ &= d(K, \partial\Omega_j), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

trong đó bất đẳng thức đầu tiên sinh ra từ bao hàm thức $K_{\Omega_j} \supset K_\Omega$ và đẳng thức thứ hai là một hệ quả của định lý 3.1.5. Nếu ta lấy “ $\inf_j$ ” trong (3.1.3)

thì ta kết luận $d(K_\Omega, \partial\Omega) = d(K, \partial\Omega)$.

(3.1.4)

∎

Định lý 3.1.8. Các tính chất sau là tương đương

- i) Ω là miền lời chỉnh hình
- ii) Ω là một miền chỉnh hình
- iii) Tồn tại $f \in \text{hol}(\Omega)$ mà nó không mở rộng chỉnh hình tới một tập bất kì lớn hơn $\bar{\Omega} \supset \Omega$.

Chứng minh. $iii) \Rightarrow ii)$ là rõ ràng và $ii) \Rightarrow i)$ đã được chứng minh trong định lý 3.1.5. Bây giờ ta chứng minh là $i) \Rightarrow iii)$. Thật vậy, cho P là một đa thức với tâm 0 và kí hiệu P_z với $z \in \Omega$ là đa thức “dạng P ” lớn nhất tâm z và chứa trong Ω . Do đó, $P_z = z + rP$ với $r > 0$ thích hợp và $\bar{P}_z$ cắt $\partial\Omega$ tại một

điểm nào đó. Cho $T \subset \Omega$ là trù mật đếm được: ta muốn xây dựng hàm $f \in hol(\Omega)$ mà nó không thể thác triển đến một lân cận của $\bar{P}_z$ với mọi $z \in T$. Cho $z_1, z_2, \dots$ là một dãy trong T mà mỗi số hạng được lặp lại trong T vô hạn lần và $K^1 \Subset K^2 \dots$ là một dãy các tập compact của Ω sao cho mọi tập con compact của Ω đều thuộc một trong các K^j . Do $\mathbb{R}^j_\Omega \Subset \Omega$ nên tồn tại $\zeta_j \in P_{z_j}$ sao cho $\zeta_j \notin \mathbb{R}^j_\Omega$. Đặc biệt, tồn tại các hàm $f_j \in hol(\Omega)$ sao cho $\sup_{K^j} |f_j| < |f_j(\zeta_j)|$. Bằng việc thay thế f_j bởi các lũy thừa của nó, ta có thể giả sử

$$f_j(\zeta_j) = 1, \quad \sup_{K^j} |f_j| < 2^{-j}.$$

Ta cũng có thể giả sử là $f_j(\zeta_j) \neq 1$ trong mọi thành phần của Ω . Định nghĩa

$$f = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - f_j)^j$$

là tích hội tụ đều trên mỗi K^l do $\sum j 2^{-j} < +\infty$ và xác định

một hàm chỉnh hình f trên Ω . Hàm này có một không điểm cấp j tại ζ_j . Vì thế nó không có mở rộng tới một lân cận của các $\bar{P}_z$ với $z \in T$ bởi vì nếu như thế nó sẽ có một không điểm cấp vô hạn và vì vậy nó đồng nhất 0 trong một thành phần của Ω . Không điểm cấp vô hạn là giới hạn của dãy con bất kỳ của ζ_{j_k} nếu z_{j_k} là dãy mà z được lặp lại vô hạn lần. Các giới hạn này là trù mật trong $\partial\Omega$ vì T trù mật. W

Chú ý 3.1.9. Mệnh đề 3.1.7 kết hợp với định lý 3.1.8 đảm bảo rằng phần trong của giao của các miền chỉnh hình là một miền chỉnh hình. Đặc biệt, nếu Ω là một miền chỉnh hình thì với mọi điểm biên z_0 tồn tại một hệ các lân cận $\{B\}$ sao cho $B \cap \Omega$ là một miền chỉnh hình.

Ví dụ 3.1.10. Cho Ω là một “khối đa diện chỉnh hình” có dạng $\Omega = \{z : |f_j| < 1\}$ đối với một họ các hàm chỉnh hình $f_j \in \text{hol}(\mathbb{E}^n)$, $j = 1, \dots, n$; khi đó Ω là một miền chỉnh hình. Thật vậy, cho $K \Subset \Omega$, ta phải có $\|f_j\|_K \leq 1 - \varepsilon$ với mọi j và ε thích hợp. Bất đẳng thức này vẫn đúng trong $\mathbb{K}_{\mathbb{E}^n}$ nên $\mathbb{K}_{\mathbb{E}^n}$ compact trong Ω . Do đó $\mathbb{K}_\Omega$ cũng compact bởi vì $\mathbb{K}_\Omega \subset \mathbb{K}_{\mathbb{E}^n}$.

Ví dụ trên được khái quát lên sau đây

Mệnh đề 3.1.11. Cho Ω và Ω' là các miền chỉnh hình và $F : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^n$ là một ánh xạ chỉnh hình. Khi đó: $F^{-1}(\Omega')$ là một miền chỉnh hình.

Chứng minh. Với $K \Subset F^{-1}(\Omega')$, ta có:

$$\mathbb{K}_{F^{-1}(\Omega')} \subset F^{-1}(\overline{\mathbb{K}}_{\Omega'}), \quad (3.1.5)$$

vì $F^*(\text{hol}(\Omega')) \subset \text{hol}(F^{-1}(\Omega'))$. Bây giờ, $\overline{\mathbb{K}}_{\Omega'}$ là compact trong Ω' , do đó đóng trong $\mathbb{E}^n$ và vì vậy $F^{-1}(\overline{\mathbb{K}}_{\Omega'})$ là đóng trong Ω . Kết hợp với (3.1.5) suy ra được $\mathbb{K}_{F^{-1}(\Omega')}$ là đóng trong $F^{-1}(\Omega')$, và do đó đóng trong Ω . Mặt khác, do

$$\mathbb{K}_{F^{-1}(\Omega')} \subset \mathbb{K}_\Omega \Subset \Omega,$$

nên ta kết luận được $\mathbb{K}_{F^{-1}(\Omega')} \Subset F^{-1}(\Omega')$. W

Chú ý. Ví dụ 3.1.10 là thu được từ mệnh đề 3.1.11 với cách chọn $\Omega' = \Delta \times \dots \times \Delta$, $F = (f_1, \dots, f_n)$. Tương tự khi F là ánh xạ riêng thì Ω cũng là miền chỉnh hình.

3.2. Miền giả lồi

Kí hiệu $d(z) = d(z, \partial\Omega)$

Định nghĩa 3.2.1. Một miền Ω được gọi là giả lồi khi $-\log d$ là đa điều hòa dưới.

Mỗi miền trong $\mathcal{E}$ đều là giả lồi. Hơn nữa, do đa điều hòa dưới là ổn định qua việc lấy “sup” nên tính giả lồi cũng ổn định qua phép lấy giao: với họ

giả lồi $\{\Omega_j\}_j$, ta có $\bigcap_j \Omega_j$ là giả lồi. Do các quả cầu, và tổng quát hơn các

tập lồi là giả lồi (so sánh định lý 3.2.2), mọi miền giả lồi là “giả lồi địa phương”. Điều ngược lại cũng đúng và sẽ được chứng minh trong mệnh đề

3.2.3. Trước khi trình bày, ta cần định nghĩa khái niệm của hàm vết kiệt, đó là, một hàm $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho các tập hợp $\{z: \psi(z) \leq c\}$ với $c \in \mathbb{R}$ là một hệ cơ bản của các tập con compact của Ω . Ta cũng cần định nghĩa đối đồng điều của hệ $\bar{\partial}$ trên Ω . Cho

$$\dots C^\infty(\Omega)^{k-1} \xrightarrow{\bar{\partial}^{k-1}} C^\infty(\Omega)^k \xrightarrow{\bar{\partial}^k} C^\infty(\Omega)^{k+1} \dots \quad (3.2.1)$$

là $\bar{\partial}$ -phức tác động lên dạng phản chỉnh hình $f = \sum_{|J|=k} f_J d\bar{z}_J$, trong đó f_J là

kí hiệu các đa chỉ số được sắp thứ tự $J = j_1 < \dots < j_k$ và $d\bar{z}_J$ thay cho $d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_k}$. Ở đây hệ số f_J là trong $C^\infty(\Omega)$ và tác động của $\bar{\partial}$ được định

nghĩa bởi $\bar{\partial}f = \sum_{j=1, \dots, n} \sum_{|J|=k} \bar{\partial}z_j f_J d\bar{z}_J \wedge d\bar{z}_j$, đặc biệt $\bar{\partial}^k \circ \bar{\partial}^{k-1} = 0$. Ta định nghĩa

đối đồng điều của (3.2.1) xác định bởi

$$K^k(\Omega) = \frac{\ker \bar{\partial}^k}{\text{range } \bar{\partial}^{k-1}}.$$

Các đặc trưng đầy đủ của tính giả lồi nằm trong các định lý sau:

Định lý 3.2.2. *Các tính chất sau là tương đương*

- i) Ω là giả lồi.
- ii) Tồn tại một hàm vết kiệt ψ của Ω liên tục và đa điều hòa dưới.
- iii) $K^k(\Omega) = 0, k \geq 1$.
- iv) Ω là miền chỉnh hình.

Chứng minh. $i) \Rightarrow ii)$. Nếu Ω bị chặn thì ta chỉ cần đặt $\psi = -\log d$ và nếu ngược lại đặt $\psi = -\log d + \lambda |z|^2$, thì nó là hàm liên tục, đa điều hòa dưới và vết kiệt.

$ii) \Rightarrow iii)$. Điều này thực sự khó (có thể xem chứng minh trong [5]).

$iii) \Rightarrow iv)$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số chiều n và dùng giả thiết này trong 3 trường hợp xảy ra. Ta cố định một điểm biên $z_0 \in \partial\Omega$, giả sử là $z_0 = 0$, và giả thiết rằng Ω có giao khác rỗng $\omega = \Omega \cap \{z : z_n = 0\}$. Cho $j : \omega \rightarrow \Omega$ và $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \{z : z_n = 0\}$ lần lượt là đơn ánh tự nhiên và phép chiếu tự nhiên. Trước hết ta chứng minh là mọi k - dạng f trong ω mà là $\bar{\partial}$ -đóng, nghĩa là thỏa $\bar{\partial}f = 0$, có thể được nâng lên thành một $\bar{\partial}$ -đóng dạng $\mathcal{P}$ trên Ω , nghĩa là $\bar{\partial}\mathcal{P} = 0$ và $j^*\mathcal{P} = f$. Để chứng minh điều đó, ta chú ý rằng ω và $\Omega \setminus \pi^{-1}(\omega)$ là đóng tương đối trong Ω và lấy $\chi \in C^\infty(\Omega)$ bằng 1 tại ω và bằng 0 tại $\Omega \setminus \pi^{-1}(\omega)$. Khi đó $\chi\pi^*f$ là xác định tốt trên ω và cảm sinh f trên ω . Nó không nhất thiết $\bar{\partial}$ -đóng, để đạt được điều đó ta phải sử dụng một kiểu số hạng “chỉnh sửa” $z_n u$ cho một nghiệm u của $\bar{\partial}u = \frac{\bar{\partial}(\chi\pi^*f)}{z_n}$ và đặt:

$$\bar{\partial} f = \chi \pi^* f - z_n u.$$

Sự tồn tại nghiệm u của phương trình trên là được đảm bảo bởi giả thiết triệt tiêu của nhóm đối đồng điều (đối với cấp $k+1$ nếu f có cấp k). Vì vậy f có thể được nâng lên ánh xạ $\bar{\partial}$ -đóng $\bar{\partial} f = 0$. Đồng thời ω thừa kế từ Ω tính triệt tiêu đối đồng điều

$$K^k(\omega) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.2.2)$$

Nếu f thỏa $\bar{\partial} f = 0$ trên ω thì ta nâng nó lên đến Ω , sau đó giải $\bar{\partial} u = f$ trên Ω và cuối cùng xác định được $u = j^* u$. Đây là nghiệm của $\bar{\partial} u = f$ trên ω .

Theo giả thiết quy nạp, (3.2.2) suy ra được ω là miền chỉnh hình (mà nó thì đương nhiên đúng ở bước quy nạp đầu tiên $\omega \subset \mathbb{C}^1$) và vì thế tồn tại một hàm $f \in \text{hol}(\omega)$ mà nó không thể mở rộng tại z_0 . Tiếp theo, sử dụng một lần nữa giả thiết $K^1(\Omega) = 0$, ta tìm được $g \in \text{hol}(\Omega)$ sao cho $g|_{\omega} = f$. Do vậy $\bar{\partial} f$ không thể mở rộng chỉnh hình và Ω là một miền chỉnh hình.

iv) $\Rightarrow$ i). Trong một miền chỉnh hình Ω , ta có (bổ đề 3.1.4)

$$d(z) = \inf_{u, f} r_f^u(z), \quad z \in \Omega.$$

Do đó $-\log d = \sup_{v, f} (-\log r_f^v)$, bây giờ các hàm $-\log r_f^v$ có tính chất trung bình dưới trên các đĩa theo như định lý 2.3.5 và cũng đúng cho cận trên đúng “sup” của chúng. Hơn nữa, do $-\log d$ liên tục, nên nó là đa điều hòa dưới. Định lý đã được chứng minh. W

Mệnh đề 3.2.3. Cho Ω là một miền chỉnh hình của $\mathbb{E}^n$ và giả thiết mỗi điểm trong $\partial\Omega$ có một cơ sở lân cận $\{B\}$ sao cho $B \cap \Omega$ thỏa ii) của định lý 3.2.2 Khi đó Ω cũng thỏa ii).

Chứng minh. Ta kí hiệu $\psi_{B \cap \Omega}$ là hàm vết kiệt đa điều hòa dưới trên mỗi $B \cap \Omega$. Bằng việc lấy một phủ hữu hạn địa phương của $\partial\Omega$ từ B và dán các $\psi_{B \cap \Omega}$ khác nhau bằng việc lấy cận trên “sup” trên các tập chồng lên nhau của chúng, ta tìm được ψ^1 là đa điều hòa dưới trên một lân cận Ω_1 của $\partial\Omega$ trong Ω , sao cho $\psi^1 \rightarrow +\infty$ khi $z \rightarrow \partial\Omega$, và ψ^1 bị chặn địa phương tại $\partial(\Omega \setminus \Omega_1)$. Cho ψ^2 là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{E}^n$ với $\psi^2 \rightarrow +\infty$ khi $z \rightarrow +\infty$, sao cho $\psi^2 > \psi^1$ trên một lân cận V của $\partial(\Omega \setminus \Omega_1)$. Định nghĩa hàm ψ là hàm ψ^2 trên $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1) \cup V$ và là $\sup(\psi^1, \psi^2)$ trên Ω_1 , ψ là một hàm vết kiệt đối với Ω và nó là một hàm đa điều hòa dưới bởi vì tính chất này là ổn định qua phép lấy sup trên hữu hạn chỉ số. $\forall$

Mệnh đề 3.2.3 nêu lên tính giả lồi là một tính chất địa phương. Kết hợp với định lý 3.2.2, nó chỉ ra rằng tính chất để một miền là chỉnh hình cũng là tính chất địa phương. Hơn nữa, nó dẫn đến một dạng của tính chất này đối với các khái niệm mầm.

Trong định lý 3.2.2 ta đã chứng minh là nếu tồn tại một hàm đa điều hòa dưới vết kiệt ψ của Ω thì $-\log d$ cũng là đa điều hòa dưới.

Cho Ω là một miền với biên thuộc lớp C^2 được xác định bởi $r < 0$ với $\partial r \neq 0$ tại những điểm mà tại đó $r = 0$. Đặt $M = \partial\Omega$, giả sử $L_M = L_r|_{T^{\mathbb{E}}_M}$ là dạng Levi của M và giả sử s_M^+, s_M^-, s_M^0 lần lượt là số các giá trị riêng dương, âm và bằng 0 của M . Ta mô tả M như một đồ thị $y_1 = f(x_1, z', \bar{z}')$, đặt

$r = -y_1 + f$, và kí hiệu $z \mapsto z^*$ là phép chiếu lên M theo trục y_1 . Định lý sau đây nêu mối liên hệ giữa dấu hiệu của dạng Levi của hàm vết kiết $\psi = -\log(-r) + \lambda|z|^2$ (với λ phù hợp) với dấu hiệu của dạng Levi của biên L_M .

Định lý 3.2.5. *Ta có*

$$\begin{cases} s_{\psi}^{-}(z) = s_M^{-}(z^*) \\ s_{\psi}^{+}(z) = s_M^{+}(z^*) + s_M^0(z^*) + 1. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Đặc biệt $s_{\psi}^0 \equiv 0$.

Chứng minh. Để chỉ ra mối liên hệ giữa $L_{\psi}(z)$ và $L_M(z^*)$, trước hết ta chú ý rằng với $r = -y_1 + f$, ta có

$$\begin{cases} \left(\partial z_i \bar{\partial} \bar{z}_j r(z) \right)_{ij} = \left(\partial z_i \bar{\partial} \bar{z}_j r(z^*) \right)_{ij}, \\ \partial r^{\perp}(z) = \partial r^{\perp}(z^*). \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Tiếp theo ta chú ý rằng

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \partial z_i \bar{\partial} \bar{z}_j \psi dz_i \otimes d\bar{z}_j &= |r|^{-1} \sum_{ij} \partial z_i \bar{\partial} \bar{z}_j r dz_i \otimes d\bar{z}_j \\ &+ |r|^{-2} \partial r \otimes \bar{\partial} r + \lambda \sum_j dz_j \otimes d\bar{z}_j. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Với vectơ $w \in \mathbb{C}^n$ và với điểm $z^* \in M$, ta phân tích $w = (w^{\tau}, w^u)$ trong đó w^{τ} và w^u lần lượt là tiếp tuyến và các thành phần chuẩn tắc của M tại z^* . Ta có

$$L_{\psi}(w, \bar{w}) \geq |r|^{-1} L_r(w^r, \bar{w}^r) + \left[\left(|r|^{-2} - c|r|^{-1} \right) |w^r|^2 - c|r|^{-1} |w^r| |w^r| + \lambda |w|^2 \right], \quad (3.2.6)$$

trong đó c là một cận trên với đạo hàm cấp 2 của r . Khi đó với $\lambda = \lambda_c$ thích hợp, ta có

$$L_{\psi}(w, \bar{w}) \geq |r|^{-1} L_r(w^r, \bar{w}^r) + \frac{\lambda}{2} |w|^2. \quad (3.2.7)$$

Điều này kéo theo $s_{\psi}^{-}(z) \leq s_M^{-}(z^*)$ nhưng điều ngược lại là rõ ràng: do đó đẳng thức đầu tiên của (3.2.3) được chứng minh. Đẳng thức thứ hai cũng được suy ra trực tiếp từ (3.2.7). $\square$

Đặc biệt, ta có thể liên hệ tính giả lồi của một miền, tức là tính dương của dạng Levi L_{ψ} của một hàm vết kiệt với tính giả lồi tại biên của nó, hay là tính dương của L_M .

Hệ quả 3.2.6. *Ta có $s_M^{-} \equiv 0$ nếu và chỉ nếu $s_{\psi}^{-} \equiv 0$.*

Vì vậy Ω là giả lồi nếu và chỉ nếu $L_M(z) \geq 0$ với mọi $z \in M$. Ở đây, tính giả lồi bộc lộ, ít nhất đối với biên thuộc lớp C^2 , tính chất địa phương đầy đủ của nó.

Chú ý 3.2.7. Mỗi quan hệ giữa $s_{\psi}^{+}, s_{\psi}^{-}, s_{\psi}^0$ và s_M^{+}, s_M^{-}, s_M^0 không phụ thuộc vào sự lựa chọn r nhưng có thể phụ thuộc vào λ (và của cấu trúc đặc thù của hàm vết kiệt như $\psi = -\log(-r) + \lambda|z|^2$). Tuy nhiên, theo định lý 3.2.2 hệ quả trên thì không phụ thuộc λ : nếu $L_{\psi} \geq 0$, với $\psi = -\log(-r) + \lambda|z|^2$ thì nó cũng ≥ 0 với $\psi = -\log d$. Vì thế số hạng

$\lambda|z|^2$ cuối cùng có thể được loại bỏ, nhưng nó đóng một vai trò quan trọng trong phương pháp chứng minh định lý 3.2.5.

Hệ quả 3.2.8. Cho Ω là một miền của $\mathbb{E}^n$ với biên C^2 , hai điều kiện sau là tương đương

i) Ω là giả lồi

ii) Không tìm được một đĩa giải tích A có tính chất

$$\partial A \subseteq \Omega, \quad A \cap \partial\Omega \neq \emptyset \quad (3.2.8)$$

Chứng minh.

ii) $\Rightarrow$ i). Nếu Ω có một điểm biên, chọn là $z_0 = 0$ mà tại đó $s^- > 0$ thì bằng cách lập phương trình của $\partial\Omega$ theo dạng chính tắc (2.2.6), tức là: $y_1 = -|z_2|^2 + O^2(z_3, \dots) + o^2(x_1, z_2, z_3, \dots)$, ta có được đĩa $\{0\} \times \Delta_\varepsilon \times \{0\} \dots$ mâu thuẫn với (3.2.8).

i) $\Rightarrow$ ii). Giả sử A là một đĩa thỏa (3.2.8), không mất tính tổng quát ta giả sử điểm mà tại đó nó giao với $\partial\Omega$ là tâm $A(0)$ của nó, trùng với gốc 0. Khi đó họ các đĩa tịnh tiến $\{A_z\}$ với $A_z = z + A, |z| < \varepsilon$, thỏa (2.2.8) và cung cấp một hàm mở rộng chỉnh hình từ Ω đến một lân cận của 0. Do đó Ω không là một miền chỉnh hình hay tương đương với nó không là giả lồi. $\forall$

Trong $\mathbb{C}^n$, một miền Ω là lồi nếu và chỉ nếu không tồn tại đoạn thẳng mà biên của nó thì trong Ω mà không phải mọi điểm ở giữa đoạn thẳng đều nằm trong Ω . Do đó, các tính chất của hệ quả 3.2.8 là bất biến phức đầy đủ tương tự như điều kiện này với các đoạn thẳng được thay thế bởi các đĩa.

KẾT LUẬN

Qua quá trình thực hiện luận văn tôi bắt đầu làm quen với các khái niệm, tính chất của hàm nhiều biến phức, về bài toán thác triển chỉnh hình, về mối quan hệ giữa miền chỉnh hình và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa hội tụ. Tôi bước đầu tìm hiểu về lý thuyết đa thể vị phức thông qua việc tìm hiểu về miền giả lồi và mối liên hệ của nó với miền chỉnh hình.

Còn rất nhiều vấn đề khá khó mà tôi phải cần học thêm trong các lĩnh vực này

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn không tránh khỏi những sai sót. Mong rằng quý thầy và các bạn có những góp ý để luận văn được hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đâu Thế Cấp (2000), *Hàm một biến phức*, NXB Giáo dục.
- [2] B.V.Sabat (1974), *Nhập môn giải tích phức*, NXB Đại học và THCN
- [3] R.C.Gunning, H.Rossi (1965), *Analytic function of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc.Englewood Cliffs, N.J.
- [4] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North- Holland Publishing Company 1973
- [5] J.Zampieri (2006) *Geometry of the domains of holomorphic and CR functions*.
