

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HOÀNG MỸ HẠNH

VỀ MÔĐUN VÀ VÀNH JCP-NỘI XẠ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Lê Văn Thuyết

Phản biện 1: TS. Nguyễn Ngọc Châu

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Gia Định

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm

Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ khoa học họp tại Đại
học Đà Nẵng vào ngày 22 tháng 10 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- ⊕ Trung tâm Thông Tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- ⊕ Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà
Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trước tiên, chúng tôi đề cập đến vành tựa Frobenius (quasi-Frobenius, viết tắt là QF). Vành QF được Nakayama giới thiệu vào năm 1939, và đến năm 1951, Ikeda đã đặc trưng vành này thông qua vành Artin trái và phải, tự nội xạ trái và phải. Sở dĩ Ikeda có thể đặc trưng được vành QF như vậy, một phần là nhờ việc Baer đã giới thiệu khái niệm môđun nội xạ vào năm 1940.

Trong lĩnh vực nghiên cứu này, có thể kể đến giả thuyết của Faith: "Phải chăng một vành nửa nguyên sơ, tự nội xạ phải là tựa Frobenius?"

Rất nhiều nhà nghiên cứu đã quan tâm đến giả thuyết này và có nhiều cách tiếp cận khác nhau nhưng vẫn chưa có câu trả lời cho toàn bộ giả thuyết. Song trong quá trình tiếp cận, các nhà nghiên cứu cũng đưa ra được đặc trưng của vành QF thông qua các điều kiện yếu hơn. Như vậy, có thể coi giả thuyết Faith là một trong những nguồn gốc của sự mở rộng khái niệm nội xạ.

Trở lại với khái niệm nội xạ, chúng ta nhắc lại tiêu chuẩn Baer: "Cho Q là R -môđun phải. Khi đó Q là nội xạ nếu và chỉ nếu với mọi idêan phải $U \leq R_R$ và mọi đồng cấu $f : U \rightarrow Q$, tồn tại đồng cấu $\bar{f} : R \rightarrow Q$ sao cho $\bar{f}$ là mở rộng của f , tức là $\bar{f} \circ i = f$, trong đó $i : U \rightarrow R$ là đơn cấu chính tắc."

Từ khái niệm nội xạ ban đầu, có nhiều khái niệm mới đã được hình thành và được nghiên cứu. Ví dụ, trong tiêu chuẩn Baer về nội xạ, nếu lấy U là những idêan phải chính thì ta có khái niệm p -nội xạ, tức là mọi R -đồng cấu từ aR vào Q đều có thể mở rộng thành đồng cấu từ R vào Q . Nếu vành R là p -nội xạ như một R -môđun phải thì R được gọi là vành p -nội xạ phải.

Tiếp theo, chúng ta xét một mở rộng mới của khái niệm nội xạ liên quan đến phần tử suy biến. Một R -môđun phải M được gọi là Jcp -nội xạ nếu với mỗi

phần tử không suy biến a của R , mọi R -đồng cấu từ aR vào M đều có thể mở rộng thành đồng cấu từ R vào M . Nếu vành R là Jcp -nội xạ như một R -môđun phải thì R được gọi là vành Jcp -nội xạ phải. Rõ ràng ta có nội xạ $\Rightarrow p$ -nội xạ $\Rightarrow Jcp$ -nội xạ.

Vì quan tâm đến giả thuyết của Faith nên chúng tôi quyết định chọn đề tài "Về môđun và vành Jcp -nội xạ" để tiến hành nghiên cứu với hi vọng có thể tìm hiểu sâu hơn về tính chất của môđun và vành Jcp -nội xạ, mối quan hệ với các vành khác, đưa ra đặc trưng của vành QF thông qua một số điều kiện liên quan đến vành Jcp -nội xạ.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận văn này được thực hiện với mục đích tìm hiểu một số tính chất của môđun và vành Jcp -nội xạ.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng chính là môđun và vành Jcp -nội xạ. Đồng thời tiến hành nghiên cứu trên một số lớp vành có tính chất liên quan.

4. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết, chủ yếu là :

⊕ Thu thập các bài báo khoa học, các giáo trình của những tác giả nghiên cứu liên quan đến vành và môđun Jcp -nội xạ.

⊕ Tham gia các buổi seminar để trao đổi các kết quả đang nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận văn được thực hiện dựa trên việc hệ thống, tổng hợp và làm rõ một số kết quả của các sách và bài báo có liên quan.

Luận văn là một tài liệu tham khảo cho các độc giả nghiên cứu về môđun và vành Jcp -nội xạ, cũng như một số lớp vành có liên quan.

6. Cấu trúc luận văn

Cấu trúc luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1 trình bày một số khái niệm như linh hóa tử, môđun nội xạ, một số lớp vành như vành nửa nguyên tố, vành chia được,... Đồng thời, chúng tôi cũng nêu lại một số tính chất nhằm hỗ trợ cho các chương sau.

Chương 2 được coi như là chương chính của luận văn này. Chương này trình bày định nghĩa, một số tính chất cơ bản của môđun và vành Jcp -nội xạ thông qua khái niệm linh hóa tử (Định lý 2.1.1), mối quan hệ với các vành khác, mối quan hệ giữa môđun con suy biến phải và căn Jacobson của một vành Jcp -nội xạ phải (Định lý 2.2.8). Trong chương này, chúng tôi cũng xem xét một số điều kiện để vành Jcp -nội xạ phải trở thành vành p -nội xạ phải (Hệ quả 2.2.5, Định lý 2.2.13). Ngoài ra trong chương này cũng đưa ra một số ví dụ về vành Jcp -nội xạ phải dựa trên nhận xét 2.1.3, đồng thời cũng chỉ ra tồn tại một vành là Jcp -nội xạ phải nhưng không phải là vành p -nội xạ phải (Ví dụ 2.2.4).

Chương 3 trình bày một số tính chất liên quan đến linh hóa tử cực đại, một số điều kiện hạn chế, phần tử đều, vành QF và vành nửa đơn.

HOÀNG MỸ HẠNH

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ VÀNH VÀ MÔĐUN

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và một số tính chất sẽ được sử dụng trong luận văn.

Trong toàn bộ luận văn này, ta qui ước vành R có đơn vị khác không và được kí hiệu là 1 , và mọi R -môđun được xét là môđun unita.

1.1 Một số khái niệm

Cho vành R , viết M_R (t.ư., ${}_R M$) để chỉ M là một R -môđun phải (t.ư., trái). Trong một số trường hợp cụ thể, nếu không sợ nhầm lẫn, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R . Nếu A là hạng tử trực tiếp của M , ta viết $A|M$. Ta viết $M_n(R)$ để chỉ vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên vành R . Cho M và N là các R -môđun phải, đồng cấu từ M đến N được hiểu là đồng cấu từ R -môđun phải M đến R -môđun phải N .

Định nghĩa 1.1.1. Cho Q_R là một môđun. Lúc đó Q được gọi là *nội xạ* trong trường hợp với mọi đơn cấu $f : K \rightarrow M$, $\forall K, M$ và với mỗi đồng cấu $\nu : K \rightarrow Q$ đều tồn tại một R -đồng cấu $\bar{\nu} : M \rightarrow Q$ sao cho $\bar{\nu} \circ f = \nu$.

Môđun xạ ảnh được định nghĩa một cách đối ngẫu.

Tiêu chuẩn Baer. Cho Q là R -môđun phải. Khi đó Q là nội xạ nếu và chỉ nếu với mọi idêan phải $U \leq R_R$ và mọi đồng cấu $f : U \rightarrow Q$, tồn tại đồng cấu

$\bar{f} : R \rightarrow Q$ sao cho $\bar{f}$ là mở rộng của f , tức là $\bar{f} \circ i = f$, trong đó $i : U \rightarrow R$ là đơn cấu chính tắc.

Định nghĩa 1.1.2. Môđun M_R được gọi là p -nội xạ nếu với mọi idêan phải chính I của R , mọi đồng cấu $f : I \rightarrow M$ đều có thể mở rộng thành đồng cấu $g : R \rightarrow M$.

Định nghĩa 1.1.3. (1) Cho M là một R -môđun phải, $\emptyset \neq X \subseteq M$. *Linh hóa tử phải* của X trong R , kí hiệu là $r_R(X)$ và được xác định như sau

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0, x \in X\}.$$

(2) Cho $A \subseteq R$. *Linh hóa tử trái* của A trong M , kí hiệu $l_M(A)$ và được xác định như sau

$$l_M(A) = \{x \in M \mid xa = 0, a \in A\}.$$

Định nghĩa 1.1.4. Môđun con K của M được gọi là *cốt yếu* (hoặc *lớn*) trong M , kí hiệu $K \leq^e M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$,

$$K \cap L = 0 \quad \text{suy ra} \quad L = 0.$$

Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con K của M gọi là *đôi cốt yếu* (hoặc *bé*) trong M , kí hiệu $K \ll M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$,

$$K + L = M \quad \text{suy ra} \quad L = M.$$

Bao nội xạ của một môđun M là một môđun nội xạ E cùng với một đơn cấu cốt yếu $i : M \rightarrow E$. Lúc này, người ta vẫn thường gọi E là bao nội xạ của M , và kí hiệu là $E = E(M)$. Mà mọi môđun được nhúng cốt yếu vào một môđun nội xạ nên mọi môđun luôn có bao nội xạ.

Định nghĩa 1.1.5. Với môđun M_R cho trước, chúng ta đặt

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0, I_R \leq^e R_R\} = \{m \in M \mid r_R(m) \leq^e R_R\}.$$

Ta có $Z(M)$ là một môđun con của M và được gọi là *môđun con suy biến* của M . Nếu $Z(M) = M$ thì M được gọi là suy biến, còn nếu $Z(M) = 0$ thì M được gọi là không suy biến. Chúng ta cũng có thể kí hiệu Z_r (t. ư., Z_l) thay vì $Z(R_R)$ (t. ư., $Z({}_R R)$).

Định nghĩa 1.1.6. (1) Cho M là R -môđun phải. *Căn* của M , kí hiệu là $rad(M)$, là một môđun con của M , xác định bởi

$$rad(M) = \sum_{A \ll M} A = \bigcap_{B \leq M} B,$$

trong đó B là môđun con cực đại của M .

(2) Cho M là R -môđun phải. *Đế* của M , kí hiệu là $Soc(M)$, là một môđun con của M , xác định bởi

$$Soc(M) = \bigcap_{A \leq^e M} A = \sum_{B \leq M} B,$$

trong đó B là môđun con đơn của M .

Định lý 1.1.7. ([1], Định lý 1.2.5) Ta có: $rad(R_R) = rad({}_R R)$, và thường được kí hiệu chung là $J(R)$.

Vậy $J(R) = \{a \in R \mid 1 - ar \text{ khả nghịch}, \forall r \in R\}$.

Mệnh đề 1.1.8. ([1], Mệnh đề 5.1) *Đêan phải* I của vành R là một hạng tử trực tiếp của R_R nếu và chỉ nếu tồn tại một lũy đẳng $e \in R$ sao cho $I = eR$.

Hơn nữa, nếu $e \in R$ là một lũy đẳng thì $1 - e$ cũng vậy và $(1 - e)R$ là phần phụ của eR , nghĩa là

$$R_R = eR \oplus (1 - e)R.$$

Cho M là một R -môđun phải, K là một môđun con của M . Khi đó một môđun con C được gọi là *phần bù (complement)* của K trong M nếu C là cực đại với tính chất $K \cap C = 0$.

1.2 Vành C2, vành nửa nguyên tố, vành QF và một số vành khác

Định nghĩa 1.2.1. Cho M là một R -môđun phải. M được gọi là thỏa mãn điều kiện C2 nếu mọi môđun con A của M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp

của M , thì A cũng là một hạng tử trực tiếp của M . Vành R được gọi là vành $C2$ phải nếu R_R thỏa mãn điều kiện $C2$.

Định nghĩa 1.2.2. (1) Một idêan C của vành R được gọi là idêan *nửa nguyên tố* nếu với bất kì idêan I của R ,

$$I^2 \leq C \Rightarrow I \leq C.$$

(2) Một vành được gọi là vành nửa nguyên tố nếu (0) là idêan nửa nguyên tố.

Định nghĩa 1.2.3. Môđun M_R gọi là *chia được* nếu

$$\forall r \in R, r \neq 0 \Rightarrow Mr = M.$$

Vành R gọi là vành chia được nếu R_R là môđun chia được.

Mệnh đề 1.2.4. ([7], Proposition 21.16) Cho $e \in R$ là một phần tử lũy đẳng.

1. Nếu eR là idêan phải cực tiểu của R , thì eRe là vành chia được.
2. Chiều ngược lại đúng nếu R là vành nửa nguyên tố.

Định nghĩa 1.2.5. Vành R được gọi là tựa Frobenius (viết tắt là QF) nếu nó là vành Artin (trái và phải), tự nội xạ (trái và phải).

Định lý 1.2.6. ([11], Theorem 1.50) Cho vành R . Khi đó các điều kiện sau là tương đương.

1. R là vành tựa Frobenius.
2. R là vành Artin trái hoặc phải, tự nội xạ trái hoặc phải.
3. R là vành Noether trái hoặc phải, tự nội xạ trái hoặc phải.
4. R thỏa mãn ACC trên các linh hóa tử trái hoặc phải, tự nội xạ trái hoặc phải.

5. R là vành Noether trái và phải, $rl(T) = T$ với mọi idêan phải T , và $lr(L) = L$ với mọi idêan trái L .

Định lý 1.2.7. ([11], Theorem 7.56) Cho vành R . Khi đó các điều kiện sau là tương đương.

1. R là vành tựa Frobenius.
2. Mọi R -môđun phải (trái) nội xạ đều là xạ ảnh.
3. Mọi R -môđun phải (trái) xạ ảnh đều là nội xạ.

Định nghĩa 1.2.8. Cho $(T_\alpha)_\alpha \in A$ là một tập các môđun đơn của M . Nếu M là tổng trực tiếp các môđun con đơn này, nghĩa là

$$M = \bigoplus_A T_\alpha$$

thì $M = \bigoplus_A T_\alpha$ được gọi là một *phân tích nửa đơn* của M . Môđun M được gọi là nửa đơn nếu nó có một phân tích nửa đơn. Vành R được gọi là nửa đơn phải (trái) nếu môđun R_R (${}_R R$) là nửa đơn.

Mệnh đề 1.2.9. ([1], Định lý 2.3.6) Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho.

1. R nửa đơn.
2. Mỗi R -môđun phải là nội xạ (xạ ảnh).
3. Mỗi R -môđun trái là nội xạ (xạ ảnh).

Định nghĩa 1.2.10. Một vành R được gọi là vành *Kasch* phải nếu với mọi R -môđun phải đơn S đều tồn tại một đơn cấu $i : S \rightarrow R_R$, hoặc tương đương với điều kiện $l(M) \neq 0$ với mọi idêan phải cực đại M của R .

Mệnh đề 1.2.11. ([11], Proposition 5.19; 5.20) (1) Cho R là vành p -nội xạ phải, Kasch phải. Khi đó $l(J(R))$ cốt yếu trong R_R .

(2) Cho R là vành nửa hoàn chỉnh, p -nội xạ phải. Khi đó R là vành Kasch phải nếu và chỉ nếu S_r là cốt yếu trong R_R .

Ví dụ 1.2.12. Cho V và P là hai không gian vectơ khác không trên một trường K và giả sử có một ánh xạ song tuyến tính

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto xy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Chúng ta kí hiệu $R = [K, V, P] = K \oplus V \oplus P$ và xác định một phép nhân trên R như sau

$$(k + v + p)(k' + v' + p') = kk' + (kv' + k'v) + (kp' + vv' + k'p).$$

Khi đó R là vành nửa nguyên sơ. Hơn nữa R là vành Artin phải, nội xạ đơn phải nếu và chỉ nếu $\dim_K(V)$ và $\dim_K(P)$ là hữu hạn theo [11, Proposition 9.3, Proposition 9.4].

Bây giờ, chúng ta lấy $V = K^{(N)}$, $P = K$ và ánh xạ song tuyến tính là dạng song tuyến tính đối xứng trên V được xác định như sau

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots,$$

với mọi $x = (x_i)_{i \in N}$, $y = (y_i)_{i \in N}$. Khi đó $R = [K, V, P]$ là vành giao hoán nửa nguyên sơ. Vành R là vành p -nội xạ, không Artin theo [10, Example 9.23]. Do đó R không phải là vành QF .

Chương 2

VỀ MÔĐUN VÀ VÀNH JCP-NỘI XẠ

Trong chương này, trước hết chúng tôi giới thiệu về khái niệm môđun và vành Jcp -nội xạ phải, tính chất cơ bản của vành Jcp -nội xạ phải, một số điều kiện để vành Jcp -nội xạ phải trở thành vành p -nội xạ phải. Mối quan hệ giữa môđun con suy biến và căn của R cũng được xét đến. Trong chương này cũng trình bày mối liên hệ giữa vành Jcp -nội xạ và một số lớp vành khác.

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1.1. Cho R là một vành, M là một R -môđun phải. M được gọi là môđun Jcp -nội xạ nếu với mỗi phần tử $a \in R \setminus Z_r$, bất kỳ đồng cấu phải nào từ aR vào M đều có thể mở rộng được thành đồng cấu từ R vào M .

Định nghĩa 2.1.2. R được gọi là vành Jcp -nội xạ phải nếu R_R là môđun Jcp -nội xạ.

Nhận xét 2.1.3. Nếu R là vành p -nội xạ phải thì R cũng là vành Jcp -nội xạ phải.

Ví dụ 2.1.4. (1) Cho R là vành p -nội xạ phải, $U \leq R$ là một tập mẫu thức trái (left denominator set). Khi đó vành thương $Q = \{u^{-1}r/u \in U, r \in R\}$ cũng là vành p -nội xạ phải. Do đó Q cũng là vành Jcp -nội xạ phải.

(2) Cho F là một trường và $\bar{F}$ là một trường con thực sự của F . Giả sử

$$\begin{aligned} \varphi : F &\longrightarrow \bar{F} \\ a &\longmapsto \bar{a}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

là một đẳng cấu trường. Gọi R là không gian vectơ với cơ sở $\{1, t\}$. Định nghĩa phép nhân $t^2 = 0$ và $ta = \bar{a}t, \forall a \in F$. Khi đó R là vành p -nội xạ phải (xem [11, Example 2.5]), do đó R cũng là vành Jcp -nội xạ phải.

2.2 Tính chất của môđun và vành Jcp -nội xạ

Định lý 2.2.1. *Cho R là một vành. Các điều kiện sau là tương đương.*

1. R là vành Jcp -nội xạ phải.
2. $lr(a) = Ra, \forall a \notin Z_r$.
3. $r(a) \leq r(b), a, b \in R, a \notin Z_r$ suy ra $Rb \leq Ra$.
4. $l(bR \cap r(a)) = l(b) + Ra$, trong đó $a, b \in R$ và $ab \notin Z_r$.

Định nghĩa 2.2.2. (1) Một vành được gọi là vành PP phải nếu mọi idêan phải chính đều xạ ảnh.

(2) Một vành R được gọi là vành NPP phải nếu với bất kỳ phần tử $a \in N(R)$ thì aR là xạ ảnh.

Nhận xét 2.2.3. Nếu R là vành PP phải thì R cũng là vành NPP phải.

Ví dụ 2.2.4. Cho V là một không gian vectơ hai chiều trên trường F , mở rộng thông thường $R = T(F, V) = F \oplus V$ là vành Jcp -nội xạ phải nhưng không phải là vành p -nội xạ phải.

Thật vậy,

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & a \end{bmatrix} / a \in F, v \in V \right\}.$$

Cho $V = uF \oplus \omega F$. Đặt

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{u}R = \begin{bmatrix} 0 & uF \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lập ánh xạ

$$f : \bar{u}R \rightarrow R$$

xác định bởi

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & ua \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó f là một ánh xạ tuyến tính. Nhưng vì $\omega \notin uF$ nên f không mở rộng được thành ánh xạ từ R vào R . Do đó R không phải là vành p -nội xạ phải.

Mặt khác, nếu $x \in R$ và $x \notin Z_r$ thì x khả nghịch. Do đó $lr(x) = R = Rx$. Vậy R là vành Jcp -nội xạ phải.

Hệ quả 2.2.5. (1) Nếu R thỏa mãn một trong những điều kiện sau thì R là vành p -nội xạ phải nếu và chỉ nếu R là vành Jcp -nội xạ phải.

(a) R không suy biến phải.

(b) R là vành NPP phải.

(c) R là vành PP phải.

(2) R là vành chính qui von Neumann nếu và chỉ nếu R là vành PP phải và Jcp -nội xạ phải.

Hệ quả 2.2.6. Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R cho trước.

(1) R là vành nửa đơn.

(2) R là vành PP phải, Jcp -nội xạ phải không chứa một tập vô hạn các lũy đẳng trực giao.

Định nghĩa 2.2.7. (1) Vành thu gọn R là vành không có phần tử lũy linh nào khác ngoài phần tử 0, tức là $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0, \forall a \in R$.

(2) Phần tử $a \in R$ được gọi là chính qui phải nếu $r(a) = 0$.

Định lý 2.2.8. Cho R là vành Jcp -nội xạ phải. Thế thì:

1. Bất kỳ phần tử chính qui phải nào của R cũng đều khả nghịch trái.

2. $Z_r \leq J(R)$.

3. Mọi R -môđun trái và phải đều chia được.

4. Nếu P là ideal phải chính thu gọn của R thì $P = eR$, trong đó $e^2 = e \in R$ và $(1 - e)R$ là một ideal của R .

Định lý 2.2.9. Cho R là vành Jcp-nội xạ phải. Thế thì:

1. R là vành C2 phải.

2. Nếu $aR \mid R, bR \mid R$ mà $aR \cap bR = 0$ thì $(aR \oplus bR) \mid R$.

Hệ quả 2.2.10. Cho R là vành Jcp-nội xạ phải, $a \notin Z_r$. Các điều kiện sau là tương đương.

(a) aR xạ ảnh.

(b) $aR \mid R$.

(c) aR là môđun Jcp-nội xạ.

Định nghĩa 2.2.11. Một môđun M_R được gọi là *nội xạ bé chính* (hay gọi là SP-nội xạ) nếu với mỗi phần tử $a \in J(R)$, với mọi đồng cấu từ aR vào M_R đều có thể mở rộng thành đồng cấu từ R_R vào M_R . Một vành R được gọi là vành nội xạ bé chính phải nếu R_R là nội xạ bé chính.

Định nghĩa 2.2.12. Một vành R được gọi là vành SPP phải nếu $\forall a \notin Z_r$, aR xạ ảnh.

Định lý 2.2.13. 1. R là vành p-nội xạ phải nếu và chỉ nếu R là vành Jcp-nội xạ phải và nội xạ bé chính phải.

2. R là vành SPP phải nếu và chỉ nếu mọi ảnh đồng cấu của R -môđun Jcp-nội xạ phải cũng là Jcp-nội xạ.

3. Cho R là một vành. Các điều kiện sau là tương đương.

(a) R là vành PP phải.

(b) R là vành NPP phải và SPP phải.

(c) R là vành không suy biến phải và SPP phải.

Định nghĩa 2.2.14. Vành R được gọi là *tựa chính qui phải* nếu $a \in aRa, \forall a \in Z_r$.

Định lý 2.2.15. (1) Cho R là vành *Jcp-nội xạ phải* và *SPP phải*. Thế thì:

(a) $J(R) = Z_r$.

(b) Với mỗi $a \notin Z_r, a = aba$ với phần tử $b \in R$ nào đó.

(2) Cho R là vành. Các điều kiện sau là tương đương.

(a) R là vành *tựa chính qui phải*.

(b) R là vành *SPP phải* và *Jcp-nội xạ phải*.

(c) Mọi R -môđun phải đều là môđun *Jcp-nội xạ*.

(d) Mọi R -môđun phải *cyclic* đều là môđun *Jcp-nội xạ*.

Định lý 2.2.16. Cho e là một phần tử lũy đẳng của R sao cho $ReR = R$ và đặt $S = eRe$. Thế thì:

1. Nếu R là vành *Jcp-nội xạ phải* thì S cũng vậy.

2. Nếu R là vành không suy biến phải thì S cũng vậy.

3. Nếu R là vành *SPP phải* thì với bất kỳ phần tử $a \in S \setminus Z_r(S)$, tồn tại một phần tử lũy đẳng g của R sao cho $r_S(a) = egeS$.

4. Nếu R là vành *tựa chính qui phải* thì S cũng vậy.

5. Nếu R là vành *chính qui von Neumann phải* thì S cũng vậy.

Mệnh đề 2.2.17. Cho R là vành *Jcp-nội xạ phải*, $a, b \in R$ sao cho $b \notin Z_r$. Khi đó:

1. Nếu bR nhúng trong aR thì Rb là ảnh của Ra .

2. Nếu aR là một ảnh của bR thì Ra nhúng trong Rb .

3. Nếu $bR \cong aR$ thì $Ra \cong Rb$.

4. Nếu A, B là các ideal phải của R với $A \cap (B + Z_r) = 0$ và A là một ideal của R , thì $\text{Hom}_R(A_R, B_R) = 0$.

Chương 3

MỘT SỐ KẾT QUẢ LIÊN QUAN ĐẾN VÀNH QF VÀ VÀNH NỬA ĐƠN

Trong chương này, trước hết chúng tôi trình bày một số tính chất liên quan đến vấn đề linh hóa tử cực đại, nội xạ yếu, một số kết quả liên quan đến phần tử đều. Phần sau, chúng tôi trình bày mối quan hệ với vành QF và vành nửa đơn.

3.1 Điều kiện hạn chế

Định nghĩa 3.1.1. Cho R là một vành. Một linh hóa tử phải (trái) M của R được gọi là *cực đại* nếu với bất kỳ linh hóa tử phải (trái) N của R mà $M \leq N$ thì ta có hoặc $N = M$ hoặc $N = R$. Trong trường hợp này, $M = r(a)$ ($l(a)$) với a là một phần tử khác không của R .

Mệnh đề 3.1.2. Cho R là vành Jcp-nội xạ phải, nửa nguyên tố, mà các idêan phải phân bù đều không bé. Khi đó mọi linh hóa tử phải (trái) cực đại của R đều là idêan phải (trái) cực đại của R sinh bởi một lũy đẳng.

Định nghĩa 3.1.3. Cho R là một vành, L là một idêan trái của R . Khi đó L được gọi là *cốt yếu non trái* nếu với mọi phần tử $a \neq 0, a \notin Z_r, Ra \cap L \neq 0$.

Mệnh đề 3.1.4. Cho R là vành Jcp-nội xạ phải. Thế thì:

1. Nếu R là vành Kasch phải thì $l(J(R))$ cốt yếu non trái.
2. Nếu R là vành nửa hoàn chỉnh, thì R là vành Kasch phải khi và chỉ khi S_r là cốt yếu non trái.

Định nghĩa 3.1.5. Một R -môđun phải M được gọi là *nil-nội xạ* nếu với mỗi phần tử lũy linh $a \in R$, mọi R -đồng cấu phải từ aR vào M có thể mở rộng thành đồng cấu từ R vào M . Nếu vành R là nil-nội xạ như một R -môđun phải thì ta nói R là vành nil-nội xạ phải.

Rõ ràng, mọi vành p -nội xạ phải đều là vành nil-nội xạ phải.

Ví dụ 3.1.6. (1) Nếu R là một miền nguyên trong đó mỗi idêan hữu hạn sinh đều là idêan chính thì R/mR là nil-nội xạ, với mọi $0 \neq m \in R$.

(2) Vành các số nguyên Z là vành nil-nội xạ phải.

(3) Cho $R = \prod_{i \in I} R_i$ là tích trực tiếp của các vành. Thế thì R là nil-nội xạ phải nếu và chỉ nếu các R_i là nil-nội xạ phải, với mọi $i \in I$.

Mệnh đề 3.1.7. Cho R là vành *Jcp-nội xạ phải*. Giả sử mọi R -môđun phải đơn suy biến đều là nil-nội xạ. Thế thì:

1. R là p -nội xạ phải, và do đó R cũng là không suy biến phải, nửa nguyên thủy.
2. $Z_l = 0$.

3.2 Nội xạ yếu

Định nghĩa 3.2.1. Cho $E(M)$ là bao nội xạ của M_R . M được gọi là nội xạ yếu phải nếu với bất kỳ môđun con hữu hạn sinh $N_R \leq E(M)$ thì tồn tại $X_R \cong M$ và $N_R \leq X_R \leq E(M)$.

Vành R được gọi là vành nội xạ yếu phải nếu R_R là nội xạ yếu phải.

Bổ đề 3.2.2. Cho R là vành *Jcp-nội xạ phải*. Nếu R_R cốt yếu trong X_R , trong đó $X_R \cong R_R$ thì $X = R$.

Mệnh đề 3.2.3. Một vành R là tự nội xạ phải nếu và chỉ nếu R là vành *Jcp-nội xạ phải* và R_R là nội xạ yếu.

Hệ quả 3.2.4. Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R cho trước.

(1) R là vành QF .

(2) R là vành Jcp -nội xạ phải, nội xạ yếu thỏa ACC đối với các linh hóa tử trái hoặc phải.

3.3 Về định lý của Camillo

Định nghĩa 3.3.1. Một môđun $M \neq 0$ được gọi là *đều* nếu mọi môđun con khác không của M là môđun con cốt yếu trong M .

Một phần tử $u \in R$ được gọi là *đều phải* nếu $u \neq 0$ và uR là ideal phải đều của R .

Mệnh đề 3.3.2. Cho R là vành Jcp -nội xạ phải. Nếu $u \in R$ là đều phải với $u \notin Z_r$ thì $M_u := \{x \in R \mid uR \cap r(x) \neq 0\}$ là ideal trái cực đại chứa $l(u)$.

Hệ quả 3.3.3. Nếu R là vành Jcp -nội xạ phải, đều phải thì R là vành địa phương và $J(R) = Z_r$.

Hệ quả 3.3.4. Cho R là vành Jcp -nội xạ phải và *Kasch* trái. Giả sử mọi ideal phải khác không sẽ chứa một ideal phải đều, mà ideal này không chứa trong Z_r . Khi đó mỗi ideal trái cực đại M có dạng $M = M_u$, với u là phần tử đều nào đó.

3.4 Một số kết quả liên quan đến vành QF

Định nghĩa 3.4.1. Một vành R được gọi là *FGF* phải nếu với mọi R -môđun hữu hạn sinh có thể nhúng vào một môđun tự do.

Định lý 3.4.2. Cho R là vành *FGF* phải. Nếu R là vành Jcp -nội xạ phải thì R là vành QF .

Định nghĩa 3.4.3. (1) Một vành R được gọi là *Johns* phải nếu nó là vành Note phải và mọi ideal phải đều là linh hóa tử.

(2) Vành R được gọi là vành *Johns* phải mạnh nếu vành mà trận $M_n(R)$ là vành *Johns* phải ($\forall n \geq 1$).

Định lý 3.4.4. *Một vành R là tựa Frobenius nếu và chỉ nếu R là vành Johns phải mạnh và Jcp-nội xạ phải.*

3.5 Một số kết quả liên quan đến vành nửa đơn

Định nghĩa 3.5.1. Một vành R được gọi là *CAM-vành* phải nếu với bất kỳ idêan phải cốt yếu cực đại M của R (nếu tồn tại) và với bất kỳ idêan con phải I của M mà idêan này hoặc là idêan phải phần bù của M hoặc là idêan linh hóa tử trong R , thì I là idêan của M .

Định lý 3.5.2. *Cho R là một vành. Các điều kiện sau là tương đương.*

1. R hoặc là vành nửa đơn Artin hoặc là vành chính qui mạnh.
2. R là vành Jcp-nội xạ phải nửa nguyên tố, CAM-vành phải.
3. R là CAM- vành phải, nửa nguyên tố, vành MERT trong đó các R -môđun phải đơn suy biến là môđun Jcp-nội xạ.

Định nghĩa 3.5.3. Một vành R được gọi là vành *CM* phải nếu với bất kỳ idêan phải cốt yếu cực đại M của R , mọi idêan con phải phần bù đều là idêan của M .

Mệnh đề 3.5.4. ([6], Proposition 3) *Cho R là vành CM phải. Thế thì bất kỳ R - môđun phải đơn xạ ảnh đều là môđun nội xạ.*

Định nghĩa 3.5.5. Một vành R được gọi là hữu hạn nhúng phải nếu $Soc(R_R)$ là hữu hạn sinh và cốt yếu phải trong R_R .

Định lý 3.5.6. *Cho R là một vành. Các điều kiện sau là tương đương.*

1. R là vành nửa đơn Artin.

2. R là vành CM phải, hữu hạn nhúng phải và PS phải.

3. R là vành nửa nguyên tố, Jcp - nội xạ phải và $Goldie$ phải hoặc trái.

KẾT LUẬN

Luận văn bao gồm các kết quả chính như sau:

1. Trình bày được đặc trưng của vành Jcp -nội xạ phải thông qua các điều kiện về linh hóa tử (Định lý 2.2.1).
2. Mối quan hệ giữa môđun con suy biến phải và căn Jacobson của một vành Jcp -nội xạ phải (Định lý 2.2.8).
3. Mối quan hệ giữa vành Jcp -nội xạ phải và vành $C2$ phải (Định lý 2.2.9).
4. Một số điều kiện để vành Jcp -nội xạ phải trở thành vành p -nội xạ phải (Hệ quả 2.2.5, Định lý 2.2.13).
5. Trình bày mối quan hệ với vành QF và vành nửa đơn (Định lý 3.4.4, Định lý 3.5.6).
6. Tìm hiểu và đề xuất thêm một số tính chất liên quan đến vành nửa đơn, vành QF (Hệ quả 2.2.6, Hệ quả 3.2.4).
7. Trong các phần ở trên, đề xuất một số ví dụ cho phần lý thuyết tương ứng.