

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Hoàng Ngọc Huệ

**XÂY DỰNG HÀM TỬ EXT TRONG
PHẠM TRÙ CÁC
KHÔNG GIAN VECTƠ TÔPÔ**

Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**
Mã số: **60.46.05**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN HUYỀN**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của luận văn này tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo TS. Trần Huyền. Thầy đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn tôi trong quá trình hoàn thành luận văn này. Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn của mình tới toàn bộ thầy cô trong trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh đã giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Đồng thời, tôi xin cảm ơn các học viên trong lớp đại số và lý thuyết số khóa 19 đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại lớp.

Hồ Chí Minh, ngày 15 tháng 08 năm 2011

Học viên

Hoàng Ngọc Huệ

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU.....	4
Chương 1. Đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô	5
1.1. Phạm trù các không gian vectơ tôpô	5
1.1.1. Tập cân và tập hút trong không gian vectơ	5
1.1.2. không gian vectơ tôpô	7
1.1.3. Phạm trù các không gian vectơ tôpô	13
1.2. Phức và đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô ...	15
1.2.1. Phạm trù các phức.....	15
1.2.2. Đồng luân dây chuyền.....	16
1.2.3. Các hàm tử đồng điều	18
1.2.4. Đối đồng điều	20
Chương 2. Hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ tôpô	23
2.1. Không gian tôpô thuần nhất và ánh xạ chính quy.....	23
2.1.1. Không gian tôpô thuần nhất	23
2.1.2. Ánh xạ chính quy.....	28
2.1.3. Vật xạ ảnh tương đối và vật tự do tương đối	30

2.2. Hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ tôpô	41
2.2.1. Phép giải xạ ảnh tương đối	41
2.2.2. Xây dựng hàm tử Ext bằng phép giải xạ ảnh tương đối.....	45

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết đại số đồng điều đang tràn ngập hầu khắp các lĩnh vực toán học trong mấy thập kỷ trở lại đây. Hàm tử Ext cùng với các hàm tử Hom, hàm tử Ten xơ và hàm tử Torn là bốn trụ cột trong lý thuyết đại số đồng điều. Để ứng dụng được lý thuyết đại số đồng điều cho một phạm trù nào đó chúng ta phải xây dựng cho được các hàm tử trên trong phạm trù đó. Trong bốn trụ cột đó, tôi quan tâm tới hàm tử Ext. Trong phạm trù môđun có nhiều cách xây dựng hàm tử Ext: bằng cách phân hoạch các dãy khớp ngắn, bằng phép giải xạ ảnh, bằng phép giải nội xạ. Để xây dựng được bằng phép giải xạ ảnh trong phạm trù môđun ta cần dựa vào tính đủ nhiều của các vật tự do.

Trong luận văn này, tôi mong muốn xây dựng hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ Tôpô. Phạm trù không gian vectơ Tôpô với vật là các không gian vectơ Tôpô và xạ là các ánh xạ tuyến tính liên tục là phạm trù tiền Abel, hơn nữa trong phạm trù này cũng không đủ nhiều các vật tự do. Do đó, tôi xây dựng vật tự do tương đối và chứng minh được tính đủ nhiều của nó trong phạm trù các không gian vectơ tôpô. Trên cơ sở đó xây dựng được hàm tử Ext.

Bố cục luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày về phạm trù các không gian vectơ tôpô, đồng điều, đối đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô.

Chương 2: Trước hết trình bày về không gian tôpô thuần nhất và ánh xạ chính quy, bao gồm khái niệm, các ví dụ, tính chất. Sau đó, đưa ra khái niệm vật xạ ảnh tương đối, vật tự do tương đối và chứng minh được tính đủ nhiều của vật tự do tương đối trong phạm trù các không gian vectơ tôpô. Từ đó xây dựng được hàm tử Ext trong phạm trù đó.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên các vấn đề trong luận văn vẫn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi có những sai sót trong cách trình bày. Mong được sự góp ý xây dựng của thầy cô và các bạn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô

Trong chương này, ta trình bày những nội dung cơ bản nhất về không gian vectơ tôpô, xây dựng khái niệm đồng điều và đối đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô. Trong đó, chúng tôi muốn nói tới định lý 1.1.8 về tiêu chuẩn của hệ cơ sở lân cận trong không gian vectơ tôpô. Dựa vào tiêu chuẩn đó, trong chương tiếp theo chúng tôi xây dựng được vật tự do tương đối sinh bởi một không gian tôpô thuần nhất.

1.1. Phạm trù các không gian vectơ tôpô

1.1.1. Tập cân và tập hút trong không gian vectơ

Định nghĩa 1.1.1 Cho A là một tập con của không gian vectơ X trên trường $\mathbb{K}$.

Tập hợp A được gọi là *cân* nếu với mọi x thuộc A thì ta có $\lambda x \in A$ với mọi $|\lambda| \leq 1$.

Tập hợp A được gọi là *hút*, nếu với mọi $x \in X$ đều tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $x \in \mu A$ với mọi μ thỏa mãn điều kiện $|\mu| \geq \lambda$.

Từ định nghĩa ta thấy: A là tập con cân của X khi và chỉ khi $\alpha A \subset A$ với mọi α thỏa mãn điều kiện $\alpha \in \mathbb{K}$ và $|\alpha| \leq 1$.

Ví dụ 1.1.1 1) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}$ trên trường $\mathbb{R}$. Với mỗi $r > 0$ khoảng $(-r, r)$ là một tập cân và hút, khoảng $(-r, r+1)$ là hút nhưng không cân.

2) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ trên trường $\mathbb{R}$. Với mỗi $r > 0$ tập hợp

$$\{(x; 0) \in \mathbb{R}^2 : -r < x < r\}$$

là tập cân nhưng không hút.

Một số tính chất về tập cân và hút trong không gian vectơ được nhắc lại trong hai mệnh đề dưới đây

Mệnh đề 1.1.1 Cho A, B là các tập con của không gian vectơ X trên trường $\mathbb{K}$ và $\alpha \in \mathbb{K}$. Khi đó:

- 1) Nếu A là một tập cân thì αA là tập cân. Nếu B là tập cân thì $A + B$ là tập cân;
- 2) Nếu A là tập cân thì với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$ mà $|\alpha| = 1$ thì $\alpha A = A$. Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mà $|\alpha| \leq |\beta|$ thì $\alpha A \subset \beta A$;
- 3) Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập con cân của X thì $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ cũng là tập cân;
- 4) Nếu A là tập hút thì αA là hút. Nếu B là tập con của X chứa 0 thì $A + B$ là hút;
- 5) Cho $(A_i)_{i=1}^n$ là một họ các tập con hút của X thì $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ cũng là tập hút;
- 6) Nếu A là tập hút thì $0 \in A$. Hơn nữa, nếu $(r_n)_n$ là dãy số không bị chặn thì

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n A$$

Chứng minh. Dưới đây ta chỉ trình bày chứng minh 2) và 6).

2) Nếu A cân và $|\alpha| = 1$. Khi đó $|\alpha| = |\alpha^{-1}| = 1 \leq 1$ nên $\alpha A \subset A$ và $\alpha^{-1} A \subset A$. Do đó, $\alpha A = A$.

Bây giờ giả sử A là tập con cân của X và $|\alpha| \leq |\beta|$. Nếu $\beta = 0$ thì $\alpha = 0$ do đó $\alpha A \subset \beta A$. Nếu $\beta \neq 0$ thì $|\frac{\alpha}{\beta}| \leq 1$ nên $\frac{\alpha}{\beta} A \subset A$. Vậy $\alpha A \subset \beta A$.

6) Hiển nhiên ta có $\bigcup_{n=1}^{\infty} r_n A \subset X$.

Ngược lại, với mọi $x \in X$. Do A hút nên tồn tại $t > 0$ sao cho $x \in sA$ với mọi $s \in \mathbb{K}$ mà $|s| > t$. Mặt khác do dãy $\{r_n\}$ không bị chặn tồn tại n_0 sao cho $|r_{n_0}| > t$ nên $x \in r_{n_0} A$. Vậy nên $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n A$.

Mệnh đề 1.1.2 Cho $f: X \rightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ X vào không gian vectơ Y .

- 1) Nếu $A \subset X$ và $B \subset Y$ là cân thì $f(A)$ và $f^{-1}(B)$ là cân;
- 2) Nếu $B \subset Y$ là hút thì $f^{-1}(B)$ là hút;
- 3) Nếu $A \subset X$ là hút và f là toàn ánh thì $f(A)$ là hút.

Chứng minh. 1) Nếu $A \subset X$ và A cân thì $\lambda A \subset A$ với mọi $|\lambda| \leq 1$. Tác động ánh xạ tuyến tính f vào ta có $\lambda f(A) \subset f(A)$. Do đó $f(A)$ cân.

Nếu $B \subset Y$ là cân thì $\lambda B \subset B$ với mọi $|\lambda| \leq 1$. Suy ra $f^{-1}(\lambda B) \subset f^{-1}(B)$, do f tuyến tính nên $\lambda f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$. Do đó $f^{-1}(B)$ cân.

2) Với mọi $x \in X$ thì $f(x) \in Y$. Do B hút trong Y nên tồn tại $t > 0$ sao cho $f(x) \in sB$ với mọi $|s| \geq t$. Suy ra $x \in sf^{-1}(B)$. Vậy $f^{-1}(B)$ là hút.

3) Với mọi $y \in Y$, do f là toàn ánh nên tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Lại do A hút trong X nên tồn tại $t > 0$ sao cho $x \in sA$ với mọi $|s| \geq t$. Suy ra $f(x) = y \in sf(A)$. Vậy $f(A)$ là hút. ■

1.1.2. không gian vectơ tôpô

Định nghĩa 1.1.2 Cho X là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ là trường số thực hoặc phức). Một tôpô τ trên không gian vectơ X được gọi là *tương thích với cấu trúc đại số* nếu các phép toán đại số trong X là liên tục trên tôpô đó. Nói cách khác, các điều kiện sau cần được thỏa mãn:

T_1 : Phép cộng "+" : $X \times X \rightarrow X$ ($(x, y) \mapsto x + y$) liên tục. Nghĩa là, mọi lân cận V của điểm $x + y$ đều có lân cận U_x của x và lân cận U_y của y sao cho $U_x + U_y \subset V$.

T_2 : Phép nhân ngoài "." : $\mathbb{K} \times X \rightarrow X ((\lambda, x) \mapsto \lambda.x)$ liên tục. Nghĩa là, với mọi lân cận V của $\lambda.x$ đều có một số $\epsilon > 0$ và một lân cận U của x sao cho $\forall \lambda', |\lambda' - \lambda| < \epsilon$ thì ta có $\lambda'.U \subset V$ (ta thường viết gọn phép nhân ngoài $\lambda.x = \lambda x$).

Một không gian vectơ X trên đó có một tôpô tương thích với cấu trúc đại số gọi là *không gian vectơ tôpô*.

Trong không gian vectơ tôpô ta có hai phép toán: phép cộng và phép nhân ngoài là liên tục nên ta có một số kết quả sau:

Định lí 1.1.3 Với mỗi $a \in X$, phép tịnh tiến $f : X \rightarrow X; f(x) = x + a$ là một phép đồng phôi của X lên chính nó. Đặc biệt, nếu U là một cơ sở lân cận của điểm gốc thì $U + a$ là một cơ sở lân cận của a .

Do đó toàn bộ cấu trúc tôpô của X được xác định bởi một cơ sở lân cận của điểm gốc. Như vậy ta sẽ làm việc chủ yếu với các lân cận của điểm gốc và nếu không xảy ra sự hiểu lầm thì ta sẽ gọi lân cận của điểm gốc vắn tắt là "lân cận".

Nếu U là một lân cận (của điểm gốc) thì $U + a$ là lân cận tương ứng của a , và $x \in U + a$ khi và chỉ khi $x - a \in U$.

Định lí 1.1.4 Với mỗi số khác không $\alpha \in \mathbb{K}$, ánh xạ $f : f(x) = \alpha x$ là một phép đồng phôi của X lên chính nó. Đặc biệt, nếu U là một lân cận, thì với mọi $\alpha \neq 0$, αU là một lân cận.

Chứng minh. Nếu $f(x) = \alpha x = y$ thì $f^{-1}(y) = x = \alpha^{-1}y$. Do đó f là đồng phôi của X lên chính nó. Mà $f(U) = \alpha U$ nên nếu U là một lân cận thì với mọi $\alpha \neq 0$, ta có αU là một lân cận. ■

Trong không gian tôpô để kiểm tra tính liên tục của một ánh xạ thì ta phải kiểm tra nó liên tục tại mọi điểm. Tuy nhiên trong không gian vectơ tôpô nếu ánh xạ đã cho là tuyến tính thì ta chỉ cần kiểm tra nó liên tục tại điểm gốc 0 , đó là nội dung của định lý sau:

Định lí 1.1.5 Cho $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ tôpô X vào không gian vectơ tôpô Y , thì f là liên tục trên X khi và chỉ khi f liên tục tại điểm gốc.

Chứng minh. Giả sử f liên tục tại điểm gốc 0. Gọi x là phần tử bất kì của X và V là lân cận bất kì của $f(x)$ trong Y . Do f tuyến tính nên ta có $V - f(x) = \{y - f(x) | y \in V\}$ là lân cận của 0 trong Y , lại vì f liên tục tại 0 nên tồn tại lân cận U của 0 trong X sao cho $f(U) \subset V - f(x)$ hay $f(U) + f(x) \subset V$. Vậy ta có $U+x$ là một lân cận của x thỏa mãn $f(U+x) \subset V$. ■

Mệnh đề 1.1.6 Nếu $\mathcal{U}_X$ là một cơ sở lân cận (của điểm gốc) trong không gian vector tôpô X thì ta có với mỗi $U \in \mathcal{U}_X$:

- 1) U là hút;
- 2) Tồn tại $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho $V + V \subset U$;
- 3) Tồn tại một lân cận cân $W \subset U$.

Chứng minh.

1) Với mọi $x \in X$. Do phép nhân ngoài λx liên tục tại $(0, x)$ nên tồn tại lân cận $\{\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon\}$ của 0 trong $\mathbb{K}$ sao cho $\lambda x \in U$, do đó $x \in \mu U$ khi $|\mu| \geq \varepsilon^{-1}$.

2) Với mỗi $U \in \mathcal{U}_X$. Do phép cộng $x + y$ liên tục tại $(0, 0)$ nên tồn tại hai lân cận V_1 và V_2 sao cho $V_1 + V_2 \subset U$. Mặt khác, tồn tại lân cận $V \subset V_1 \cap V_2$.

Vậy tồn tại lân cận V sao cho $V + V \subset U$.

3) Với mỗi $U \in \mathcal{U}_X$. Do phép nhân ngoài liên tục tại $(0, 0)$ nên tồn tại $\varepsilon > 0$ và lân cận V của 0 trong X sao cho $\lambda V \subset U$ với mọi $|\lambda| \leq \varepsilon$. Do đó $\varepsilon V \subset \mu U$ khi $|\mu| \geq 1$. Nên ta có $\varepsilon V \subset W = \bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu U$.

Vì εV là một lân cận nên W cũng là một lân cận. Lấy $x \in W$ và $0 < |\lambda| \leq 1$ ta có $x \in \frac{\mu}{\lambda} U$, nên $\lambda x \in \mu U$ khi $|\lambda| \leq 1$. Suy ra $\lambda x \in W$. Vậy W là lân cận cân được chứa trong U . ■

Bây giờ, chúng ta sẽ nhắc lại các tiên đề về tập hợp tất cả các lân cận của một không gian tôpô:

Mệnh đề 1.1.7 Nếu $\mathcal{U}_x$ là họ tất cả các lân cận của điểm x thuộc không gian tôpô X , thì $\mathcal{U}_x$ có các tính chất sau:

N1: $x \in U$ với mọi $U \in \mathcal{U}_x$;

N2: nếu $U \in \mathcal{U}_x$ và $V \in \mathcal{U}_x$, thì $U \cap V \in \mathcal{U}_x$;

N3: nếu $U \in \mathcal{U}_x$ và $U \subset V$, thì $V \in \mathcal{U}_x$;

N4: $U \in \mathcal{U}_x$, thì tồn tại $V \in \mathcal{U}_x$ sao cho $U \in \mathcal{U}_y$ với mọi $y \in V$.

Ngược lại, giả sử X là một tập hợp tùy ý và với mỗi phần tử $x \in X$ chỉ ra được một họ không rỗng $\mathcal{U}_x$ những tập con của X chứa x . Khi đó nếu các điều kiện N1 - N4 được thỏa mãn, ta có thể xác định được một tôpô duy nhất trên X .

Định lý 1.1.8 Trong mỗi không gian vectơ tôpô X tồn tại một cơ sở lân cận $\mathcal{U}_X$ của gốc 0 sao cho:

C1) Với mỗi $V \in \mathcal{U}_X$, tồn tại $W \in \mathcal{U}_X$ sao cho $W + W \subset V$;

C2) Với mỗi cặp $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_X$ tồn tại $V \in \mathcal{U}_X$ sao cho $V \subset V_1 \cap V_2$;

C3) Mỗi $V \in \mathcal{U}_X$ là cân và hút;

C4) Nếu $V \in \mathcal{U}_X$ thì $\alpha V \in \mathcal{U}_X$ với mọi $\alpha \neq 0$.

Ngược lại, nếu X là một không gian vectơ và $\mathcal{U}_X$ là một họ các tập khác rỗng các tập con của X chứa 0 thỏa mãn các điều kiện từ C1 - C4, thì tồn tại duy nhất một tôpô τ trên X sao cho (X, τ) là một không gian vectơ tôpô với cơ sở lân cận của điểm gốc là $\mathcal{U}_X$.

Chứng minh. Chiều thuận của định lý trên là hiển nhiên. bây giờ ta sẽ chứng minh chiều ngược lại.

Với mỗi $x \in X$, gọi $\mathcal{V}$ là tập tất cả các tập con của X chứa một tập hợp của $\mathcal{U}_X$ và với mỗi $x \in X$ lấy $\mathcal{V}_x = \{x + V | V \in \mathcal{V}\}$ làm tập hợp các lân cận của x . Ta cần chứng minh các điều sau:

1) $\mathcal{V}_x$ thỏa mãn các điều kiện N1 - N4:

Để thấy các điều kiện N1 và N3 là thỏa mãn, điều kiện N2 đúng do C2). Ta kiểm tra điều kiện N4: nếu $x + V \in \mathcal{V}_x$ thì tồn tại $U \in \mathcal{U}_X$ sao cho $U \subset V$. Do $U \in \mathcal{U}_X$ nên theo C1) tồn tại $W \in \mathcal{U}_X$ sao cho $W + W \subset U$. Ta sẽ chứng minh $x+W$ là một lân cận của mọi điểm thuộc $x+W$. Thật vậy, với mọi $y \in x+W$ thì ta có $y+W$ là một lân cận của y và do $y \in x+W$ suy ra $y - x \in W$. Từ đó, $y - x + W \subset W + W \subset U \subset V$, suy ra $y+W \subset x+V$.

Vậy $x + V$ là lân cận của y .

2) Phép cộng $x + y$ liên tục:

Ta chứng minh phép cộng liên tục tại (x, y) . Lấy $U \in \mathcal{U}_X$ thì theo C1) tồn tại $W \in \mathcal{U}_X$ sao cho $W + W \subset U$. Thế thì $(x + W) + (y + W) = x + y + W + W \subset x + y + U$. Do đó phép cộng liên tục.

3) phép nhân ngoài λx liên tục:

Gọi U là lân cận thì $\alpha a + U$ là lân cận của αa . Theo C1) tồn tại $W \in \mathcal{U}_X$ sao cho $W + W \subset U$. Do W là tập hút nên tồn tại $t > 0$ sao cho $a \in tW$.

Để chứng minh phép nhân ngoài λx liên tục tại (α, a) , ta cần chọn η và δ sao cho mọi $\lambda, |\lambda - \alpha| < \eta$ và mọi $x \in \delta W + a$ thì $\lambda x - \alpha a \in U$. Trong trình bày dưới đây, ta cần tới tính cân của W và C4): Ta có $\lambda x - \alpha a = \lambda(x - a) + (\lambda - \alpha)a \in (|\alpha| + \eta)\delta W + \eta tW$. Bây giờ ta sẽ chọn $\eta = t^{-1}$ và $\delta = (|\alpha| + t^{-1})^{-1}$ thì ta có $\lambda x - \alpha a \in W + W \subset U$. ■

Từ đây về sau, trong cuốn luận văn này ta gọi C1, C2, C3, C4 là bốn tiên đề về hệ cơ sở lân cận trong không gian vectơ tôpô. Liên quan đến các ánh xạ tuyến tính liên tục, chúng ta có một số kết quả sau:

Mệnh đề 1.1.9 Cho $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$ là ánh xạ tuyến tính liên tục giữa các không gian vectơ tôpô. Khi đó ánh xạ hợp thành $gf: X \rightarrow Z$ cũng là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Mệnh đề 1.1.10 Cho $f, g: X \rightarrow Y$ là hai ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian vectơ tôpô X vào không gian vectơ tôpô Y . Khi đó ánh xạ tổng $f + g: X \rightarrow Y$ được xác định như sau: với mọi $x \in X$ thì

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

cũng là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Chứng minh. Do tổng hai ánh xạ tuyến tính là ánh xạ tuyến tính nên ta có $f + g$ là ánh xạ tuyến tính. Từ đó, để chứng minh $f + g$ liên tục ta chỉ cần chứng minh nó liên tục tại 0. Thật vậy, với mọi U là lân cận trong Y thì tồn tại lân cận W trong Y sao cho:

$$W + W \subset U$$

Do f, g liên tục và do C2) nên tồn tại lân cận V sao cho

$$f(V) \subset W \text{ và } g(V) \subset W$$

Khi đó, ta có

$$(f + g)(V) = f(V) + g(V) \subset W + W \subset U$$

Vậy $f + g$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. ■

Mệnh đề 1.1.11 Cho $f: X \rightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính liên tục giữa hai không gian vectơ tôpô X và Y thì ánh xạ $(-f): X \rightarrow Y$ được xác định $(-f)(x) = -f(x)$ với mọi $x \in X$ cũng là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Chứng minh. Dễ thấy $(-f)$ cũng là ánh xạ tuyến tính nên để chứng minh tính liên tục của $(-f)$ ta chỉ cần kiểm tra tính liên tục của nó tại gốc 0.

Gọi $\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_Y$ lần lượt là cơ sở lân cận của X và Y thỏa mãn các điều kiện từ C1) đến C4). Với V là lân cận bất kì thuộc $\mathcal{U}_Y$, do f tuyến tính liên tục nên tồn tại $U \in \mathcal{U}_X$ sao cho $f(U) \subset V$. Mặt khác, do tính chất C4) nên $-U \in \mathcal{U}_X$. Từ đó, ta có:

$$(-f)(-U) = f(U) \subset V$$

Vậy $(-f)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. ■

Ví dụ 1.1.2 1) Cho X là một không gian vectơ tôpô và A là một không gian vectơ con của X . Khi đó ta có:

A là không gian vectơ tôpô với tôpô cảm sinh $\tau_A = \{A \cap G | G \in \tau_X\}$ và ánh xạ nhúng $i: A \rightarrow X$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

X/A là không gian vectơ tôpô với tôpô cảm sinh $\tau_{X/A} = \{\overline{G} | G \in \tau_X\}$ và ánh xạ chiếu $\pi: X \rightarrow X/A$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

2) Cho X và Y là hai không gian vectơ tôpô trên cùng một trường $\mathbb{K}$ (trường các số thực hoặc phức). Ánh xạ $0: X \rightarrow Y$ biến mọi phần tử của X thành phần tử 0 của Y là ánh xạ tuyến tính liên tục.

3) Cho X là một không gian vectơ tôpô thì ánh xạ đồng nhất $1_X: X \rightarrow X$ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Cho $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian vectơ tôpô X vào không gian vectơ tôpô Y . Khi đó $\text{Ker} f = f^{-1}(0)$ và $\text{Im} f = f(X)$ là các không gian vectơ tôpô với tôpô cảm sinh.

1.1.3. Phạm trù các không gian vectơ tôpô

Trước hết chúng ta nhắc lại khái niệm về phạm trù

Định nghĩa 1.1.3 Một phạm trù $\mathcal{P}$ được cấu thành bởi một lớp các đối tượng nào đó mà ta gọi hình thức là các vật, sao cho mỗi cặp sắp thứ tự các vật (A, B) xác định được duy nhất một tập hợp được kí hiệu là $\text{Mor}(A, B)$ các cấu xạ có nguồn A và đích là B . Đồng thời với bộ ba có thứ tự bất kì các vật (A, B, C) một luật hợp thành được xác định cho các cấu xạ của $\text{Mor}(A, B)$ và $\text{Mor}(B, C)$, cụ thể với bất kì cặp cấu xạ $(f, g) \in \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C)$ xác định được tích $gf \in \text{Mor}(A, C)$. Ngoài ra các điều kiện sau cần được thỏa mãn:

PT1: Nếu hai cặp vật (A, B) và (A', B') là khác nhau thì hai tập hợp cấu xạ $\text{Mor}(A, B)$ và $\text{Mor}(A', B')$ là rời nhau;

PT2: Đối với mỗi bộ ba cấu xạ $(f, g, h) \in \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(C, D)$ luật hợp thành có tính chất kết hợp, nghĩa là $h(gf) = (hg)f$;

PT3: Tồn tại cấu xạ đồng nhất 1_A cho mỗi vật A , là cấu xạ mà với mọi $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(C, A)$ ta luôn có $f1_A = f$ và $1_Ag = g$.

Ta dễ dàng kiểm tra được lớp tất cả các không gian vectơ tôpô và các ánh xạ tuyến tính liên tục thỏa mãn các tiên đề về phạm trù và ta gọi nó là *phạm trù các không gian vectơ tôpô*. Trong đó, lớp các vật là các không gian vectơ tôpô và các cấu xạ là các ánh xạ tuyến tính liên tục và luật hợp thành là phép lấy tích hai cấu xạ. Phạm trù các không gian vectơ tôpô được kí hiệu là $\mathcal{TVS}$.

Trong phạm trù các không gian vectơ tôpô, đơn ánh là đơn xạ, toàn ánh là toàn xạ. Tuy nhiên, hai khái niệm song xạ và đẳng xạ không trùng nhau. Hay rõ hơn thì cấu xạ f là song xạ khi và chỉ khi nó là tuyến tính liên tục và song ánh; f là đẳng xạ khi và chỉ khi nó là tuyến tính và đồng phôi. Các nhận xét trên được trình bày rõ hơn trong mệnh đề và ví dụ dưới đây:

Mệnh đề 1.1.12 Cho cấu xạ $f : A \rightarrow B$ từ không gian vectơ tôpô A vào không gian vectơ tôpô B trong phạm trù $\mathcal{TVS}$. Khi đó ta có:

- 1) Cấu xạ f là đơn xạ khi và chỉ khi nó là đơn ánh.
- 2) Cấu xạ f là toàn xạ khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

Ví dụ 1.1.3 Trường số thực R là không gian vectơ tôpô với tôpô tầm thường τ_1 mà cũng là không gian vectơ tôpô với tôpô thông thường τ_2 trên R . Ta xét ánh xạ đồng nhất: $i : (R, \tau_2) \rightarrow (R, \tau_1)$ được xác định: $i(x) = x$ với mọi $x \in R$.

Dễ thấy i là song ánh tuyến tính và τ_2 là tôpô mạnh hơn τ_1 nên i là liên tục. Do đó i là song xạ.

Mặt khác do i là song ánh tuyến tính nên tồn tại duy nhất $i^{-1} : (R, \tau_1) \rightarrow (R, \tau_2)$ được xác định: $i^{-1}(x) = x$ với mọi $x \in R$. Tuy nhiên do τ_2 mạnh hơn τ_1 nên i^{-1} không liên tục nên i không phải là đẳng xạ.

Qua ví dụ trên ta thấy phạm trù các không gian vectơ tôpô không phải là phạm trù Aben, tuy nhiên chúng ta hoàn toàn có thể kiểm tra được phạm trù các không gian vectơ tôpô là phạm trù tiền Aben. Đặc biệt, với X, Y là hai không gian vectơ tôpô bất kì trên cùng một trường $\mathbb{K}$ đặt $\text{Hom}(X, Y)$ là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y . Do tổng hai ánh xạ tuyến tính liên tục thuộc $\text{Hom}(X, Y)$ cũng là một ánh xạ tuyến tính liên tục thuộc $\text{Hom}(X, Y)$, tổng hai ánh xạ tuyến tính liên tục có tính giao hoán, kết hợp nên $\text{Hom}(X, Y)$ cùng với phép cộng giữa hai ánh xạ tuyến tính liên tục lập thành một nhóm Aben với phần tử 0 là ánh xạ $0 : X \rightarrow Y$ và phần tử đối của $f : X \rightarrow Y$ là $-f : X \rightarrow Y$. Từ đó ta có, hàm tử $\text{Hom}(X, -)$ là hàm tử hiệp biến từ phạm trù các không gian vectơ tôpô vào phạm trù các nhóm Aben và hàm tử $\text{Hom}(-, X)$ là hàm tử phản biến từ phạm trù các không gian vectơ tôpô vào phạm trù các nhóm Aben.

Định nghĩa 1.1.4 Trong phạm trù các không gian vectơ tôpô $\mathcal{TVS}$, một dãy các cấu xạ

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots \quad (1)$$

được gọi là *khớp tại không gian vectơ tôpô B* nếu $\text{Im} f = \text{Ker } g$.

Một không gian vectơ tôpô được gọi là *vật trung gian*, nếu tại đó vừa có cấu

xạ vào, vừa có cầu xạ ra.

Dãy các cầu xạ (1) được gọi là *dãy khớp* nếu nó khớp tại mỗi vật trung gian.

Định nghĩa 1.1.5 *Dãy khớp ngắn* là dãy khớp có dạng:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

1.2. Phức và đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô

Trong phần này, chúng tôi trình bày về phức, đồng điều, đối đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô. Từ đó, thu được kết quả là định lý 1.2.6 "Nếu hai phức tương đương đồng luân thì các nhóm đối đồng điều tương ứng của chúng đẳng cấu với nhau". Dựa vào định lý này và một số kết quả khác nữa được trình bày trong chương 2, chúng tôi chứng minh được tính hợp lý trong cách định nghĩa hàm tử Ext.

1.2.1. Phạm trù các phức

Định nghĩa 1.2.1 Một phức hợp dây chuyền X các không gian vectơ tôpô là họ $\{X_n, \partial_n\}$ gồm các không gian vectơ tôpô X_n và các ánh xạ tuyến tính liên tục $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, được cho theo tất cả các số nguyên n , $-\infty < n < \infty$, hơn nữa $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Như vậy phức hợp X là dãy vô tận về hai đầu:

$$X : \cdots \leftarrow X_{-2} \leftarrow X_{-1} \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots$$

Trong đó tích của hai ánh xạ tuyến tính liên tục nối tiếp nhau thì bằng 0. Từ đây cho đến hết nội dung của luận văn này, chúng ta sẽ gọi phức hợp dây chuyền các không gian vectơ tôpô và các ánh xạ tuyến tính liên tục là phức (nếu không có giải thích gì thêm).

Định nghĩa 1.2.2 Cho X và X' là các phức, một biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ là một họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $\{f_n : X_n \rightarrow X'_n, n \in \mathbb{Z}\}$ sao cho $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ đối với mọi n .

Như vậy biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ là họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $\{f_n : X_n \rightarrow X'_n\}$ sao cho $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$. Đồng thức cuối tương đương với điều kiện biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc}
 X : \dots & \longleftarrow & X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & X_{n+1} \longleftarrow \dots \\
 & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\
 X' : \dots & \longleftarrow & X'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & X'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & X'_{n+1} \longleftarrow \dots
 \end{array}$$

Khi đó lớp tất cả các phức lập thành một phạm trù với cấu xạ là các biến đổi dây chuyền và ta gọi nó là *phạm trù các phức*. Thật vậy, ta có thể kiểm tra các điều kiện của phạm trù như dưới đây:

1) Trước hết, ta thấy với hai phức X, Y bất kì. Dễ thấy, họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $f = \{f_n\}$ là một biến đổi dây chuyền từ X vào Y , trong đó $f_n = 0 : X_n \rightarrow Y_n$. Do đó, ta luôn xác định được tập $\text{Mor}(X, Y)$ các cấu xạ có nguồn là X và đích là Y .

2) Tích các biến đổi dây chuyền là một biến đổi dây chuyền do tích của hai ánh xạ tuyến tính liên tục là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Mặt khác, Ta có tích của các ánh xạ tuyến tính liên tục có tính chất kết hợp nên tích các biến đổi dây chuyền có tính chất kết hợp.

3) Cuối cùng, với mỗi phức $X = X_n, \partial_n$ thì họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $1_X = \{1_{X_n} : X_n \rightarrow X_n\}$ là một biến đổi dây chuyền có tính chất $1_X \cdot f = f$ và $g \cdot 1_X = g$ nếu các tích $1_X \cdot f, g \cdot 1_X$ là xác định. ■

1.2.2. Đồng luân dây chuyền

Định nghĩa 1.2.3 Cho các biến đổi dây chuyền $f, g : X \rightarrow X'$ từ phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ tới phức $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$. Họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $s = \{s_n : X_n \rightarrow X'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ được gọi là một *đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền* f, g nếu thỏa mãn điều kiện

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$$

Khi đó, ta viết: $s : f \simeq g$.

Nhận xét: Quan hệ đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền từ phức X tới phức X' là một quan hệ tương đương.

Thật vậy, dưới đây ta sẽ kiểm tra các điều kiện của quan hệ tương đương:

1) (Phản xạ) Với mỗi biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ thì họ các ánh xạ tuyến tính liên tục $\{0 : X_n \rightarrow X'_{n+1}\}$ chính là một đồng luân dây chuyền $0 : f \simeq f$.

2) (Đối xứng) Với $s = \{s_n\} : f \simeq g$ là đồng luân dây chuyền giữa f và g thì $-s = \{-s_n\} : g \simeq f$ là đồng luân dây chuyền giữa g và f .

3) (Bắc cầu) Cuối cùng nếu $s = \{s_n\} : f \simeq g$ và $t = \{t_n\} : g \simeq h$ thì ta sẽ có $s + t = \{s_n + t_n\} : f \simeq h$. thật vậy do $s : f \simeq g$ và $t : g \simeq h$ nên theo định nghĩa ta có

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n,$$

$$\partial'_{n+1}t_n + t_{n-1}\partial_n = g_n - h_n.$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$\partial'_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})\partial_n = f_n - h_n.$$

Mặt khác, do tổng của hai ánh xạ tuyến tính liên tục là một ánh xạ tuyến tính liên tục nên $s + t : f \simeq h$ là đồng luân dây chuyền giữa f và h .

Định lí 1.2.1 Nếu $s : f \simeq g$ là đồng luân dây chuyền giữa $f, g : X \rightarrow X'$ và $s' : f' \simeq g'$ là đồng luân dây chuyền giữa $f', g' : X' \rightarrow X''$ thì ánh xạ $f's + s'g : f'f \simeq g'g$ là đồng luân dây chuyền giữa $f'f, g'g : X \rightarrow X''$.

Chứng minh. Xét biểu đồ sau

$$\begin{array}{ccccccc} X : \cdots & \longleftarrow & X_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & X_n & \xleftarrow{\partial} & X_{n+1} \longleftarrow \cdots \\ & & \Downarrow & \searrow s_{n-1} & \Downarrow f & \searrow g & \Downarrow s_n \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ X' : \cdots & \longleftarrow & X'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'} & X'_n & \xleftarrow{\partial'} & X'_{n+1} \longleftarrow \cdots \\ & & \Downarrow & \searrow s'_{n-1} & \Downarrow f' & \searrow g' & \Downarrow s'_n \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ X'' : \cdots & \longleftarrow & X''_{n-1} & \xleftarrow{\partial''} & X''_n & \xleftarrow{\partial''} & X''_{n+1} \longleftarrow \cdots \end{array}$$

theo giả thiết $s = \{s_n\} : f \simeq g$ nên ta có:

$$\partial's_n + s_{n-1}\partial = f - g$$

và do $s' = \{s'_n\} : f' \simeq g'$ nên ta có:

$$\partial'' s'_n + s'_{n-1} \partial' = f' - g'$$

từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} f'f - g'g &= f' \partial s_n + f' s_{n-1} \partial + \partial'' s'_n g + s'_{n-1} \partial' g \\ &= \partial'' f' s_n + f' s_{n-1} \partial + \partial'' s'_n g + s'_{n-1} g \partial \\ &= \partial'' [f' s_n + s'_n g] + [f' s_{n-1} + s'_{n-1} g] \partial \end{aligned}$$

Mặt khác, do tích hai ánh xạ tuyến tính liên tục là một ánh xạ tuyến tính liên tục và tổng của hai ánh xạ tuyến tính liên tục là một ánh xạ tuyến tính liên tục nên $f's + s'g = \{f's_n + s'_n g\}$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Do đó, $f's + s'g$ là một đồng luân dây chuyền giữa $f'f$ và $g'g$, nghĩa là:

$$f's + s'g : f'f \simeq g'g. \blacksquare$$

Định nghĩa 1.2.4 Cho X, X' là các phức. Biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ được gọi là một *tương đương dây chuyền* nếu tồn tại biến đổi dây chuyền $h : X' \rightarrow X$ và các đồng luân dây chuyền $s : hf \simeq 1_X$ và $t : fh \simeq 1_{X'}$.

Hai phức X và X' được gọi là *tương đương đồng luân* với nhau nếu tồn tại một tương đương dây chuyền $f : X \rightarrow X'$. Khi đó ta viết: $X \simeq X'$.

1.2.3. Các hàm tử đồng điều

Định nghĩa 1.2.5 Cho phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, đồng điều $H(X)$ là họ các không gian vectơ tôpô:

$$H_n(X) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$$

Không gian vectơ tôpô thương $H_n(X)$ được gọi là không gian vectơ tôpô đồng điều thứ n của phức X .

Các phần tử của không gian vectơ tôpô con $C_n(X) = \text{Ker} \partial_n$ được gọi là các chu trình n -chiều, còn các phần tử của không gian vectơ tôpô $B_n(X) = \text{Im} \partial_{n+1}$ được gọi là các bờ n -chiều. Theo cách gọi đó thì $H_n(X) = C_n / B_n$ là không gian vectơ tôpô thương của không gian vectơ tôpô các chu trình n -chiều theo không

gian vectơ tôpô các bờ n -chiều. Phần tử của $H_n(X)$ là các lớp ghép của các chu trình $c \in C_n$, thường được viết là $clsc$ hay $\{c\}$. Ta có $clsc = c + B_n$.

Hai chu trình n -chiều c và c' cùng thuộc một lớp đồng điều trong $H_n(X)$, nghĩa là $clsc = clsc'$ khi và chỉ khi $c - c' \in B_n(X)$. Khi đó ta nói c và c' là đồng điều với nhau và viết: $c \sim c'$.

Cho các phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ và biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, biến đổi dây chuyền f cảm sinh ánh xạ tuyến tính liên tục

$$f_* = H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$$

được xác định như sau: với mỗi $clsc = c + \partial X_{n+1} \in H_n X$ thì

$$f_*(clsc) = cl(f_n(c)) = f_n(c) + \partial' X'_{n+1}$$

Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có H_n là một hàm tử từ phạm trù các phức với biến đổi dây chuyền tới phạm trù các không gian vectơ tôpô. Tương ứng mỗi phức X với không gian vectơ tôpô đồng điều $H_n(X)$ và tương ứng mỗi biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ với ánh xạ tuyến tính liên tục $f_* = H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$. Ta gọi chúng là các *hàm tử đồng điều*. Các hàm tử đồng điều H_n là các hàm tử hiệp biến.

Liên quan tới hàm tử đồng điều trong phạm trù các không gian vectơ tôpô, ta cũng có một số kết quả tương tự như trong phạm trù môđun.

Định lý 1.2.2 Nếu $s : f \simeq g$ là đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền $f, g : X \rightarrow X'$ từ phức X tới phức X' thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$$

Chứng minh. Với mỗi $clsc \in H_n(X) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$ thì ta có $\partial_n(c) = 0$. Theo giả thiết của định lý ta có $s : f \simeq g$, từ đó suy ra:

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$$

Tác động vào c ta có:

$$\partial'_{n+1}s_n(c) = f_n(c) - g_n(c)$$

Do đó $f_n(c) - g_n(c) \in \text{Im} \partial'_{n+1}$ hay $cl(f_n(c)) = cl(g_n(c))$ trong $H_n(X')$.

Vậy ta có $H_n(f) = H_n(g)$. ■

Hệ quả 1.2.3 Nếu $f : X \rightarrow X'$ là một tương đương dây chuyền thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đồng cấu $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(X')$ là đẳng cấu.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $f : X \rightarrow X'$ là một tương đương dây chuyền nên tồn tại biến đổi dây chuyền $g : X' \rightarrow X$ sao cho

$$fg \simeq 1_{X'}, gf \simeq 1_X$$

theo định lý 1.2.2 ta có $H_n(fg) = H_n(1_{X'})$, $H_n(gf) = H_n(1_X)$, Hơn nữa do H_n là hàm tử hiệp biến nên ta có

$$H_n(f)H_n(g) = 1_{H_n(X')}, H_n(g)H_n(f) = 1_{H_n(X)}$$

Vậy $H_n(f)$ là đẳng cấu. ■

1.2.4. Đối đồng điều

Cho phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ và G là một không gian vectơ tôpô. Tác động hàm tử phản biến $\text{Hom}(-, G)$ lên phức X ta thu được phức chỉ số trên được kí hiệu là $\text{Hom}(X, G)$, gồm các nhóm aben:

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}(X_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \text{Hom}(X_n, G) \xrightarrow{\delta^n} \text{Hom}(X_{n+1}, G) \longrightarrow \cdots$$

trong đó đồng cấu $\delta^n : \text{Hom}(X_n, G) \rightarrow \text{Hom}(X_{n+1}, G)$ được xác định theo công thức:

$$\delta^n(f) = (-1)^{n+1} \partial_{n+1}^*(f) = (-1)^{n+1} f \partial_{n+1}.$$

Định nghĩa 1.2.6 Đối đồng điều của phức X với hệ số trong G là họ các nhóm Aben được đánh số theo chỉ số trên:

$$H^n(X, G) = H^n(\text{Hom}(X, G)) = \text{Ker} \delta^n / \text{Im} \delta^{n-1}$$

Các phần tử của $\text{Ker} \delta^n$ được gọi là đối chu trình n -chiều, còn các phần tử của $\text{Im} \delta^{n-1}$ được gọi là đối bờ n -chiều. Các phần tử của nhóm $\text{Hom}^n(X, G) = \text{Hom}(X_n, G)$ cũng được gọi là các đối dây chuyền n -chiều. Như vậy một đối chu trình n -chiều là một ánh xạ tuyến tính liên tục $h : X_n \rightarrow G$ sao cho $h\partial = 0$.

Cho X và X' là các phức và $f : X \rightarrow X'$ là biến đổi dây chuyền. Tác động hàm tử $\text{Hom}(-, G)$ vào f cảm sinh nên biến đổi dây chuyền

$$f^* : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$$

Hàm tử $\text{Hom}(-, G)$ đặt tương ứng mỗi phức X với phức $\text{Hom}(X, G)$ và mỗi biến đổi dây chuyền f với biến đổi dây chuyền f^* là một hàm tử phản biến từ phạm trù các phức với chỉ số dưới tới phạm trù các phức với chỉ số trên. Từ đó, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, $H^n = H^n(-, G)$ là hàm tử phản biến từ phạm trù các phức với biến đổi dây chuyền tới phạm trù các nhóm Aben.

Định lý 1.2.4 Nếu $s : f \simeq g$ là một đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền $f, g : X \rightarrow X'$ thì $t : f^* \simeq g^*$ là đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền $f^*, g^* : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$. Trong đó $t = \{t^n\}$ với $t^n = (-1)^n s_{n-1}^*$.

Chứng minh. Theo giả thiết $s : f \simeq g$ là một đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền $f, g : X \rightarrow X'$. Theo định nghĩa đồng luân dây chuyền ta có

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$$

tác động $\text{Hom}(-, G)$ vào đẳng thức trên ta thu được

$$s_n^* \partial'_{n+1} + \partial_n^* s_{n-1}^* = f_n^* - g_n^*$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n+1} s_n^* \delta'^n + (-1)^n \delta^{n-1} s_{n-1}^* = f_n^* - g_n^*$$

Đặt $t = \{t^n\}$ với $t^n = (-1)^n s_{n-1}^*$ thì ta có

$$t^{n+1} \delta'^n + \delta^{n-1} t^n = f_n^* - g_n^*$$

Từ đó ta có $t : f^* \simeq g^*$ là đồng luân dây chuyền giữa f^* và g^* . ■

Mệnh đề 1.2.5 Nếu X và X' là hai phức tương đương đồng luân thì các phức nhóm Aben $\text{Hom}(X, G)$, $\text{Hom}(X', G)$ cũng tương đương đồng luân.

Chứng minh. Theo giả thiết mệnh đề thì $X \simeq X'$, khi đó tồn tại các biến đổi dây chuyền $f : X \rightarrow X'$ và $g : X' \rightarrow X$ và các đồng luân dây chuyền

$$s : gf \simeq 1_X \text{ và } t : fg \simeq 1_{X'}.$$

Ta tác động hàm tử phản biến $\text{Hom}(-, G)$ vào các biến đổi dây chuyền f và g cảm sinh nên các biến đổi dây chuyền $f^* : \text{Hom}(X', G) \rightarrow \text{Hom}(X, G)$ và $g^* : \text{Hom}(X, G) \rightarrow \text{Hom}(X', G)$. Theo định lý 1.2.2 ta có các đồng luân dây chuyền

$$u : (gf)^* \simeq (1_X)^* \text{ và } v : (fg)^* \simeq (1'_{X'})^*.$$

Do $\text{Hom}(-, G)$ là hàm tử phản biến nên ta có

$$u : f^* g^* \simeq 1_{\text{Hom}(X, G)} \text{ và } v : g^* f^* \simeq 1_{\text{Hom}(X', G)}.$$

Do đó ta có $\text{Hom}(X, G) \simeq \text{Hom}(X', G)$. ■

Định lý 1.2.6 Nếu X, X' là hai phức tương đương đồng luân thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có đẳng cấu nhóm giữa các nhóm đối đồng điều $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$.

Chứng minh. Do X và X' là hai phức tương đương đồng luân theo mệnh đề 1.2.5 ta có $\text{Hom}(X, G)$ và $\text{Hom}(X', G)$ là hai phức tương đương đồng luân. Theo hệ quả 1.2.3 suy ra $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$. ■

Chương 2

Hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ tôpô

Trong chương này, trước hết chúng tôi trình bày về không gian tôpô thuần nhất, ánh xạ chính quy, vật xạ ảnh tương đối và vật tự do tương đối. Từ đó, chúng minh được "*tính đủ nhiều của các vật tự do tương đối sinh bởi các không gian vectơ tôpô*" qua nội dung định lý 2.1.13. Cuối cùng, chúng tôi trình bày cách xây dựng hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ tôpô bằng phép giải xạ ảnh tương đối.

2.1. Không gian tôpô thuần nhất và ánh xạ chính quy

2.1.1. Không gian tôpô thuần nhất

Định nghĩa 2.1.1 Một tập hợp X khác rỗng, trong đó cố định một điểm gọi là điểm gốc và kí hiệu là 0 , được gọi là một *không gian thuần nhất* nếu có một phép nhân ngoài từ trường số thực $\mathbb{R}$ vào X như sau: $\mathbb{R} \times X \rightarrow X : (r, x) \mapsto rx$ thỏa mãn các điều kiện: với mọi $x \in X$ và mọi số thực r, s ta có:

$$1) 0x = 0$$

$$2) (rs)x = r(sx)$$

$$3) 1x = x.$$

Từ định nghĩa không gian thuần nhất ta thấy, với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda 0 = 0$. Thật vậy:

$$\lambda 0 = \lambda(0 \cdot 0) = (\lambda \cdot 0)0 = 0 \cdot 0 = 0$$

Ngoài ra, nếu A là tập con khác rỗng của không gian thuần nhất X và A đóng kín với phép nhân ngoài, thì A cũng là không gian thuần nhất và ta gọi nó là *không gian thuần nhất con* của X .

Ví dụ 2.1.1 1) Mọi không gian vectơ đều là không gian thuần nhất.

2) Cho tập hợp $X = \{a, b, 0\}$. Ta định nghĩa phép nhân ngoài từ $\mathbb{R}$ vào X như sau: với mọi $r \in \mathbb{R}$, ta đặt $ra = a$, $rb = b$, $r0 = 0$. Khi đó X là một không gian thuần nhất nhưng không phải là không gian vectơ.

Trên không gian thuần nhất X ta định nghĩa một quan hệ $\sim$ như sau: Với mọi $x_1, x_2 \in X$ thì $x_1 \sim x_2$ nếu có số $r \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$.

Mệnh đề 2.1.1 Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

Chứng minh. Ta kiểm tra các điều kiện của một quan hệ tương đương:

1) Phản xạ: Ta có $x = 1 \cdot x$ nên $x \sim x$.

2) Đối xứng: Nếu $x_1 \sim x_2$ thì ta có số $r \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$ nhân vào hai vế của đẳng thức với r^{-1} ta có $r^{-1}x_1 = x_2$ suy ra $x_2 \sim x_1$.

3) bắc cầu: Nếu $x_1 \sim x_2$ và $x_2 \sim x_3$ thì có các số $r, s \neq 0$ sao cho $x_1 = rx_2$ và $x_2 = sx_3$. Suy ra $x_1 = r(sx_3) = (rs)x_3$ nên $x_1 \sim x_3$.

Vậy $\sim$ là một quan hệ tương đương. ■

Khi đó quan hệ $\sim$ thực hiện một sự phân lớp trên không gian thuần nhất X . Với mỗi $x \in X$, lớp các phần tử của X quan hệ $\sim$ với x được kí hiệu là $\bar{x}$ và được xác định như sau:

$$\bar{x} = \{y \in X \mid \exists r \in \mathbb{R}^* : y = rx\} = \mathbb{R}^*x \text{ và } \bar{0} = \{0\}$$

với mỗi một lớp $\bar{x}_i$ khác lớp $\bar{0}$ như trên ta chọn một đại diện và kí hiệu là e_i . Như vậy

$$X = \bigcup_{i \in I} R^* e_i \bigcup \{0\} = \bigcup_{i \in I} Re_i \text{ và } R^* e_i \cap R^* e_j = \emptyset \text{ nếu } i \neq j$$

Ta gọi họ $\{e_i\}_{i \in I}$ là một cơ sở thuần nhất của X . Khi đó với mọi $x \in X$, tồn tại duy nhất một $i \in I$ sao cho $x \sim e_i$. Với mỗi i ta coi Re_i là một đường thẳng đi qua điểm gốc 0 thì $X = \bigcup_{i \in I} Re_i$ có thể hình dung là một họ các đường thẳng đồng quy tại 0 .

Qua phần trình bày ở trên, ta thấy không gian thuần nhất luôn có một cơ sở thuần nhất và hai cơ sở thuần nhất của cùng một không gian thuần nhất có cùng một lực lượng. Hơn nữa, nếu $e = \{e_i\}_{i \in I}$ và $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ là hai cơ sở thuần nhất của cùng một không gian thuần nhất thì với mỗi $e_i \in e$ luôn tồn tại $\varepsilon_j \in \varepsilon$ sao cho $e_i \sim \varepsilon_j$ và ngược lại.

Định nghĩa 2.1.2 Tập hợp con A của một không gian thuần nhất X được gọi là *cân* nếu với mọi x thuộc A thì ta có $\lambda x \in A$ khi $|\lambda| \leq 1$.

Tập hợp con A của một không gian thuần nhất X được gọi là *hút* nếu: với mọi $x \in X$ thì có $\lambda > 0$ sao cho: $x \in \mu A$ với mọi μ thỏa mãn $|\mu| \geq \lambda$.

Dễ thấy, tập cân và hút trong không gian thuần nhất có một số tính chất tương tự như trong không gian vectơ.

Mệnh đề 2.1.2 Cho A, B là các tập con của không gian thuần nhất X và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó:

- 1) Nếu A là một tập cân thì αA là tập cân;
- 2) Nếu A là tập cân thì với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$ mà $|\alpha| = 1$ thì $\alpha A = A$. Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mà $|\alpha| \leq |\beta|$ thì $\alpha A \subset \beta A$;
- 3) Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập con cân của X thì $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ cũng là tập cân;
- 4) Nếu A là tập hút thì αA là hút;
- 5) Cho $(A_i)_{i=1}^n$ là một họ các tập con hút của X thì $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ cũng là tập hút;

6) Nếu A là tập hút thì $0 \in A$. Hơn nữa, nếu $(r_n)_n$ là dãy số không bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n A$$

Định nghĩa 2.1.3 Cho X và Y là hai không gian thuần nhất. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *ánh xạ thuần nhất* nếu với mọi số thực r và mọi $x \in X$ thì $f(rx) = rf(x)$.

Tương tự như trong không gian vectơ, qua tác động của ánh xạ thuần nhất: ảnh của tập cân là cân; ảnh ngược của tập cân, hút tương ứng là cân, hút; ảnh toàn ánh của tập hút là hút.

Mệnh đề 2.1.3 Cho $f: X \rightarrow Y$ là ánh xạ thuần nhất từ không gian thuần nhất X vào không gian thuần nhất Y .

- 1) Nếu $A \subset X$ và $B \subset Y$ là cân thì $f(A)$ và $f^{-1}(B)$ là cân;
- 2) Nếu $B \subset Y$ là hút thì $f^{-1}(B)$ là hút;
- 3) Nếu $A \subset X$ là hút và f là toàn ánh thì $f(A)$ là hút.

Ánh xạ thuần nhất $f : X \rightarrow Y$ hoàn toàn được xác định nếu biết ảnh của một cơ sở thuần nhất trong X . Ngoài ra, phép hợp thành của hai ánh xạ thuần nhất cũng là ánh xạ thuần nhất.

Mệnh đề 2.1.4 Cho $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ thuần nhất thì $gf: X \rightarrow Z$ cũng là ánh xạ thuần nhất.

Ví dụ 2.1.2 1) Cho A là một không gian thuần nhất con của X . Khi đó ánh xạ nhúng $i: A \rightarrow X$ được xác định: mỗi $x \in A$ thì $i(x) = x \in X$ là một ánh xạ thuần nhất và ta gọi nó là *ánh xạ nhúng thuần nhất*.

2) Cho X, Y là các không gian thuần nhất, ánh xạ $0 : X \rightarrow Y$ được xác định: với mỗi $x \in X$ thì $0(x) = 0 \in Y$ cũng là một ánh xạ thuần nhất và ta gọi nó là *ánh xạ thuần nhất tầm thường*.

3) Cho $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ X vào không gian vectơ Y thì f là ánh xạ thuần nhất.

Định nghĩa 2.1.4 Không gian thuần nhất X được gọi là *không gian tôpô thuần nhất* nếu có một họ $\mathcal{U}_X$ không rỗng những tập hợp con chứa điểm gốc 0 của X thỏa các tính chất sau:

T1: Nếu $U \in \mathcal{U}_X, V \in \mathcal{U}_X$, thì tồn tại $W \in \mathcal{U}_X$ với $W \subset U \cap V$;

T2: Nếu $U \in \mathcal{U}_X$ thì $\alpha U \in \mathcal{U}_X$ với mọi $\alpha \neq 0$;

T3: Mỗi $U \in \mathcal{U}_X$ đều là cân và hút.

Họ $\mathcal{U}_X$ như vậy được gọi là *cơ sở lân cận* của điểm gốc trong X . Mỗi tập hợp U thuộc $\mathcal{U}_X$ được gọi là một lân cận của gốc trong X hay đơn giản gọi là lân cận trong X .

Ví dụ 2.1.3 Không gian vectơ tôpô là một không gian tôpô thuần nhất nhưng một không gian tôpô thuần nhất thì chưa hẳn là không gian vectơ tôpô.

Định nghĩa 2.1.5 Một ánh xạ thuần nhất $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô thuần nhất X đến không gian tôpô thuần nhất Y được gọi là *ánh xạ thuần nhất liên tục* nếu với mỗi lân cận $V \in \mathcal{U}_Y$ thì tồn tại một lân cận $U \in \mathcal{U}_X$ sao cho $f(U) \subset V$.

Ví dụ 2.1.4 Cho $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian vectơ tôpô X vào không gian vectơ tôpô Y thì f là ánh xạ thuần nhất liên tục.

Mệnh đề 2.1.5 Cho $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ thuần nhất liên tục thì ánh xạ $gf: X \rightarrow Z$ cũng là ánh xạ thuần nhất liên tục.

Ánh xạ thuần nhất liên tục thì chưa hẳn là liên tục nhưng nếu ánh xạ thuần nhất liên tục giữa các không gian vectơ tôpô mà tuyến tính thì liên tục.

Mệnh đề 2.1.6 Cho X và Y là các không gian vectơ tôpô. Nếu ánh xạ tuyến tính $h : X \rightarrow Y$ là ánh xạ thuần nhất liên tục thì h liên tục.

Chứng minh. Do h là ánh xạ tuyến tính nên để chứng minh h liên tục ta chỉ cần chứng minh h liên tục tại điểm gốc.

Gọi V là một lân cận bất kì trong Y . Khi đó do $\mathcal{U}_Y$ là cơ sở lân cận của gốc trong không gian vectơ tôpô nên tồn tại lân cận $V' \in \mathcal{U}_Y$ sao cho $V' \subset V$. Theo

định nghĩa ánh xạ thuần nhất thì ta có $U' \in \mathcal{U}_X$ sao cho $h(U') \subset V' \subset V$. Vậy h liên tục. ■

2.1.2. Ánh xạ chính quy

Định nghĩa 2.1.6 Cho X và Y là hai không gian vector tôpô. Ta gọi ánh xạ tuyến tính liên tục $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ chính quy nếu có ánh xạ thuần nhất liên tục $f' : Y \rightarrow X$ sao cho $ff'f = f$.

Từ đây khi nói ánh xạ chính quy f thì kí hiệu f' là chỉ ánh xạ thuần nhất liên tục tương ứng. Dễ thấy mọi đồng phôi đều là ánh xạ chính quy và ánh xạ $0 : X \rightarrow Y$ cũng là ánh xạ chính quy.

Mệnh đề 2.1.7 Cho ánh xạ chính quy $f : X \rightarrow Y$, khi đó ta có:

1) Nếu f là đơn ánh thì $f'f = 1_X$.

2) Nếu f là toàn ánh thì $ff' = 1_Y$.

Chứng minh. 1) Giả sử f là đơn ánh. Khi đó với mọi $x \in X$ ta có: $ff'f(x) = f(x)$, mà f là đơn ánh nên $f'f(x) = x$. Do đó $f'f = 1_X$.

2) Giả sử f là toàn ánh. Khi đó với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Do f là ánh xạ chính quy nên $ff'f(x) = f(x)$ suy ra $ff'(y) = y$. Vậy $ff' = 1_Y$. ■

Mệnh đề 2.1.8 Cho $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ chính quy.

1) Nếu f là toàn ánh thì $gf : X \rightarrow Z$ là ánh xạ chính quy;

2) Nếu g là đơn ánh thì $gf : X \rightarrow Z$ là ánh xạ chính quy.

Chứng minh. 1) Do f, g là ánh xạ chính quy và f là toàn ánh nên tồn tại các ánh xạ thuần nhất liên tục tương ứng f' và g' sao cho $ff' = 1_Y$ và $gg'g = g$. Do tích hai ánh xạ thuần nhất liên tục là ánh xạ thuần nhất liên tục nên $f'g' : Z \rightarrow X$ cũng là ánh xạ thuần nhất liên tục, ta sẽ chỉ ra rằng $f'g'$ là tương ứng với gf . Thật vậy:

$$(gf)(f'g')(gf) = g(ff')g'(gf) = (gg'g)f = gf.$$

Hơn nữa, dễ thấy gf là ánh xạ tuyến tính liên tục nên gf là ánh xạ chính quy.

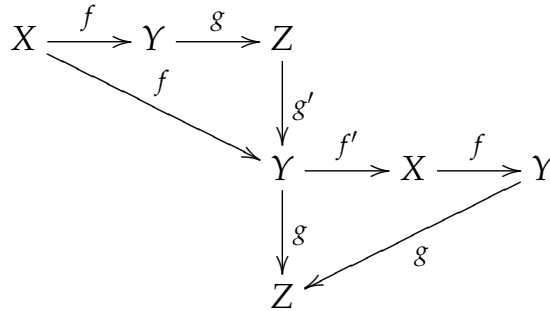
2) Do f, g là ánh xạ chính quy và g là đơn ánh nên tồn tại các ánh xạ thuần nhất liên tục tương ứng f' và g' sao cho $ff'f = f$ và $g'g = 1_Y$. Do tích hai ánh xạ thuần nhất liên tục là ánh xạ thuần nhất liên tục nên $f'g': Z \rightarrow X$ cũng là ánh xạ thuần nhất liên tục, ta sẽ chỉ ra rằng $f'g'$ là tương ứng với gf . Thật vậy, ta có:

$$(gf)(f'g')(gf) = (gf)f'(g'g)f = g(ff'f) = gf.$$

Hơn nữa, do gf là ánh xạ tuyến tính liên tục nên gf là ánh xạ chính quy. ■

Mệnh đề 2.1.9 Cho $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ chính quy và $\text{Kerg} \subset \text{Im}f$ thì $gf: X \rightarrow Z$ là ánh xạ chính quy.

Chứng minh. Do $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ chính quy nên tồn tại các ánh xạ thuần nhất liên tục $g': Z \rightarrow Y$ và $f': Y \rightarrow X$ thỏa mãn $ff'f = f$ và $gg'g = g$. Do tích của hai ánh xạ thuần nhất liên tục là ánh xạ thuần nhất liên tục nên $f'g'$ là ánh xạ thuần nhất liên tục. Ta sẽ chứng minh, $f'g'$ là ánh xạ thuần nhất liên tục tương ứng với $gf: X \rightarrow Z$, hay $(gf)(f'g')(gf) = gf$. Thật vậy, xét biểu đồ:



Với mọi $x \in X$, đặt $f(x) = y, g(y) = z$ và $g'(z) = y'$. Do $gg'g(y) = g(y)$ nên $g(y') = z$. Mặt khác, $g(y) = z$ và g tuyến tính nên $g(y' - y) = 0$. Do đó, $y' - y \in \text{Kerg} \subset \text{Im}f$. Từ đó, tồn tại $x' \in X$ sao cho $f(x') = y' - y$. Suy ra

$$y' = y + f(x') = f(x) + f(x') = f(x + x') = ff'f(x + x') = ff'(y')$$

Suy ra, ta có

$$(gf)(f'g')(gf)(x) = g(ff')(g'(z)) = g(ff')(y') = g(y') = z = gf(x)$$

Vậy $(gf)(f'g')(gf) = gf$. ■

Mệnh đề 2.1.10 Cho X là không gian vectơ tôpô và A là không gian con của X . Khi đó ánh xạ nhúng liên tục $i: A \rightarrow X$ là ánh xạ chính quy.

Chứng minh. Ta xây dựng ánh xạ $i': X \rightarrow A$ như sau: Với mỗi $x \in X$, nếu $x \in A$ ta đặt $i'(x) = x$, nếu $x \notin A$ ta đặt $i'(x) = 0$. Dễ thấy i' là ánh xạ thuần nhất (không phải là ánh xạ tuyến tính) và $ii'i = i$. Do đó để chứng minh i' là ánh xạ chính quy ta chỉ cần chứng minh i' là ánh xạ thuần nhất liên tục.

Thật vậy, với mọi $V \in \mathcal{U}_A$. Do tôpô trên A là cảm sinh từ X nên tồn tại lân cận U trên X sao cho $V = U \cap A$. Ta có với mọi $x \in U \setminus A$ ta có $i'(x) = 0 \in V$, suy ra $i'(U) \subset V$. Mặt khác, tồn tại U' thuộc cơ sở lân cận $\mathcal{U}_X$ của X sao cho $U' \subset U$. Do đó $i'(U') \subset i'(U) \subset V$. Từ đó suy ra i' là ánh xạ thuần nhất liên tục. ■

Mệnh đề 2.1.11 Nếu $f: A \rightarrow B$ là ánh xạ chính quy và có dạng phân tích qua ảnh là:

$$f: A \xrightarrow{\bar{f}} f(A) \xrightarrow{i} B$$

thì $\bar{f}$ và i là các ánh xạ chính quy, hơn nữa $\bar{f}$ là toàn ánh và i là đơn ánh.

Chứng minh. Ta xây dựng $\bar{f}: A \rightarrow f(A)$ như sau: với mọi $x \in A$ đặt $\bar{f}(x) = f(x)$ và $i: f(A) \rightarrow B$ là ánh xạ nhúng. Dễ thấy, $\bar{f}$ là toàn ánh tuyến tính liên tục và i là đơn ánh chính quy, ta chỉ còn phải chứng minh $\bar{f}$ là ánh xạ chính quy. Thật vậy, do $f: A \rightarrow B$ là ánh xạ chính quy nên tồn tại ánh xạ thuần nhất liên tục $f': B \rightarrow A$ sao cho $ff'f = f$, đặt $\bar{f}' = f'i: f(A) \rightarrow A$ thì $\bar{f}'$ là ánh xạ thuần nhất liên tục. Ngoài ra, với mọi $a \in A$, ta có:

$$(\bar{f}\bar{f}'\bar{f})(a) = (\bar{f}f'i\bar{f})(a) = (\bar{f}f'f)(a) = \bar{f}(f'f(a)) = ff'f(a) = f(a) = \bar{f}(a).$$

Vậy $\bar{f}$ là ánh xạ chính quy. ■

2.1.3. Vật xạ ảnh tương đối và vật tự do tương đối

Định nghĩa 2.1.7 Trong phạm trù $\mathcal{TVS}$, không gian vectơ tôpô P được gọi là *vật xạ ảnh* nếu với mọi toàn xạ $\sigma: X \rightarrow Y$, mỗi cấu xạ $f: P \rightarrow Y$ thì tồn tại một cấu xạ $\varphi: P \rightarrow X$ sao cho $f = \sigma\varphi$. Nghĩa là tồn tại cấu xạ φ để biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \varphi \swarrow & \downarrow f & \\ X & \xrightarrow{\sigma} & Y \end{array}$$

Người ta đã chứng minh được rằng, phạm trù các không gian vectơ tôpô "không đủ nhiều" các vật xạ ảnh. Vì thế, ta đưa ra khái niệm vật xạ ảnh tương đối và sẽ chứng minh các vật xạ ảnh tương đối "đủ nhiều" trong phạm trù các không gian vectơ tôpô.

Định nghĩa 2.1.8 Trong phạm trù $\mathcal{TVS}$, Không gian vectơ tôpô P được gọi là *vật xạ ảnh tương đối* nếu với mọi toàn xạ chính quy $\sigma : X \rightarrow Y$, mỗi cầu xạ $f : P \rightarrow Y$ thì tồn tại một cầu xạ $\varphi : P \rightarrow X$ sao cho $f = \sigma\varphi$. Nghĩa là tồn tại cầu xạ φ để biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \varphi \swarrow & \downarrow f & \\ X & \xrightarrow{\sigma} & Y \end{array}$$

Định nghĩa 2.1.9 Cho X là một không gian tôpô thuần nhất. Một không gian vectơ tôpô được gọi là *vật tự do tương đối sinh bởi X* , kí hiệu là $L(X)$, nếu có ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục $j_X : X \rightarrow L(X)$ có tính phổ dụng đối với mọi ánh xạ thuần nhất liên tục $f : X \rightarrow Y$, trong đó Y là không gian vectơ tôpô. Nghĩa là, mọi ánh xạ thuần nhất liên tục $f : X \rightarrow Y$ đều có thể mở rộng tới duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : L(X) \rightarrow Y$ sao cho $f = \varphi j_X$. Đẳng thức cuối tương đương với điều kiện biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ f \downarrow & \swarrow \varphi & \\ Y & & \end{array}$$

Mệnh đề 2.1.12 Mọi không gian tôpô thuần nhất X đều có duy nhất vật tự do tương đối sinh bởi nó.

Chứng minh. Cho X là một không gian tôpô thuần nhất với $\mathcal{U}_X$ là cơ sở lân cận của điểm gốc. Gọi $e = \{e_i\}_{i \in I}$ là một cơ sở thuần nhất của X thì $X = \bigcup_{i \in I} Re_i$.

Đặt $L(X) = \bigoplus_{i \in I} Re_i$ có các phần tử là các bộ $(r_i e_i)_{i \in I}$ trong đó có hữu hạn các $r_i \neq 0$ còn lại hầu hết là bằng 0. Trên $L(X)$ ta xây dựng hai phép toán là phép cộng và phép nhân ngoài như sau:

- Phép cộng $\oplus : L(X) \times L(X) \rightarrow L(X)$ được xác định: với $(r_i e_i)_{i \in I}$ và $(s_i e_i)_{i \in I}$ thuộc $L(X)$ thì

$$(r_i e_i)_{i \in I} \oplus (s_i e_i)_{i \in I} = ((r_i + s_i) e_i)_{i \in I}$$

- Phép nhân ngoài $\cdot : \mathbb{R} \times L(X) \rightarrow L(X)$ được xác định: với $(r_i e_i)_{i \in I}$ thuộc $L(X)$ và $s \in \mathbb{R}$ thì

$$s \cdot (r_i e_i)_{i \in I} = ((s \cdot r_i) e_i)_{i \in I}$$

Ta xây dựng ánh xạ nhúng thuần nhất:

$$j_X : X \rightarrow L(X)$$

được xác định qua ảnh của hệ cơ sở thuần nhất như sau: với mỗi $e_i \in e$, ta đặt: $j_X(e_i) = (x_j)_{j \in I}$, trong đó

$$x_j = \begin{cases} e_i & \text{nếu } j = i \\ 0 & \text{nếu } j \neq i \end{cases}$$

Khi đó $L(X)$ cùng với 2 phép toán trên là một không gian vectơ có cơ sở tuyến tính là $j_X(e) = \{j_X(e_i)\}_{i \in I}$.

Bây giờ, ta sẽ xây dựng trên không gian vectơ $L(X)$ một tôpô tương thích với cấu trúc đại số để $L(X)$ trở thành một không gian vectơ tôpô. Ta cần xây dựng trên $L(X)$ một họ gồm các tập con của $L(X)$, kí hiệu là $\mathcal{U}_L$ thỏa mãn các điều kiện C1, C2, C3, C4. Họ $\mathcal{U}_L$ gồm các phần tử là các tập hợp được xác định như sau:

$$\begin{aligned} U &= j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3)) \cdots \\ &\quad \cdots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3) \oplus \cdots \oplus j_X(U_n)) \cup \cdots \end{aligned}$$

Với các dãy $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ nào đó các phần tử của cơ sở lân cận trong không gian tôpô thuần nhất X .

Ta cần chứng minh các điều sau:

1) Tập $\mathcal{U}_L$ thỏa mãn điều kiện C2) của định lý 1.1.8, nghĩa là với U, V là hai tập thuộc $\mathcal{U}_L$ tồn tại $W \in \mathcal{U}_L$ sao cho $W \subset U \cap V$. Thật vậy, nếu:

$$\begin{aligned} U &= j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3)) \cdots \\ &\quad \cdots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3) \oplus \cdots \oplus j_X(U_n)) \cup \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & j_X(V_1) \cup (j_X(V_1) \oplus j_X(V_2)) \cup (j_X(V_1) \oplus j_X(V_2) \oplus j_X(V_3)) \cdots \\ & \cdots \cup (j_X(V_1) \oplus j_X(V_2) \oplus j_X(V_3) \oplus \cdots \oplus j_X(V_n)) \cup \cdots \end{aligned}$$

là hai tập hợp thuộc $\mathcal{U}_L$. Trong đó U_i và V_i là các tập thuộc $\mathcal{U}_X$. Với mỗi i , tồn tại $W_i \in \mathcal{U}_X$ sao cho $W_i \subset U_i \cap V_i$. Đặt:

$$\begin{aligned} W = & j_X(W_1) \cup (j_X(W_1) \oplus j_X(W_2)) \cup (j_X(W_1) \oplus j_X(W_2) \oplus j_X(W_3)) \cdots \\ & \cdots \cup (j_X(W_1) \oplus j_X(W_2) \oplus j_X(W_3) \oplus \cdots \oplus j_X(W_n)) \cup \cdots \end{aligned}$$

Dễ thấy, $W \in \mathcal{U}_L$ và $W \subset V \cap V$.

2) Tập $\mathcal{U}_L$ thỏa mãn điều kiện C1) của định lý 1.1.8, nghĩa là với tập U bất kì thuộc $\mathcal{U}_L$ tồn tại $W \in \mathcal{U}_L$ sao cho $W \oplus W \subset U$. Thật vậy:

Với bất kì $U = j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup \cdots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus \cdots \oplus j_X(U_n)) \cup \cdots$ thuộc $\mathcal{U}_L$. Ta xây dựng hai tập W^1, W^2 thuộc $\mathcal{U}_L$ như sau:

$$\begin{aligned} W^1 = & j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_3)) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_3) \oplus j_X(U_5)) \cdots \\ & \cdots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_3) \oplus j_X(U_5) \oplus \cdots \oplus j_X(U_{2n+1})) \cup \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^2 = & j_X(U_2) \cup (j_X(U_2) \oplus j_X(U_4)) \cup (j_X(U_2) \oplus j_X(U_4) \oplus j_X(U_6)) \cdots \\ & \cdots \cup (j_X(U_2) \oplus j_X(U_4) \oplus j_X(U_6) \oplus \cdots \oplus j_X(U_{2n})) \cup \cdots \end{aligned}$$

Ta thấy W^1 và W^2 là hai tập thuộc $\mathcal{U}_L$ và hơn nữa $W^1 \oplus W^2 \subset U$. Mặt khác, theo chứng minh trên tồn tại $W \subset W^1 \cap W^2$. Do đó, tồn tại $W \in \mathcal{U}_L$ thỏa mãn $W \oplus W \subset W^1 \oplus W^2 \subset U$.

3) Tập $\mathcal{U}_L$ thỏa mãn điều kiện C3) của định lý 1.1.8, nghĩa là mọi tập thuộc $\mathcal{U}_L$ là cân và hút.

Với bất kì $U = j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup \cdots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus \cdots \oplus U_n) \cup \cdots$ thuộc $\mathcal{U}_L$, ta chứng minh U là cân và hút.

- Với mọi $x \in U$ thì $x = j_X(x_1) \oplus j_X(x_2) \oplus \cdots \oplus j_X(x_n)$, trong đó $x_i \in U_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Do U_i cân trong X nên $\alpha x_i \in U_i$ với mọi $|\alpha| \leq 1$, suy ra $\alpha x \in U$ với mọi $|\alpha| \leq 1$. Do đó U là cân.
- Với mọi $x \in L(X)$ thì $x = (r_1 e_1, r_2 e_2, \cdots, r_n e_n, 0, 0, \cdots)$, trong đó $r_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Do U_i hút trong X và $r_i e_i \in X$ với mọi $i = \overline{1, n}$ nên tồn

tại α_i sao cho $r_i e_i \in \alpha_i U_i$. Chọn $\alpha = \text{Max}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ thì $r_i e_i \in \alpha U_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$, suy ra $x = (r_1 e_1, r_2 e_2, \dots, r_n e_n, 0, 0, \dots) \in \alpha j_X(U_1) \oplus \alpha j_X(U_2) \oplus \dots \oplus \alpha j_X(U_n)$ hay $x \in \alpha U$. Vậy U là hút.

4) Tập $\mathcal{U}_L$ thỏa mãn điều kiện C4) của định lý 1.1.8. Thật vậy với mọi tập

$U = j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup \dots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus \dots \oplus U_n) \cup \dots$ thuộc $\mathcal{U}_L$ thì

$\alpha U = \alpha j_X(U_1) \cup (\alpha j_X(U_1) \oplus \alpha j_X(U_2)) \cup \dots \cup (\alpha j_X(U_1) \oplus \alpha j_X(U_2) \oplus \dots \oplus \alpha U_n) \cup \dots$ cũng thuộc $\mathcal{U}_L$ với mọi $\alpha \neq 0$.

Từ 1, 2, 3, 4 ta có $L(X)$ là không gian vectơ tôpô có một cơ sở lân cận là $\mathcal{U}_L$.

5) j_X là ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục có tính chất phổ dụng đối với mọi ánh xạ thuần nhất liên tục $f : X \rightarrow Y$, trong đó Y là không gian vectơ tôpô.

Theo cách xây dựng j_X và họ cơ sở lân cận trong $L(X)$ dễ thấy j_X là ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục.

Bây giờ ta cần chứng minh $L(X)$ được xây dựng như trên có tính chất phổ dụng đối với mọi ánh xạ thuần nhất liên tục $f : X \rightarrow Y$, nghĩa là cần chứng minh với bất kì Y là một không gian vectơ tôpô và với bất kì ánh xạ thuần nhất liên tục $f : X \rightarrow Y$ thì tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục φ làm cho biểu đồ dưới đây là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ \downarrow f & \swarrow \exists! \varphi & \\ Y & & \end{array}$$

Vì không gian vectơ tôpô $L(X)$ có một cơ sở là $\{j_X(e_i)\}_{i \in I}$ nên với mỗi $i \in I$ đặt:

$$\varphi(j_X(e_i)) = f(e_i)$$

Do biết được ảnh của cơ sở nên ta xác định được duy nhất ánh xạ tuyến tính $\varphi : L(X) \rightarrow Y$, dễ thấy $\varphi j_X = f$. Cuối cùng ta chứng minh φ liên tục, thật vậy:

Với mọi $V \in \mathcal{U}_Y$, với $\mathcal{U}_Y$ là cơ sở lân cận của Y thì theo C1 tồn tại $V_1 \in \mathcal{U}_Y$ sao cho $V_1 + V_1 \subset V$. Vì $V_1 \in \mathcal{U}_Y$ nên tồn tại $V_2 \in \mathcal{U}_Y$ sao cho $V_2 + V_2 \subset V_1$. Cứ tiếp tục quá trình như trên ta có dãy $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ các tập thuộc cơ sở lân cận của Y

thỏa mãn

$$V_i + V_i \subset V_{i+1} \forall i$$

Ta có: $V_1 + V_2 + V_3 \subset V_1 + V_2 + V_2 \subset V_1 + V_1 \subset V$. Từ đó bằng quy nạp với mọi số tự nhiên n , ta có $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \subset V$. Do đó:

$$V_1 \cup (V_1 + V_2) \cup (V_1 + V_2 + V_3) \cup \dots \cup (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n) \cup \dots \subset V$$

Mặt khác, do f là ánh xạ thuần nhất liên tục nên với mỗi i tồn tại $U_i \in \mathcal{U}_X$ sao cho $f(U_i) \subset V_i$, đặt

$$U = j_X(U_1) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2)) \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3)) \cup \dots \cup (j_X(U_1) \oplus j_X(U_2) \oplus j_X(U_3) \oplus \dots \oplus j_X(U_n)) \cup \dots$$

thì U là một tập thuộc cơ sở lân cận của $L(X)$. Do φ là tuyến tính nên ta có:

$$\varphi(U) \subset V_1 \cup (V_1 + V_2) \cup \dots \cup (V_1 + V_2 + \dots + V_n) \cup \dots \subset V$$

Do đó φ là ánh xạ tuyến tính liên tục.

Hơn nữa, vật tự do tương đối sinh bởi không gian tôpô thuần nhất X là duy nhất theo nghĩa nếu F cũng là vật tự do tương đối sinh bởi X thì F và $L(X)$ là đẳng xạ với nhau. Thật vậy, F là vật tự do tương đối sinh bởi X thì tồn tại ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục có tính phổ dụng với ánh xạ thuần nhất liên tục $j_X : X \rightarrow L(X)$; nghĩa là tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : F \rightarrow L(X)$ sao cho $\varphi j = j_X$. Ngược lại cũng tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\psi : L(X) \rightarrow F$ sao cho $\psi j_X = j$. Tức là biểu đồ dưới đây giao hoán

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ j \downarrow & \nearrow \varphi & \\ F & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \psi \\ \end{array}$$

Suy ra $\psi \varphi j = j$ với $\psi \varphi : F \rightarrow F$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Mặt khác ta cũng có $1_F j = j$. Hơn nữa theo tính phổ dụng của ánh xạ $j : X \rightarrow F$ đối với ánh xạ thuần nhất liên tục $j : X \rightarrow F$ thì tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\alpha : F \rightarrow F$ sao cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & F \\ j \downarrow & \nearrow \exists! \alpha & \\ F & & \end{array}$$

Do tính duy nhất của ánh xạ tuyến tính liên tục α nên ta có

$$\psi\varphi = 1_F = \alpha$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\varphi\psi = 1_{L(X)}$$

Vậy F và $L(X)$ đẳng xạ với nhau. ■

Nội dung định lý dưới đây khẳng định "*tính đủ nhiều của các vật tự do tương đối sinh bởi các không gian vectơ tôpô*".

Định lý 2.1.13 *Mỗi không gian vectơ tôpô X đẳng xạ với không gian thương của một vật tự do tương đối nào đó.*

Chứng minh.

Gọi $L(X)$ là vật tự do tương đối của không gian vectơ tôpô X với ánh xạ nhúng thuần nhất là $j_X : X \rightarrow L(X)$. Do j_X có tính phổ dụng đối với $1_X : X \rightarrow X$ nên tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : L(X) \rightarrow X$ sao cho $\varphi j_X = 1_X$, hay biểu đồ sau là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ 1_X \downarrow & \swarrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh X đẳng xạ với $L(X)/\text{Ker}\varphi$ bằng cách xây dựng cấu xạ $h : X \rightarrow L(X)/\text{Ker}\varphi$ và cấu xạ $g : L(X)/\text{Ker}\varphi \rightarrow X$ thỏa mãn $hg = 1_{L(X)/\text{Ker}\varphi}$ và $gh = 1_X$.

- Ta xây dựng $g : L(X)/\text{Ker}\varphi \rightarrow X$ như sau: với mọi $\bar{x} \in L(X)/\text{Ker}\varphi$, đặt

$$g(\bar{x}) = \varphi(x).$$

Trước hết ta chứng minh g được định nghĩa như trên là một ánh xạ. Thật vậy: nếu $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ thì $x_1 - x_2 \in \text{Ker}\varphi$, do đó

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \text{ hay } g(\bar{x}_1) = g(\bar{x}_2).$$

Hơn nữa, do φ là ánh xạ tuyến tính nên g cũng là ánh xạ tuyến tính.

Cuối cùng, ta sẽ chỉ ra g được xây dựng như trên cũng là liên tục. Thật vậy: với V là một lân cận bất kì trong X , do φ tuyến tính liên tục nên tồn tại lân cận U trong $L(X)$ sao cho $\varphi(U) \subset V$, do đó $g(\overline{U}) = \varphi(U) \subset V$. Như vậy, ta đã xây dựng được ánh xạ g .

- Ta xây dựng $h : X \rightarrow L(X)/Ker\varphi$ như sau: với mọi $x \in X$, đặt $h(x) = \overline{j(x)}$.

Trước hết, ta sẽ chứng minh h là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, với mọi $x, y \in X$ và với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có : $\varphi j_X(ax + by) = 1_X(ax + by) = ax + by = 1_X(ax) + 1_X(by) = \varphi j_X(ax) + \varphi j_X(by)$. Từ đó ta có

$$j_X(ax + by) - [j_X(ax) + j_X(by)] \in Ker\varphi$$

Suy ra $h(ax + by) = \overline{j_X(ax + by)} = \overline{j_X(ax) + j_X(by)} = \overline{j_X(ax)} + \overline{j_X(by)} = ah(x) + bh(y)$. Do đó h tuyến tính. Hơn nữa, do j_X là thuần nhất liên tục nên dễ thấy h cũng là thuần nhất liên tục. Vậy h là ánh xạ tuyến tính liên tục.

- Bây giờ, với mọi $x \in X$, $gh(x) = g(h(x)) = g(\overline{j_X(x)}) = \varphi j_X(x) = 1_X(x) = x$.

Do đó $gh = 1_X$.

- Cuối cùng, với mọi $\bar{x} \in L(X)/Ker\varphi$, $hg(\bar{x}) = h(\varphi(x)) = \overline{j_X(\varphi(x))}$.

Mặt khác, ta có $\varphi(j_X(\varphi(x))) = \varphi j_X(\varphi(x)) = 1_X(\varphi(x)) = \varphi(x)$ nên $j_X(\varphi(x)) - x \in Ker\varphi$. Do đó $\overline{j_X(\varphi(x))} = \bar{x}$. Vậy $hg = 1_{L(X)/Ker\varphi}$. ■

Mệnh đề 2.1.14 *Vật tự do tương đối của một không gian tôpô thuần nhất là vật xạ ảnh tương đối.*

Chứng minh. Gọi $L(X)$ là vật tự do tương đối của không gian tôpô thuần nhất X với $j : X \rightarrow L(X)$ là ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục. Với mọi toàn ánh chính quy $\sigma : Y \rightarrow Z$ và mọi ánh xạ tuyến tính $f : L(X) \rightarrow Z$, trong đó Y và Z là các không gian vectơ tôpô, ta cần chứng minh tồn tại ánh xạ tuyến tính $\varphi : L(X) \rightarrow Y$ sao cho $\sigma\varphi = f$, đẳng thức cuối tương đương với điều kiện để biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & L(X) & \\ \exists \varphi \swarrow & \downarrow f & \\ Y & \xrightarrow{\sigma} & Z \end{array}$$

Do $\sigma : Y \rightarrow Z$ là toàn ánh chính quy nên tồn tại ánh xạ thuần nhất liên tục $\sigma' : Z \rightarrow Y$ sao cho $\sigma'\sigma = 1_Y$. Do đó ta có ánh xạ thuần nhất liên tục $g = \sigma'fj_X : X \rightarrow Y$. Do tính phổ dụng của ánh xạ nhúng thuần nhất $j_X : X \rightarrow L(X)$ nên tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : L(X) \rightarrow Y$ sao cho $\varphi j_X = g$. Thế nên trong biểu đồ dưới đây ta có tam giác lớn và tam giác nhỏ ở trên, bên phải là giao hoán ta cần chứng minh tam giác nhỏ ở dưới, bên trái cũng giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & & \downarrow j_X & \searrow g = \sigma'fj_X & \\
 & & L(X) & & \\
 \swarrow \varphi & & \downarrow f & \searrow \exists \varphi & \\
 Y & \xrightarrow{\sigma} & Z & \xrightarrow{\sigma'} & Y
 \end{array}$$

Thật vậy, do $\varphi j_X = g = \sigma'fj_X$ suy ra $\sigma\varphi j_X = \sigma\sigma'fj_X = fj_X$. Khi đó với mọi e_i thuộc cơ sở thuần nhất của X ta có

$$\sigma\varphi j_X(e_i) = fj_X(e_i)$$

Từ đó suy ra

$$\sigma\varphi(j_X(e_i)) = f(j_X(e_i))$$

Như vậy $\sigma\varphi$ và f là hai ánh xạ tuyến tính từ $L(X)$ vào Y và có ảnh bằng nhau trên cơ sở nên bằng nhau. Vậy $\sigma\varphi = f$. ■

Mệnh đề 2.1.15 *Mỗi không gian vectơ tôpô X cảm sinh một dãy khớp ngắn:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} L(X) \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

trong đó i và π còn là các ánh xạ chính quy

Chứng minh. Gọi $L(X)$ là vật tự do tương đối sinh bởi X và $j_X : X \rightarrow L(X)$ là ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục. Do tính phổ dụng của ánh xạ nhúng thuần nhất liên tục $j_X : X \rightarrow L(X)$ đối với ánh xạ $1_X : X \rightarrow X$ nên tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $\pi : L(X) \rightarrow X$ sao cho $\pi j_X = 1_X$, đẳng thức cuối tương đương với điều kiện biểu đồ dưới đây là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\
 1_X \downarrow & \swarrow \pi & \\
 X & &
 \end{array}$$

Đặt $Y = \text{Ker}\pi$ thì Y là không gian vectơ tôpô con của $L(X)$, gọi $i: \text{Ker}\pi \rightarrow L(X)$ là ánh xạ nhúng.

Dễ thấy π là toàn ánh chính quy, i là ánh xạ nhúng nên cũng là đơn ánh chính quy và $\text{Im}i = \text{Ker}\pi$ nên ta có dãy khớp ngắn:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} L(X) \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

Trong đó, i là đơn ánh chính quy và π là toàn ánh chính quy. ■

Mệnh đề 2.1.16 Trong phạm trù các không gian vectơ tôpô, cho biểu đồ:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & & \downarrow f & & \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Trong đó dòng dưới là khớp; α là ánh xạ chính quy và A là vật xạ ảnh tương đối. Hơn nữa $\beta f = 0$. Khi đó tồn tại cầu xạ $g: A \rightarrow X$ sao cho biểu đồ giao hoán, nghĩa là $\alpha g = f$.

Chứng minh. Do $\alpha: X \rightarrow Y$ là ánh xạ chính quy nên α có sự phân tích qua ảnh là:

$$\alpha: X \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(X) \xrightarrow{i} Y$$

Trong đó $\bar{\alpha}$ là toàn ánh chính quy. Mặt khác, do $\beta f = 0$ và do $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ khớp nên $f(A) \subset \text{Ker}\beta = \alpha(X)$. Do đó tồn tại ánh xạ tuyến tính

$$f': A \rightarrow \alpha(X)$$

được xác định như sau: với mọi $a \in A$ thì $f'(a) = f(a)$.

Ta thấy f' cũng là liên tục, thật vậy với U là lân cận bất kì trong $\alpha(X)$ thì tồn tại lân cận V trong Y sao cho $U = \alpha(X) \cap V$, lại do f liên tục nên tồn tại lân cận W trong A sao cho $f(W) \subset V$. Hiển nhiên $f(W) \subset f(A) \subset \alpha(X)$. Khi đó ta có $f'(W) = f(W) \subset \alpha(X) \cap V = U$. Do đó f' cũng liên tục.

Như vậy, ta có biểu đồ:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \exists g \swarrow & \downarrow f' & \\ X & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \alpha(X) \end{array}$$

Trong đó $\bar{\alpha}$ là toàn ánh chính quy; f' là ánh xạ tuyến tính liên tục và A là vật xạ ảnh tương đối. Do đó tồn tại cầu xạ $g: A \rightarrow X$ thỏa mãn $\bar{\alpha}g = f'$. Hơn nữa, với mọi $a \in A$:

$$\alpha g(a) = \alpha(g(a)) = \bar{\alpha}(g(a)) = \bar{\alpha}g(a) = f'(a) = f(a)$$

Vậy $\alpha g = f$. ■

Mệnh đề 2.1.17 Trong phạm trù các không gian vector tôpô, cho biểu đồ có hình vuông giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array}$$

Trong đó dòng trên khớp, dòng dưới khớp với α_2 là ánh xạ chính quy. X_1 là vật xạ ảnh tương đối. Khi đó tồn tại cầu xạ $h: X_1 \rightarrow X_2$ làm cho biểu đồ trên giao hoán, nghĩa là $\alpha_2 h = f \alpha_1$.

Chứng minh.

Do dòng trên khớp nên ta có $\beta_1 \alpha_1 = 0$, tác động g vào thì $g \beta_1 \alpha_1 = 0$. Mặt khác, do biểu đồ giao hoán nên $g \beta_1 = \beta_2 f$. Do đó $\beta_2 f \alpha_1 = 0$, vậy ta có biểu đồ

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & & & & \\ & \downarrow \alpha_1 & & & \\ Y_1 & & & & \\ & \downarrow f & & & \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array}$$

Trong đó: dòng dưới khớp; α_2 là ánh xạ chính quy; X_1 là vật xạ ảnh tương đối và $\beta_2 f \alpha_1 = 0$. Do đó theo mệnh đề 1.1.12 tồn tại cầu xạ $h: X_1 \rightarrow X_2$ sao cho $\alpha_2 h = f \alpha_1$. Vậy ta có biểu đồ dưới đây là giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 \\ h \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array}$$

■

2.2. Hàm tử Ext trong phạm trù các không gian vectơ tôpô

2.2.1. Phép giải xạ ảnh tương đối

Định nghĩa 2.2.1 Cho A là một không gian vectơ tôpô tùy ý, ta gọi *phép giải xạ ảnh tương đối* (phép giải tự do tương đối) của A là một dãy khớp các vật xạ ảnh tương đối (vật tự do tương đối) và các ánh xạ chính quy:

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

Định lý dưới đây khẳng định sự tồn tại của phép giải xạ ảnh tương đối.

Định lý 2.2.1 Mọi không gian vectơ tôpô A đều có một phép giải tự do tương đối.

Chứng minh. Ta đã biết với mỗi không gian vectơ tôpô đều cảm sinh một dãy khớp ngắn:

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\alpha_0} L_0 \xrightarrow{\beta_0} A \longrightarrow 0$$

trong đó L_0 là vật tự do tương đối sinh bởi A và α_0, β_0 là các ánh xạ chính quy. Lại vì X_0 cũng là không gian vectơ tôpô nên cảm sinh dãy khớp ngắn:

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\alpha_1} L_1 \xrightarrow{\beta_1} X_0 \longrightarrow 0$$

trong đó L_1 là vật tự do tương đối sinh bởi X_0 và α_1, β_1 là các ánh xạ chính quy. Bằng quy nạp toán học ta có dãy khớp ngắn:

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{\alpha_n} L_n \xrightarrow{\beta_n} X_{n-1} \longrightarrow 0$$

với mọi số nguyên $n > 0$, trong đó L_n là vật tự do tương đối và α_n, β_n là các ánh xạ chính quy.

Bây giờ ta lập dãy

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0 \quad (1)$$

Trong đó L_n là các vật tự do tương đối được xây dựng như trên, còn

$$\partial_n = \begin{cases} \beta_0 & \text{nếu } n = 0 \\ \alpha_{n-1}\beta_n & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$$

Để chứng minh dãy (1) là phép giải tự do tương đối của A ta cần chứng minh các điều sau:

1. Chứng minh (1) là dãy khớp. Thật vậy do tính khớp của dãy khớp ngắn ta có α_n là các đơn ánh chính quy và β_n là các toàn ánh chính quy với mọi $n \geq 0$ nên ta có:

$$\text{Im} \partial_{n+1} = \text{Im}(\alpha_n \beta_{n+1}) = \text{Im} \alpha_n = \text{Ker} \beta_n = \text{Ker} \alpha_{n-1} \beta_n = \text{Ker} \partial_n$$

Nghĩa là $\text{Im} \partial_{n+1} = \text{Ker} \partial_n$ với mọi $n \geq 0$. Do đó dãy (1) là khớp.

2. Chứng minh ∂_n là ánh xạ chính quy với mọi n . Thật vậy, như ta đã biết nếu $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ là các ánh xạ chính quy và g là đơn ánh hoặc f là toàn ánh thì ta có $gf: X \rightarrow Z$ cũng là ánh xạ chính quy. Mặt khác, lại có α_{n-1} là đơn ánh chính quy và β_n là toàn ánh chính quy nên $\alpha_{n-1} \beta_n$ cũng là ánh xạ chính quy với mọi $n > 0$. Hơn nữa, β_0 cũng là ánh xạ chính quy. Vậy nên ∂_n là ánh xạ chính quy với mọi n . ■

Theo định lý trên, chúng ta đã chứng minh được sự tồn tại của phép giải xạ ảnh tương đối. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh tính duy nhất của phép giải xạ ảnh tương đối theo nghĩa hai phép giải xạ ảnh tương đối bất kì của cùng một không gian vectơ tôpô đều tương đương đồng luân. Trước hết, chúng ta thiết lập hai mệnh đề sau

Mệnh đề 2.2.2 Cho $h: A \rightarrow B$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian vectơ tôpô A vào không gian vectơ tôpô B bất kì và

$$X: \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

là một phép giải xạ ảnh tương đối bất kì của A.

$$Y: \cdots \longrightarrow Y_n \xrightarrow{\partial'_n} Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{\partial'_1} Y_0 \xrightarrow{\partial'_0} B \longrightarrow 0$$

là một phép giải xạ ảnh tương đối bất kì của B. Khi đó, tồn tại các ánh xạ tuyến tính liên tục

$$f_n: X_n \rightarrow Y_n, \quad n \geq 0$$

sao cho biểu đồ sau đây là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\partial_1} & X_0 & \xrightarrow{\partial_0} & A & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow h & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y_n & \xrightarrow{\partial'_n} & Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & Y_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Các ánh xạ tuyến tính liên tục $f_n, n \geq 0$ và h lập thành phép biến đổi dây chuyền $X \rightarrow Y$.

Chứng minh. Do X_0 là vật xạ ảnh tương đối và $\partial'_0 : Y_0 \rightarrow B$ là một toàn ánh chính quy nên theo định nghĩa vật xạ ảnh tương đối, tồn tại đồng cấu $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \xrightarrow{\partial_0} & A \longrightarrow 0 \\
\downarrow f_0 & & \downarrow h \\
Y_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & B \longrightarrow 0
\end{array}$$

nghĩa là $\partial'_0 f_0 = h \partial_0$.

Giả sử với mọi $0 \leq m < n$ ta đã xây dựng được các đồng cấu $f_m : X_m \rightarrow Y_m$ sao cho biểu đồ dưới đây giao hoán

$$\begin{array}{ccc}
X_m & \xrightarrow{\partial_m} & X_{m-1} \\
\downarrow f_m & & \downarrow f_{m-1} \\
Y_m & \xrightarrow{\partial'_m} & Y_{m-1}
\end{array}$$

trong đó $f_{-1} = h, X_{-1} = A, Y_{-1} = B$.

Xét biểu đồ

$$\begin{array}{ccccc}
X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & X_{n-2} \\
& & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\
Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-2}
\end{array}$$

Vì X_n là vật xạ ảnh tương đối, các dòng là khớp và ∂' là ánh xạ chính quy nên theo mệnh đề 2.1.17 tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ sao cho biểu đồ trên giao hoán. ■

Như vậy, ta đã xây dựng được biến đổi dây chuyền từ X vào Y . Ngoài ra, chúng ta có

Mệnh đề 2.2.3 Cho X và Y là các phép giải xạ ảnh tương đối của các không gian vector tôpô A, B và $f = \{f_n, h | n \geq 0\}$ là các phép biến đổi dây chuyền từ X vào Y . Khi đó f đồng luân với g .

Chứng minh. Ta phải xây dựng các ánh xạ tuyến tính liên tục

$$k_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$$

sao cho $\partial' k_n + k_{n-1} \partial = f_n - g_n$ với mọi n .

Trước hết ta đặt $k_{-1} = 0 : A \rightarrow Y_0$.

Giả sử với $n \geq 0$ và giả thiết đã xây dựng được các ánh xạ tuyến tính liên tục

$$k_m : X_m \rightarrow Y_{m+1}, \quad 0 \leq m < n$$

sao cho

$$\partial' k_m + k_{m-1} \partial = f_m - g_m.$$

Xét biểu đồ

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n & & \\ & & \downarrow j & & \\ Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial'} & Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} \end{array}$$

trong đó j là ánh xạ tuyến tính liên tục

$$j = f_n - g_n - k_{n-1} \partial_n$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \partial'_n j &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - \partial'_n k_{n-1} \partial_n \\ &= \partial'_n f_n - \partial'_n g_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2} \partial_{n-1}) \partial_n \\ &= (\partial' f_n - f_{n-1} \partial) - (\partial' g_n - g_{n-1} \partial) + k_{n-2} \partial_{n-1} \partial_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Do dòng dưới khớp, ∂'_{n+1} là ánh xạ chính quy, $\partial'_n j = 0$ và X_n là vật xạ ảnh tương đối nên theo mệnh đề 2.1.16 tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục

$$k_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$$

sao cho

$$\partial'k_n = j = f_n - g_n - k_{n-1}\partial.$$

Suy ra

$$\partial'k_n + k_{n-1}\partial = f_n - g_n.$$

Vậy f đồng luân với g . ■

Từ hai mệnh đề trên ta có được kết quả sau

Mệnh đề 2.2.4 Hai phép giải xạ ảnh tương đối bất kì của cùng một không gian vectơ tôpô A đều tương đương đồng luân.

Chứng minh. Giả sử

$$X : \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

và

$$X' : \cdots \longrightarrow X'_n \xrightarrow{\partial'_n} X'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_1 \xrightarrow{\partial'_1} X'_0 \xrightarrow{\partial'_0} A \longrightarrow 0$$

là hai phép giải xạ ảnh tương đối của cùng một không gian vectơ tôpô A .

Khi đó, tồn tại các phép biến đổi dây chuyền

$$f = \{f_n : X_n \rightarrow X'_n | n \geq -1\}$$

$$g = \{g_n : X'_n \rightarrow X_n | n \geq -1\}$$

trong đó $X_{-1} = A = X'_{-1}$ và $f_{-1} = g_{-1} = 1_A$.

Khi đó theo mệnh đề 2.2.3 ta có gf đồng luân với 1_X và fg đồng luân với $1_{X'}$.

Vậy X và X' là tương đương đồng luân. ■

2.2.2. Xây dựng hàm tử Ext bằng phép giải xạ ảnh tương đối

Định nghĩa 2.2.2 Cho A và B là các không gian vectơ tôpô và

$$X : \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

là phép giải xạ ảnh tương đối của A . Phức thu gọn tương ứng với X là

$$\bar{X} : \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Xét dãy nửa khớp

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\overline{X}, B) : 0 \longrightarrow \text{Hom}(X_0, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(X_1, B) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \text{Hom}(X_n, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(X_{n+1}, B) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Trong đó, các đồng cấu $\delta = \text{Hom}(\partial, i)$, với i là tự đồng cấu đồng nhất của không gian vectơ tôpô B . Với mỗi số nguyên dương n , nhóm đối đồng điều $H^n(\text{Hom}(\overline{X}, B))$ được gọi là *tích mở rộng n -chiều* của các không gian vectơ tôpô A và B đã cho và được kí hiệu là

$$\text{Ext}^n(A, B).$$

Với $n = 1$, ta kí hiệu là

$$\text{Ext}(A, B)$$

và gọi nó là tích mở rộng của các không gian vectơ tôpô A và B . Ngoài ra ta cũng định nghĩa $\text{Ext}^0(A, B) = \text{Hom}(A, B)$.

Để chứng minh định nghĩa tích mở rộng như trên là hợp lý ta phải chứng minh các nhóm đối đồng điều $H^n(\text{Hom}(\overline{X}, B))$ không phụ thuộc vào cách chọn phép giải xạ ảnh tương đối của không gian vectơ tôpô A , nghĩa là nếu X' cũng là phép giải xạ ảnh tương đối của A thì

$$H^n(\text{Hom}(\overline{X}, B)) \cong H^n(\text{Hom}(\overline{X'}, B)).$$

Thật vậy, vì X và X' là hai phép giải xạ ảnh tương đối của không gian vectơ tôpô A nên theo mệnh đề 2.2.4 thì X và X' là tương đương đồng luân, từ đó suy ra $\overline{X}$ và $\overline{X'}$ là tương đương đồng luân. Từ đó theo định lý 1.2.6 ta có các nhóm đối đồng điều

$$H^n(\text{Hom}(\overline{X}, B)) \cong H^n(\text{Hom}(\overline{X'}, B)).$$

Định nghĩa 2.2.3 Cho A là một không gian vectơ tôpô cố định, hàm tử $\text{Ext}^n(A, -)$ là hàm tử từ phạm trù các không gian vectơ tôpô đến phạm trù các nhóm Aben được xây dựng bằng cách cho tương ứng:

- Mỗi không gian vectơ tôpô B với một nhóm $\text{Ext}^n(A, B)$.

- Mỗi ánh xạ tuyến tính liên tục $\alpha : B \rightarrow B'$ với một đồng cấu

$$\alpha_* : Ext^n(A, B) \rightarrow Ext^n(A, B')$$

mà $\alpha_*(clsc) = cl(\alpha c)$ với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$.

Mệnh đề 2.2.5 Hàm tử $Ext^n(A, -)$ là hàm tử hiệp biến, tức là nó thỏa mãn hai tính chất:

$$1) (1_B)_* = 1_{Ext^n(A, B)}.$$

$$2) (\alpha_2 \alpha_1)_* = (\alpha_2)_* (\alpha_1)_*.$$

Chứng minh. Với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì $(1_B)_*(clsc) = cl(1_B c) = clsc$.

Do đó

$$(1_B)_* = 1_{Ext^n(A, B)}$$

Cho các ánh xạ tuyến tính liên tục

$$B \xrightarrow{\alpha_1} B_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_3$$

Khi đó với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$, ta có:

$$(\alpha_2 \alpha_1)_*(clsc) = cl(\alpha_2 \alpha_1 c) = (\alpha_2)_*(cl(\alpha_1 c)) = (\alpha_2)_*(\alpha_1)_*(clsc).$$

Vậy hàm tử $Ext^n(A, -)$ là hàm tử hiệp biến. ■

Định nghĩa 2.2.4 Cho A là một không gian vectơ tôpô cố định, hàm tử $Ext^n(-, B)$ là hàm tử từ phạm trù không gian vectơ tôpô đến phạm trù các nhóm Aben được xây dựng bằng cách cho tương ứng:

- Mỗi không gian vectơ tôpô A với một nhóm $Ext^n(A, B)$.
- Mỗi ánh xạ tuyến tính liên tục $\gamma : A' \rightarrow A$ với một đồng cấu

$$\gamma^* : Ext^n(A, B) \rightarrow Ext^n(A', B)$$

mà $\gamma^*(clsc) = cl(c\gamma)$ với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$.

Mệnh đề 2.2.6 Hàm tử $Ext^n(-, B)$ là hàm tử phản biến, tức là nó thỏa mãn hai tính chất:

$$1) (1_A)^* = 1_{Ext^n(A, B)}.$$

$$2) (\gamma_2 \gamma_1)^* = (\gamma_1)^* (\gamma_2)^*.$$

Chứng minh. Với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$ thì $(1_A)^*(clsc) = cls(c1_A) = clsc$.

Do đó

$$(1_A)^* = 1_{Ext^n(A, B)}$$

Cho các ánh xạ tuyến tính liên tục

$$A_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_2 \xrightarrow{\gamma_2} A$$

Khi đó với mỗi $clsc \in Ext^n(A, B)$, ta có:

$$(\gamma_2 \gamma_1)^*(clsc) = cls(c\gamma_2 \gamma_1) = (\gamma_1)^*(cls(c\gamma_2)) = (\gamma_1)^* (\gamma_2)^*(clsc).$$

Vậy hàm tử $Ext^n(-, B)$ là hàm tử phản biến. ■

KẾT LUẬN

Sau khi nghiên cứu phạm trù các không gian vectơ tôpô cho việc xây dựng hàm tử Ext, chúng tôi đã thu được một số kết quả sau:

1. Phạm trù các không gian vectơ tôpô là phạm trù tiền Aben và chỉ ra được ví dụ chứng tỏ phạm trù các không gian vectơ tôpô không có tính Aben.
2. Xây dựng được khái niệm đồng điều, đối đồng điều và chứng minh được một số tính chất của chúng trong phạm trù các không gian vectơ tôpô.
3. Tập $\text{Hom}(X, Y)$ các ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian vectơ tôpô X vào không gian vectơ tôpô Y là một nhóm Aben. Từ đó, chỉ ra được $\text{Hom}(X, -)$ là hàm tử hiệp biến và $\text{Hom}(-, Y)$ là hàm tử phản biến.
4. Đưa ra các khái niệm không gian thuần nhất, ánh xạ thuần nhất, không gian tôpô thuần nhất, toán tử chính quy và xây dựng một số ví dụ minh họa cũng như nhận xét một số tính chất của chúng.
5. Đưa ra các khái niệm vật xạ ảnh tương đối, vật tự do tương đối. Sau đó chứng minh được "*tính đủ nhiều của các vật tự do tương đối*" từ đó dẫn đến *tính đủ nhiều của vật xạ ảnh tương đối* nhờ mệnh đề 2.1.12, Định lý 2.1.13 và mệnh đề 2.1.14. Trên cơ sở đó, xây dựng được hàm tử Ext.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. A.P.Robertson và W.J.Robertson (1977), *Không gian vector tôpô*, Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp (bản dịch tiếng việt của Phan Đức Chính).
2. Nguyễn Viết Đông, Trần Huyền (2002), *Đại số đồng điều*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

Tiếng Anh

1. Henri Cartan and Samuel Eilenberg (1956), *Homological algebra* - Princeton.
2. Saunder Maclane (1975), *Homology*.