BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ MAI DUNG

XÂY DỰNG CÁC ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU THÔNG QUA NÓN LIÊN HỢP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG, NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Huỳnh Thế Phùng

Phản biện 1: TS. Cao Văn Nuôi

Phản biện 2: TS. Nguyễn Duy Thái Sơn

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 30 tháng 06 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại :
- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Lý thuyết các bài toán tối ưu đã phát triển từ rất sớm và đã hình thành nhiều cách tiếp cận khác nhau trong việc giải quyết bài toán. Khởi đầu là các điều kiện tối ưu của bài toán trơn mà kết quả là các công thức dừng kiểu Fermat hay các phương trình dừng kiểu Euler. Sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết điều khiển tối ưu và quy hoạch toán học ở nửa sau của thế kỷ hai mươi đã làm xuất hiện các điều kiện cần/đủ tối ưu dưới dạng nguyên lý cực đại Pontryagin và quy tắc nhân tử Lagrange. Từ đó đến nay, cùng với sự phát triển vượt bậc của giải tích lồi và giải tích không trơn, nhiều kết quả định tính của bài toán tối ưu được thiết lập mang ý nghĩa khoa học cũng như ứng dụng cao hơn. Một điều đáng lưu ý là rất nhiều điều kiện tối ưu, đặc biệt ở dạng nhân tử Lagrange, sử dụng định lý tách tập lồi và thể hiện thông qua các công thức trên nón liên hợp. Tuy vậy, cho đến nay chưa có một tài liệu nào trình bày các điều kiện tối ưu một cách nhất quán dưới ngôn ngữ nón liên hợp. Vì vậy mục tiêu nghiên cứu của luận văn là tổng hợp các điều kiện tối ưu kinh điển trong một lược đồ chung sử dụng các kết quả trên nón liên hợp.

2. Mục đích nghiên cứu:

Thiết lập lại tất cả các điều kiện tối ưu kinh điển dưới một ngôn ngữ chung sử dụng nón liên hợp.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Trình bày các kết quả cơ bản của giải tích lồi mà chủ yếu là các định lý tách tập lồi, nón liên hợp cùng các kết quả cơ bản, nón tiếp xúc và nón pháp tuyến.

Trình bày lý thuyết tối ưu: Các khái niệm cùng các kết quả cơ bản, phân loại bài toán, thiết lập lại một loạt các điều kiện tối ưu sử dụng nón liên hợp.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Tham khảo tài liệu sẵn có,
- Phương pháp nghiên cứu lý luận,
- Phương pháp phân tích,
- Phương pháp tổng hợp,
- Phương pháp khái quát hóa,
- Phương pháp tổng kết kinh nghiệm.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

Đề tài đã tổng hợp các điều kiện tối ưu bằng cách sử dụng các kết quả trên nón liên hợp.

Đề tài sẽ góp phần, hỗ trợ các bạn sinh viên ngành Toán nghiên cứu lý thuyết các bài toán cực trị thông qua ngôn ngữ nón liên hợp.

6. Cấu trúc của luận văn

Chương 1. Kết quả bổ trợ từ giải tích lồi.

Chương 2. Lý thuyết tổng quát bài toán tối ưu.

Chương 3. Các điều kiện tối ưu.

Chương 1

KẾT QỦA BỔ TRỢ TỪ GIẢI TÍCH LỒI

Trong luận văn này, ta luôn giả thiết X là không gian Banach và X^* ký hiệu cho không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

Chương này giới thiệu một số kết quả của giải tích lồi là Định lí Tách, nón liên hợp, nón tiếp xúc và nón pháp tuyến.

1.1. Định lý tách tập lồi

Định nghĩa 1.1. Với mỗi $f \in X^*$ và $\alpha \in$, ta ký hiệu

$$H(f;\alpha) = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\},$$
$$H^+(f;\alpha) = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\},$$
$$H^-(f;\alpha) = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

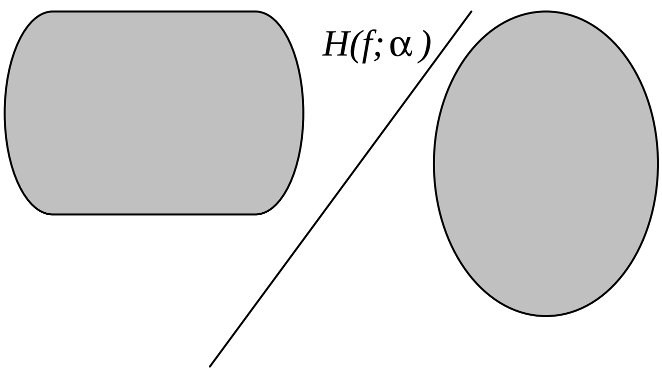
Khi đó, nếu $f \neq 0$ thì $H(f;\alpha)$ là một siêu phẳng trong X, còn $H^+(f;\alpha), H^-(f;\alpha)$ là các nửa không gian có biên là $H(f;\alpha)$.

Định nghĩa 1.2. Cho các tập hợp A, B $\subset$ X. Ta nói phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \neq 0$ *tách* A và B, nếu $f(a) \leq f(b)$ (hoặc $f(a) \geq f(b)$), $\forall a \in A, b \in B$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại một số $\alpha \in$ sao cho

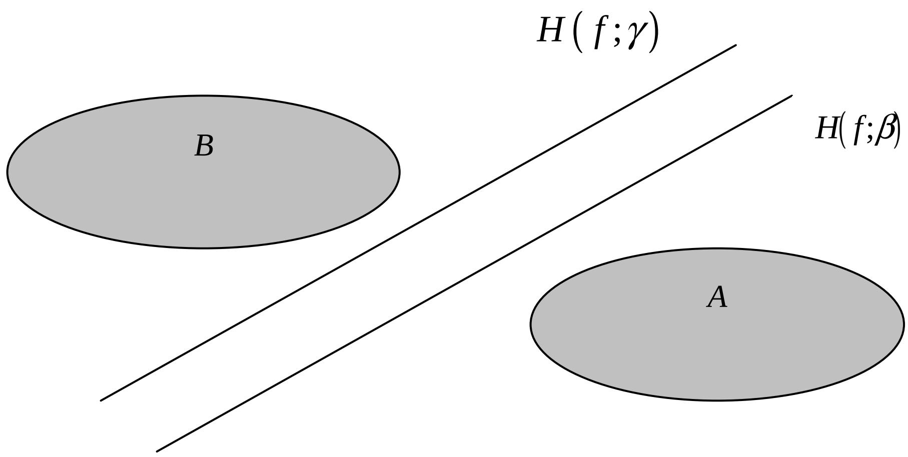
$$f(a) \leq \alpha \leq f(b),\ \forall a \in A, b \in B.$$

Lúc đó, ta nói siêu phẳng $H(f;\alpha)$ *tách* A và B.



Hình 1.1. Siêu phẳng tách hai tập hợp

Ta nói hai tập A và B là *tách mạnh được* nếu tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục f và các số $\gamma > \beta$ sao cho $A \subseteq H^{-}(f;\beta)$ và $B \subseteq H^{+}(f;\gamma)$ (hoặc ngược lại). Nói cách khác, $\inf_{b\in B} f(b) > \sup_{a\in A} f(a)$. Lúc đó, nếu có $\alpha \in (\beta,\gamma)$ ta cũng nói siêu phẳng *H(f;*α*) tách mạnh* A và B.



Hình 1.2. *f* tách mạnh A và B

Định lý 1.1 (Định lý Tách). *Cho hai tập lồi rời nhau A và B trong X. Nếu một trong hai điều kiện dưới đây thỏa mãn thì có một siêu phẳng tách A và B:*

a) $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{int} B) \neq \varnothing$,

b) X hữu hạn chiều.

Hệ quả 1.1.

Định lý 1.2. *Hai tập lồi khác rỗng A và B tách mạnh được khi và chỉ khi*

$$0 \notin \overline{A-B}.$$

Định lý 1.3 (Định lý Tách mạnh). *Cho A và B là hai tập lồi khác rỗng rời nhau trong X sao cho A đóng và B compact. Lúc đó, tồn tại một siêu phẳng đóng tách mạnh A và B.*

Hệ quả 1.2.

Mệnh đề 1.1. *Cho M là một không gian con của X. Lúc đó, với mọi* $g \in M^*$ *tồn tại* $f \in X^*$ *sao cho*

$$f|_M = g.$$

1.2. Nón liên hợp

Trong mục này ta tìm hiểu các kết quả cơ bản và các phép toán trên nón liên hợp.

Định nghĩa 1.3. Một tập $K \subseteq X$ được gọi là *nón* nếu với mọi $k \in K$ và $\lambda > 0$ ta có $\lambda k \in K$. Nếu hơn nữa, *K* là tập lồi, thì nó sẽ được gọi là *nón lồi*.

Định nghĩa 1.4. Cho *K* là một nón trong *X*, ta gọi *nón liên hợp* của *K* là tập hợp

$$K^* = \left\{ x^* \in X^* \mid < x^*, x > \geq 0; \forall x \in K \right\}.$$

Tương tự nếu *H* là nón trong X^* thì nón liên hợp của *H* là tập hợp

$$H^* = \left\{ x \in X \mid < x^*, x > \geq 0; \forall x^* \in H \right\}.$$

Ta viết K^{**} thay cho $(K^*)^*$.

Mệnh đề 1.2. K^*, H^* *là các nón lồi đóng.*

Mệnh đề 1.3. *Nếu* $K_1 \subseteq K_2$ *thì* $K_1^* \supseteq K_2^*$.

Mệnh đề 1.4. $K^* = \left(coK\right)^* = \left(\overline{K}\right)^* = \left(\overline{co}K\right)^*$

Mệnh đề 1.5. $K^{**} = \overline{co}K$.

Mệnh đề 1.6. *Nếu K là không gian con của X thì*

$$K^* = K^{\perp} := \left\{ x^* \in X^* \mid < x^*, x > = 0; \forall x \in K \right\}$$

chính là không gian con trực giao của K.

Định nghĩa 1.5. Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó, *f* được gọi là *hàm lồi trên X* nếu

$$f\left(\lambda x + \left(1-\lambda\right) y\right) \leq \lambda f\left(x\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(y\right), \forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in X.$$

Miền hữu hiệu của hàm f, ký hiệu là *domf*, được định nghĩa như sau:

$$domf = \left\{ x \in X \mid f\left(x\right) < +\infty \right\}.$$

Hàm *f* được gọi là *chính thường* nếu

$$domf \neq \varnothing \text{ và } f\left(x\right) > -\infty, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.6. Giả sử *f* là một hàm lồi, chính thường trên *X* và $x \in domf$. Một phiếm hàm $x^* \in X^*$ được gọi là *dưới gradient* của *f* tại x_0 nếu

$$f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right) + < x - x_0, x^* >, \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.7. Tập hợp tất cả các dưới gradient của *f* tại x_0 được gọi là *dưới vi phân* của *f* tại điểm đó và được kí hiệu là $\partial f\left(x_0\right)$. Vậy,

$$\partial f\left(x_0\right)=\left\{x^*\in X^* \mid f\left(x\right)- f\left(x_0\right)\geq < x-x_0, x^* >, \forall x\in X\right\}.$$

Định lý 1.4. *Nếu f là một hàm lồi liên tục tại x_0 thì với mọi $v\in X$ tồn tại đạo hàm theo f'*

$$f^{'}\left(x_0;v\right):=\lim_{t\to 0+}\frac{f\left(x_0+tv\right)-f\left(x_0\right)}{t}.$$

Hơn nữa

$$\partial f\left(x_0\right)=\left\{x^*\in X^* \mid < x^*, v > \leq f^{'}\left(x_0,v\right), \forall x\in X\right\},$$

$\partial f\left(x_0\right)$ *là tập lồi, compact yếu* khả vi và*

$$f^{'}\left(x_0,v\right)=\max_{x^*\in\partial f\left(x_0\right)} < x^*, v >, \forall v\in X.$$

Mệnh đề 1.7. *Nếu $\left(K_i\right)_{i=1}^{m}$ là một họ các nón trong X thì*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m}K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^{m}K_i^*.$$

Mệnh đề 1.8. *Nếu K_1 , K_2 là các nón trong X thì*

$$\left(K_1\cap K_2\right)^*\supseteq K_1^*+K_2^*.$$

Mệnh đề 1.9. *Cho K là nón lồi có phần trong khác rỗng, L là không gian con của X sao cho $K\cap L\neq\varnothing$. Lúc đó, với mọi $u\in L^*$ thỏa mãn*

$$<u,k>\geq 0; \forall k\in K\cap L,$$

tồn tại $x^*\in X^*$ sao cho

$$< x^*, l > = < u, l >; \forall l\in L \text{ và } < x^*, k > \geq 0; \forall k\in K.$$

Mệnh đề 1.10. *Cho K là nón lồi có phần trong khác rỗng, L là không gian con của X sao cho $K\cap L\neq\varnothing$. Lúc đó,*

$$\left(K\cap L\right)^* = K^*+L^*.$$

Mệnh đề 1.11. *Nếu K_1 , K_2 là các nón lồi mở sao cho $K_1\cap K_2\neq\varnothing$, thì*

$$\left(K_1 \cap K_2\right)^* = K_1^* + K_2^*.$$

Mệnh đề 1.12. *Cho hai nón lồi khác rỗng K, M trong X sao cho* $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ *và* $\left(\operatorname{int} K\right) \cap M = \varnothing$. *Lúc đó*

$$K^* \cap \left(-M^*\right) \neq \{0\}.$$

Tức là tồn tại $u^* \in K^*, v^* \in M^*$ *sao cho*

$$\left(u^*, v^*\right) \neq (0,0) \text{ và } u^* + v^* = 0.$$

Hệ quả 1.3. .

Định lý 1.5. *Cho* K_i , $1 \leq i \leq m$, *là các nón lồi mở khác rỗng và* K_{m+1} *là nón lồi khác rỗng thỏa mãn* $\bigcap_{i=1}^{m+1} K_i = \varnothing$. *Lúc đó tồn tại* $x_i^* \in K_i^*$ *sao cho* $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 0$ *và* $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{m+1}^*\right) \neq (0,0,\ldots,0)$.

Mệnh đề 1.13. *Cho* $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^* \in X^*$. *Lúc đó*

$$\left\{x \in X \mid < x, x_i^* > \leq 0, 1 \leq i \leq k\right\}^* = -\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^*, \lambda_i \geq 0\right\}.$$

1.3. Nón tiếp xúc và nón pháp tuyến

Trong mục này ta luôn ký hiệu A là tập con đóng khác rỗng của X. Cho $x_0 \in A$, ta gọi $v \in X$ là vec-tơ tiếp xúc của *A* tại x_0 nếu tồn tại một dãy $\left(x_n\right) \subseteq A$ và một dãy số dương (t_n) hội tụ về không sao cho

$$v = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{t_n}.$$

Tập hợp các vec-tơ tiếp xúc với A tại x_0 được kí hiệu là $T_A(x_0)$. Vậy

$$T_A(x_0) = \left\{\lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{t_n} \mid \left(x_n\right) \subseteq A; t_n \to 0+\right\}.$$

Mệnh đề 1.14. $T_A(x_0)$ *là một nón chứa gốc, hơn nữa*

$$T_A(x_0) = \left\{ \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - x_0) \mid \lambda_n \geq 0;\ x_n \xrightarrow{A} x_0 \right\}$$

$$= \left\{ v \in X \mid \liminf_{t\to 0+} \frac{d_A(x_0 + tv)}{t} = 0 \right\},$$

trong đó $d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$ là khoảng cách từ điểm x đến tập A.

Từ kết quả này ta gọi $T_A(x_0)$ là nón tiếp xúc của A tại x_0. Một cách tự nhiên ta gọi nón pháp tuyến của A tại x_0 là tập

$$N_A(x_0) = -T_A(x_0)^* = \left\{ x^* \in X^* \mid < x^*, v > \leq 0;\ \forall v \in T_A(x_0) \right\}.$$

Mệnh đề 1.15. *Nếu A là tập lồi thì*

a) $T_A(x_0) = \overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(A - x_0)} = \left\{ v \mid d'_A(x_0; v) = 0 \right\},$

b) $N_A(x_0) = \left\{ x^* \in X^* \mid < x - x_0, x^* > \leq 0;\ \forall x \in A \right\}.$

Các kết quả tiếp theo sẽ cho thấy biểu diễn của nón tiếp xúc và nón pháp tuyến của các tập lồi được cho bởi hệ bất phương trình và phương trình, tuyến tính hoặc phi tuyến.

Trước hết ta xét các tập đa diện có dạng:

$$A = \left\{ x \in X \mid < a_i, x > \leq b_i;\ 1 \leq i \leq m \right\}, \qquad (1.2)$$

trong đó $a_i \in X^*$ và $b_i \in$ với mọi $i \in I := \{1,\ldots,m\}$.

Với $x_0 \in A$ ta ký hiệu $I(x_0) := \{ i \in I \mid < a_i, x_0 > = b_i \}$ là tập hữu hiệu tại x_0 và kí hiệu $J(x_0) = I \backslash I(x_0)$.

Mệnh đề 1.16. *Với A cho bởi (1.2) ta có:*

$$T_A(x_0) = \{ v \in X \mid < a_i, v > \leq 0;\ \forall i \in I(x_0) \},$$

$$N_A(x_0) = \left\{ \sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Tổng quát hơn ta xét tập đa diện A có dạng

$$A = \left\{ x \in X \mid < a_i, x > \leq b_i;\ 1 \leq i \leq m, < c_j, x > = d_j;\ 1 \leq j \leq k \right\}, \qquad (1.3)$$

trong đó $a_i, c_j \in X^*$ còn $b_i, d_j \in$. Kí hiệu K = { 1,…,k}.

Mệnh đề 1.17. *Với tập A được cho bởi (1.3) và $x_0 \in A$ ta có*

$$T_A(x_0) = \{v \in X \mid \langle a_i, v \rangle \le 0;\ \forall i \in I(x_0),\ \langle c_k, v \rangle = 0; k \in K\},$$

$$N_A(x_0) = \left\{ \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i a_i + \sum_{k \in K} \mu_k c_k \mid \lambda_i \ge 0;\ \mu_k \in \quad \right\}.$$

Nhận xét 1.1. Từ các kết quả trên ta thấy *$T_A(x_0)$* hoàn toàn được xác định bởi các ràng buộc hữu hiệu, tức là các ràng buộc mà tại x_0 xảy ra dấu đẳng thức (là tập *$I(x_0)$* trong Mệnh đề 1.16, tập $I(x_0) \cup K$ trong Mệnh đề 1.17). Điều này là dễ hiểu bởi với các ràng buộc xảy ra dấu bất đẳng thức chặt thì với mọi hướng *v*, các điểm $x_0 + tv$ đều thỏa mãn bất đẳng thức với $t > 0$ đủ bé. Với nhận xét như vậy, chúng ta chỉ chú ý đến các ràng buộc hữu hiệu là đủ.

Trong nhiều trường hợp tập lồi được xác định bởi hệ bất đẳng thức lồi. Cụ thể, nếu $f_i :\ X \to \quad, 1 \le i \le m$ là các hàm lồi thì

$$A = \{x \in X \mid f_i(x) \le 0; 1 \le i \le m\}$$

là một tập hợp lồi. Với mỗi $x_0 \in A$ ta đặt $I(x_0) = \{i \mid f_i(x_0) = 0\}$. *A* được gọi là chính quy nếu tồn tại $u \in A$ sao cho $I(u) = \emptyset$, tức là $f_i(u) < 0$ với mọi $i \in I = \{1, \dots, m\}$.

Bổ đề 1.1. *Nếu* $f : X \to \overline{\quad}$ *là hàm lồi liên tục tại* $x_0 \in X$ *thì* $K^* = -\overline{\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial f(x_0)}$ *với* $K = \{v \in X \mid f'(x_0; v) \le 0\}$. *Hơn nữa, nếu* $0 \notin \partial f(x_0)$ *thì*

$$K^* = -\bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial f(x_0).$$

Mệnh đề 1.18. *Giả sử A là tập xác định bởi* $A = \{x \in X \mid f_i(x) \le 0; 1 \le i \le m\}$ *với* f_i *là các hàm lồi liên tục. Với mọi* $x_0 \in A$ *ta có*

a) Nếu $I(x_0) = \emptyset$ *thì* $T_A(x_0) = X$,

b) Nếu $I(x_0) \ne \emptyset$ *thì*

$$T_A(x_0) \subseteq \{v \in X \mid f_i'(x_0; v) \le 0;\ \forall i \in I(x_0)\}. \qquad (1.4)$$

Hơn nữa, nếu A chính quy thì đẳng thức xảy ra, đồng thời ta có

$$N_A(x_0)=\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda co\left(\bigcup_{i\in I(x_0)}\partial f_i(x_0)\right). \qquad (1.5)$$

Nhận xét 1.2. Chú ý nếu các điều kiện chính quy không thỏa mãn thì biểu thức $T_A(x_0)\subseteq\{v\in X \mid f_i'(x_0;v)\leq 0;\forall i\in I(x_0)\}$ có thể không xảy ra dấu đẳng thức.

Định nghĩa 1.9. Cho $f : X \to$ là một hàm giá trị thực trên X và $x_0 \in X$. Ta nói đạo hàm (Frechet) của *f* tại x_0 là phiếm hàm tuyến tính liên tục $f'(x_0)\in X^*$ thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-<f'(x_0),x-x_0>}{\|x-x_0\|}=0.$$

Ở đây, <g , x> với $g\in X^*$ và $x\in X$ là ký hiệu cho giá trị của g tại x. Nghĩa là,

<g , x> = g(x).

Phần còn lại của mục này chúng ta sẽ cố gắng mô tả nón tiếp xúc và nón pháp tuyến của các tập được cho bởi hệ phương trình, bất phương trình không lồi. Ta xét trường hợp *A* được xác định bởi hệ hữu hạn, bất phương trình trơn. Cho $f_i : X\to \ ,1\leq i\leq m,\ g_i : X\to \ ,1\leq j\leq k$ là các hàm thuộc lớp C^1. Giả sử

$$A=\{x\in X \mid f_i(x)\leq 0;1\leq i\leq m,\ g_j(x)=0;1\leq j\leq k\}.$$

Với mỗi $x_0\in A$ ta đặt $I(x_0)=\{1\leq i\leq m \mid f_i(x_0)=0\}$ và

$$L_A(x_0)=\{v\in X \mid <f_i'(x_0),v>\leq 0;\ \forall i\in I(x_0),<g_j'(x_0),v>=0;1\leq j\leq k\}.$$

Mệnh đề 1.19. $T_A(x_0)\subseteq L_A(x_0)$

Nếu dấu đẳng thức ở biểu thức trên xảy ra thì ta nói x_0 là điểm chính quy của A.

Mệnh đề 1.20. *Cho* $A=\{x\in X \mid f_i(x)\leq 0,\forall i\in I\}$ *với* f_i *là các hàm khả vi liên tục. Giả sử* $x_0\in A$ *sao cho tồn tại* $v\in X$ *thỏa mãn* $<f_i'(x_0),v><0$ *với mọi* $i\in I(x_0)$. *Lúc đó* x_0 *là điểm chính quy của A.*

Mệnh đề 1.21. *Cho* $A=\{x\in X \mid f(x)\le 0\}$ *với* f_i *là các hàm lõm, liên tục. Giả sử* $x_0\in A$ *là điểm sao cho* $I(x_0)\ne\emptyset$*. Lúc đó*

$$\mathrm{T}_A(x_0)=\{\mathrm{v}\in X \mid <f_i^{'}(x_0),v>0,\ \forall i\in I(x_0)\}.$$

Mệnh đề 1.22. *Cho* $A=\{x\in X \mid h_j(x)=0,\forall j\in K\}$*, trong đó* h_j *là các hàm khả vi liên tục trên X. Nếu* $x_0\in A$ *sao cho* $\{h_j^{'}(x_0),\ j=\overline{1,k}\}$ *độc lập tuyến tính thì*

$$T_A(x_0)=\left\{v\in X \mid \left\langle h_j^{'}(x_0),v\right\rangle=0,\ \forall j=\overline{1,k}\right\}=\bigcap_{j=1}^{k}\mathrm{Ker}\,h_j^{'}(x_0).$$

Chương 2

LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT BÀI TOÁN TỐI ƯU

2.1. Các định nghĩa

Cho *X* là không gian Banach và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm nhận giá trị thực mở rộng, *M* là một tập con của *X*. Ta xét bài toán

$$P(M;f): \begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in M. \end{cases}$$

f được gọi là hàm mục tiêu của bài toán, *M* được gọi là tập chấp nhận được và mỗi $x \in X$ gọi là điểm chấp nhận được.

Một điểm $\overline{x} \in X$ được gọi là nghiệm (toàn cục) của *P(M;f)* nếu

$$f(x) \geq f(\overline{x}); \forall x \in M,$$

được gọi là nghiệm địa phương của bài toán nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x) \geq f(\overline{x}); \forall x \in M \cap B(\overline{x};\varepsilon).$$

Nếu *M* = *X* thì ta có bài toán cực trị không ràng buộc P(f).

Nếu $M = \left\{x \in X \mid h_j(x) = 0;\ j = \overline{1,k}\right\}$, $h_j : X \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,k}$ thì ta có bài toán cực trị với ràng buộc đẳng thức:

$$\begin{cases} f(x) \to \inf, \\ h_j(x) = 0, \forall j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

Nếu $M = \left\{x \in X \mid g_i(x) \leq 0;\ i = \overline{1,m}\right\}$, $g_i : X \to \mathbb{R}$ thì ta có bài toán cực trị với ràng buộc bất đẳng thức:

$$\begin{cases} f(x) \to \inf, \\ g_i(x) \leq 0; 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Cuối cùng, nếu $M = \left\{x \in X \mid h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,k},\ g_i(x) \leq 0;\ i = \overline{1,m}\right\}$ thì ta có bài toán ràng buộc hỗn hợp:

$$\begin{cases} f(x) \to \inf, \\ h_j(x) = 0, 1 \le j \le k, \\ g_i(x) \le 0; 1 \le i \le m. \end{cases}$$

Tùy theo dáng điệu của tập chấp nhận được *M* và hàm mục tiêu *f* mà người ta gọi các bài toán cực trị dưới các tên khác nhau. Cụ thể, P(M;f) được gọi là

- bài toán quy hoạch tuyến tính nếu M là tập đa diện và f là hàm tuyến tính,
- bài toán quy hoạch lồi nếu M là tập lồi và f là hàm lồi,
- bài toán quy hoạch lõm nếu M là tập lồi và f là hàm lõm,
- bài toán quy hoạch DC nếu M là tập lồi và f là hàm DC, tức là hiệu hai hàm lồi,
- bài toán quy hoạch trơn nếu M là đa tạp khả vi, có biên trơn từng khúc và f khả vi liên tục.

2.2. Các định lý tồn tại cơ bản

Ta xét bài toán *P(M; f)* và ký hiệu *Sol(M; f)* là tập tất cả các nghiệm (toàn cục) và $Sol^{loc}(M; f)$ là tập các nghiệm địa phương của bài toán *P(M; f)*.

Định lý 2.1. *Trong bài toán quy hoạch lồi ta luôn có*

$$Sol(M; f) = Sol^{loc}(M; f)$$

và là tập lồi (có thể bằng rỗng).

Định lý 2.2. *Trong bài toán quy hoạch lõm với hàm mục tiêu khác hằng (trên M) ta có*

$$Sol(M; f) \subseteq \partial M$$

Hệ quả 2.1.

Định nghĩa 2.1. Một hàm $f : X \to \overline{\ }$ được gọi là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) \ge f(x_0).$$

Nói cách khác, với mọi $\gamma < f(x_0)$ tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x) > \gamma, \forall x \in B(x_0, \varepsilon).$$

Nếu *f* nửa liên tục dưới tại mọi $x \in X$ thì ta nói *f* là nửa liên tục dưới.

Định lý 2.3. *Nếu M compact và f nửa liên tục dưới thì* $Sol(M;\ f) \neq \varnothing$.

Hệ quả 2.2.

2.3. Hướng chấp nhận được và hướng giảm

Định nghĩa 2.2. Cho $A \subseteq X$ và $x_0 \in A$, vec-tơ $v \in X$ được gọi là hướng chấp nhận được của *A* tại x_0 nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$x_0 + tv \in A;\ \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Nếu hơn nữa, tồn tại lân cận *U* của *v* sao cho

$$x_0 + tu \in A;\ \forall t \in [0, \varepsilon), \forall u \in U$$

thì ta nói *v* là hướng chấp nhận được chặt.

Ta kí hiệu tập tất cả các hướng chấp nhận được (t.ư hướng chấp nhận được chặt) của *A* tại x_0 là $K_A(x_0)$(t.ư $K_A^0(x_0)$).

Mệnh đề 2.1. $K_A(x_0)$ *là nón chứa gốc,* $K_A^0(x_0)$ *là nón mở và*

$$K_A^0(x_0) \subseteq K_A(x_0) \subseteq T_A(x_0).$$

Định nghĩa 2.3. Cho *f* là hàm nhận giá trị thực, xác định trong một lân cận của $x_0 \in X$. Vectơ $v \in X$ được gọi là hướng giảm của *f* tại x_0 nếu tồn tại $\alpha > 0$ và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x_0 + tv) \leq f(x_0) - t\alpha;\ \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Nếu hơn nữa, tồn tại lân cận *U* của *v* sao cho

$$f(x_0 + tu) \leq f(x_0) - t\alpha;\ \forall t \in [0, \varepsilon), \forall u \in U$$

thì *v* được gọi là hướng giảm chặt của *f* tại x_0.

Ta kí hiệu tập tất cả các hướng giảm (hướng giảm chặt) của *f* tại x_0 là $K_f(x_0)$(t.ư $K_f^0(x_0)$).

Mệnh đề 2.2. $K_f(x_0)$ *là nón không chứa gốc,* $K_f^0(x_0)$ *là nón mở và*

$$K_f^0(x_0) \subseteq K_f(x_0).$$

Ta giả thiết $x_0 \in A \subseteq X$, *f* là hàm xác định trong một lân cận của x_0, *v* là vec-tơ trong *X*.

Định nghĩa 2.4. Hàm *f* được gọi là Lipschitz địa phương tại $x_0 \in X$, nếu tồn tại $\beta \geq 0, \varepsilon > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in B^{'}\left(x_0, \varepsilon\right)$ ta có:

$$\left| f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| \leq \beta \left\| x_1 - x_2 \right\|.$$

Mệnh đề 2.3. *Giả sử đạo hàm theo hướng f'(x_0 , v) tồn tại. Lúc đó,*

a) $v \in K_f\left(x_0\right) \;\Leftrightarrow\; f'\left(x_0, v\right) < 0$.

b) Nếu f Lipschitz địa phương tại x_0 thì $v \in K_f^0\left(x_0\right) \;\Leftrightarrow\; f'\left(x_0, v\right) < 0$.

Hệ quả 2.3.

Hệ quả 2.4.

Hệ quả 2.5.

Mệnh đề 2.4. *Nếu A là tập lồi có phần trong khác rỗng, thì*

$$K_A^0\left(x_0\right) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda\left(\operatorname{int} A - x_0\right),\; K_A\left(x_0\right) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda\left(A - x_0\right).$$

Từ đó, $K_A(x_0)$ là nón lồi, còn $K_A^0\left(x_0\right)$ là nón lồi mở.

Khi *A* là tập mức dưới của một hàm *f*, tức là $A = \left\{ x \in X \mid f\left(x\right) \leq 0 \right\}$ thì các nón $K_A\left(x_0\right)$ và $K_f\left(x_0\right)$, $K_A^0\left(x_0\right)$ và $K_f^0\left(x_0\right)$ có mối quan hệ khắng khít với nhau. Điều đó được thể hiện qua các kết quả dưới đây.

Mệnh đề 2.5. $K_f\left(x_0\right) \subseteq K_A\left(x_0\right),\; K_f{}^0\left(x_0\right) \subseteq K_A{}^0\left(x_0\right).$

Mệnh đề 2.6. *Giả sử f(x_0) = 0, f có đạo hàm theo mọi hướng tại x_0, hàm f'(x_0 ,v) lồi theo biên v và tồn tại v_0 sao cho*

$$f'(x_0, v_0) < 0.$$

Lúc đó

$$K_A^0\left(x\right) \subseteq \left\{ v \in X \mid f'\left(x_0, v\right) < 0 \right\} = K_f\left(x_0\right).$$

Hệ quả 2.6.

Hệ quả 2.7.

Chương 3

CÁC ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

3.1. Điều kiện cơ bản

Hầu hết các bài toán tối ưu đều đưa về dưới dạng sau đây

$$(P_0)\begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i, \end{cases}$$

trong đó A_i, $1 \le i \le m$, là các tập con có giao khác rỗng trong X và $f : X \to \quad$. Sau đây là một số điều kiện cần cực trị cơ bản cho bài toán dạng này.

Định lý 3.1. *Nếu $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (P_0) thì*

$$K_f(\bar{x}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_{A_i}(\bar{x}) \right) = \varnothing.$$

Định lý 3.2. *Nếu $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của bài toán (P_0) thì*

$$K_f^0(\bar{x}) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} K_{A_i}^0(\bar{x}) \right) \cap T_{A_m}(\bar{x}) = \varnothing.$$

3.2. Bài toán trơn

Cho X là không gian Banach, X_0 là một tập con của X, $f : X_0 \to \quad$, $h_j : X_0 \to \quad$, $j = \overline{1,k}$ là các hàm khả vi.

Ta xét bài toán cực trị với ràng buộc đẳng thức

$$P(X_0; h_1, \ldots, h_k; f) : \begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in X_0, \\ h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

Dễ thấy $P(X_0; h_1, \ldots, h_k; f)$ tương đương với bài toán minmax sau:

$$\inf_{x \in X} \sup_{\mu \in \ ^k} \left(f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x) \right).$$

Vì vậy để tiếp cận bài toán tốt hơn người ta thiết lập một hàm dưới đây mà được gọi là hàm Lagrange của bài toán:

$$L_1(x,\mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x)$$

ở đây $x \in X$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ được gọi là nhân tử Lagrange.

Trong các điều kiện cực trị người ta thường sử dụng một hàm Lagrange có dạng tổng quát hơn như sau:

$$L(x,\lambda_0,\mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x),$$

với $(\lambda_0,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k$ là nhân tử Lagrange.

Định lý 3.3 (Quy tắc nhân tử Lagrange). *Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của $P(X_0 ; h_1 ,\ldots,h_k; f)$, thì tồn tại các nhân tử $(\lambda_0,\mu) \neq (0,0)$ sao cho*

$$L_x(\bar{x},\lambda_0,\mu) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j'(\bar{x}) = 0. \qquad (3.1)$$

Hơn nữa nếu f, h_j là các hàm khả vi liên tục tại $\bar{x}$ và $\{h_1'(\bar{x}),\ldots,h_k'(\bar{x})\}$ là độc lập tuyến tính, thì $\lambda_0 > 0$, và do đó có thể chọn $\lambda_0 = 1$.

Cho $f, g_1,\ldots,g_m$, là các hàm nhận giá trị thực, khả vi trên *X*, X_0 là một tập con của *X*. Ta xét bài toán tối ưu trơn với ràng buộc bất đẳng thức:

$$P(X_0;g_1,\ldots,g_m;f): \begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in X_0, \\ g_i(x) \le 0, 1 \le i \le m. \end{cases}$$

Vì $P(X_0;g_1,\ldots,g_m;f)$ tương đương với bài toán

$$\inf_{x\in X} \sup_{\lambda_i \ge 0} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right)$$

nên các hàm Lagrange của bài toán $P(X_0;g_1,\ldots,g_m;f)$ là

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \text{ và } L_1(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

với $x \in X, (\lambda_0, \lambda) \in {}_{+} \times {}^{m}_{+}$.

Ta sẽ gọi tập hữu hiệu tại điểm chấp nhận được $\bar{x}$, ký hiệu $I(\bar{x})$, là tập các chỉ số *i* sao cho $g_i(\bar{x}) = 0$, tức là

$$I(\bar{x}) = \{\, i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Định lý 3.4. *Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của bài toán $P(X_0; g_1, ..., g_m; f)$, thì tồn tại $(\lambda_0, \lambda) \in {}^{m+1}_{+} \setminus \{0\}$ thỏa mãn*

$$L_x(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(\bar{x}) = 0, \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0. \qquad (3.3)$$

Hơn nữa, nếu tồn tại $v \in X$ sao cho $\langle g_i'(\bar{x}), v \rangle < 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$ thì $\lambda_0 > 0$, do đó có thể chọn $\lambda_0 = 1$.

Trong nhiều vấn đề thực tế ta gặp bài toán với ràng buộc vừa đẳng thức vừa bất đẳng thức. Giả sử $g_i : X_0 \to \ , 0 \le i \le m, h_j : X_0 \to \ , 0 \le j \le k$ là các hàm khả vi. Bài toán tối ưu trơn với ràng buộc hỗn hợp có dạng như sau:

$$P(X_0; g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_k; f) : \begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in X_0, \\ g_i(x) \le 0; 1 \le i \le m, \\ h_j(x) = 0; 1 \le j \le k. \end{cases}$$

Vì $P(X_0; g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_k; f)$ tương đương với bài toán

$$\inf_{x \in X} \sup_{\lambda_i \ge 0; \mu_j \in} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x) \right),$$

nên hàm Lagrange của bài toán $P(X_0; g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_k; f)$ là

$$L(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x)$$

với $x \in X_0, (\lambda_0, \lambda) \in {}^{m+1}_{+}, \mu \in {}^{k}$.

Ta cũng ký hiệu $I(\bar{x})$ là tập hữu hiệu tại điểm chấp nhận được $\bar{x}$:

$$I\left(\bar{x}\right) = \left\{1 \le i \le m | g_i\left(\bar{x}\right) = 0\right\}.$$

Định lý 3.5 (Karush-Kuhn-Tucker). *Nếu* $\bar{x}$ *là nghiệm địa phương của bài toán*

$$P\left(X_0; g_1,...,g_m, h_1,...,h_k; f\right): \begin{cases} f\left(x\right) \to \inf, \\ x \in X_0, \\ g_i\left(x\right) \le 0; 1 \le i \le m, \\ h_j\left(x\right) = 0; 1 \le j \le k. \end{cases}$$

tại đó $\left\{h_1'\left(\bar{x}\right),...,h_k'\left(\bar{x}\right)\right\}$ *độc lập tuyến tính và tồn tại* $v \in X$ *sao cho*

$$\left\langle g_i'\left(\bar{x}\right), v\right\rangle < 0; \forall i \in I\left(\bar{x}\right), \left\langle h_j'\left(\bar{x}\right), v\right\rangle = 0; 1 \le j \le k,$$

thì tồn tại $\lambda \in {}^{m}_{+}, \mu \in {}^{k}$ *thỏa mãn*

$$L_{(x)}\left(\bar{x}, \lambda, \mu\right) = f'\left(\bar{x}\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'\left(\bar{x}\right) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j'\left(\bar{x}\right) = 0, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(\bar{x}\right) = 0. \quad (3.5)$$

3.3. Bài toán lồi

Cho $g_i : A \to \quad, 0 \le i \le m,$ là các hàm lồi trên một tập lồi $A \subseteq X$. Ta xét bài toán tối ưu lồi với ràng buộc bất đẳng thức:

$$P\left(A; f; g_1,...,g_m\right): \begin{cases} f\left(x\right) \to \inf, \\ x \in A, \\ g_i\left(x\right) \le 0, 1 \le i \le m. \end{cases}$$

Vì $P\left(A; f; g_1,...,g_m\right)$ tương đương với bài toán

$$\inf_{x \in A} \sup_{\lambda_i \ge 0} \left(f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(x\right)\right),$$

nên các hàm Lagrange của bài toán $P\left(A; f; g_1,...,g_m\right)$ là

$$L_1(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x);\ L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

với $x \in A, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}_+^m$.

Ta nói bài toán thỏa mãn Điều kiện (chính qui) Slater nếu tồn tại $x_0 \in A$ sao cho

$$g_i(x_0) < 0\ ; 1 \le i \le m.$$

Định lý 3.6. *Nếu* $\overline{x}$ *là nghiệm địa phương của bài toán* $P(A; f; g_1,...,g_m)$*, thì tồn tại* $(\overline{\lambda_0}, \overline{\lambda}) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \setminus \{0\}$ *thỏa mãn*

$$(K-T): \begin{cases} 0 \in \partial_x L(x, \overline{\lambda_0}, \overline{\lambda}) + N_A(\overline{x}), \\ \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) = 0; 1 \le i \le m. \end{cases}$$

Hơn nữa, nếu Điều kiện Slater thỏa mãn, thì $\overline{\lambda_0} > 0$*, do đó có thể chọn* $\overline{\lambda_0} = 1$*, và lúc đó (K - T) cũng là điều kiện đủ để cho điểm chấp nhận được* $\overline{x}$ *là nghiệm của bài toán.*

Hệ quả 3.1.

Định nghĩa 3.1. Một cặp $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in A \times \mathbb{R}_+^m$ được gọi là điểm yên ngựa của hàm $L_1(x,\lambda)$ nếu

$$L_1(\overline{x}, \lambda) \le L_1(\overline{x}, \overline{\lambda}) \le L_1(x, \overline{\lambda});\ \forall (x,\lambda) \in A \times \mathbb{R}_+^m.$$

Định lý 3.7. *Nếu* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *là một điểm yên ngựa của hàm* $L_1(x,\lambda)$ *thì* $\overline{x}$ *là một nghiệm của bài toán* $P(A; f; g_1,...,g_m)$.

Định lý 3.8. (Kuhn-Tucker). *Nếu điều kiện Slater thỏa mãn và* $\overline{x}$ *là một nghiệm của bài toán* $P(A; f; g_1,...,g_m)$ *thì tồn tại* $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ *sao cho* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *là một điểm yên ngựa của hàm* $L_1(x,\lambda)$.

Tiếp theo ta sẽ xét điều kiện tối ưu của bài toán quy hoạch lồi tổng quát. Giả sử $g_i : X \to \mathbb{R}$, $0 \le i \le m$, là các hàm lồi liên tục và $h_j : X \to \mathbb{R}$, $0 \le j \le k$ là các hàm affine liên tục xác định trên tập lồi $A \subseteq X$. Bài toán tối ưu với ràng buộc hỗn hợp có dạng như sau:

$$P(A; f; g_1,...,g_m,h_1,...,h_k): \begin{cases} f(x) \to \inf, \\ x \in A, \\ g_i(x) \le 0; 1 \le i \le m, \\ h_j(x) = 0; 1 \le j \le k. \end{cases}$$

Hàm Lagrange của bài toán có dạng

$$L_1(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x),$$

với $x \in A, \lambda \in {}^{m}_{+}, \mu \in {}^{k}$.

Định nghĩa 3.2. Bộ ba $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ được gọi là một điểm yên ngựa của hàm $L_1(x,\lambda,\mu)$ nếu

$$L_1(\bar{x},\lambda,\mu) \le L_1(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \le L_1(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}); \forall (x,\lambda,\mu) \in A \times {}^{m}_{+} \times {}^{k}.$$

Định lý 3.9. *Nếu* $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ *là một điểm yên ngựa của hàm* $L_1(x,\lambda,\mu)$ *thì* $\bar{x}$ *là một nghiệm của bài toán* $P(A; f; g_1,...,g_m,h_1,...,h_k)$.

Ta nói bài toán $P(A; f; g_1,...,g_m,h_1,...,h_k)$ *thỏa mãn điều kiện Slater mở rộng nếu tồn tại* $x_0 \in \operatorname{int} A$ *sao cho*

$$g_i(x_0) < 0; 1 \le i \le m,\ h_j(x_0) = 0; 1 \le j \le k.$$

Bổ đề 3.1. *Giả sử điều kiện Slater mở rộng thỏa mãn. Đặt*

$$C = \{x \in X \mid h_j(x) = 0; 1 \le j \le k\};\ B = C \cap A$$

Lúc đó, với mọi $\bar{x} \in B$ *ta có* $T_B(\bar{x}) = T_C(\bar{x}) \cap T_A(\bar{x})$. *Hơn nữa, nếu* $h_j(x) = \langle y_j^*, x \rangle + \alpha_j$; $1 \le j \le k$, *thì*

$$N_B(\bar{x}) = N_A(\bar{x}) + span\{y_j^* : 1 \le j \le k\}.$$

Định lý 3.10. *Giả sử bài toán quy hoạch lồi* $P\left(A; f; g_1,...,g_m,h_1,...,h_k\right)$ *thỏa mãn điều kiện Slater mở rộng và* $\overline{x}$ *là một nghiệm của nó. Lúc đó tồn tại* $\left(\overline{\lambda},\overline{\mu}\right) \in {}_{+}^{m} \times {}^{k}$ *sao cho* $\left(\overline{x},\overline{\lambda},\overline{\mu}\right)$ *là một điểm yên ngựa của hàm* $L_1\left(x,\lambda,\mu\right)$.

KẾT LUẬN

Luận văn này đã đạt được những kết quả sau:

- Trình bày các định nghĩa cơ bản của bài toán tối ưu, một số định lý tồn tại cơ bản, khái nệm hướng chấp nhận được, hướng giảm và chứng minh một số tính chất của chúng.
- Trình bày và chứng minh chi tiết các điều kiện của bài toán tối ưu, đồng thời đưa ra các dạng cơ bản thường gặp của bài toán trơn và lồi dưới dạng ngôn ngữ nón liên hợp.
- Đưa ra một số ví dụ áp dụng cho bài toán cụ thể.

Vấn đề được đưa ra trong luận văn là tương đối cụ thể đối với bài toán tối ưu, tuy chưa thật toàn diện và bao quát nhưng có thể áp dụng được vào thực tế.