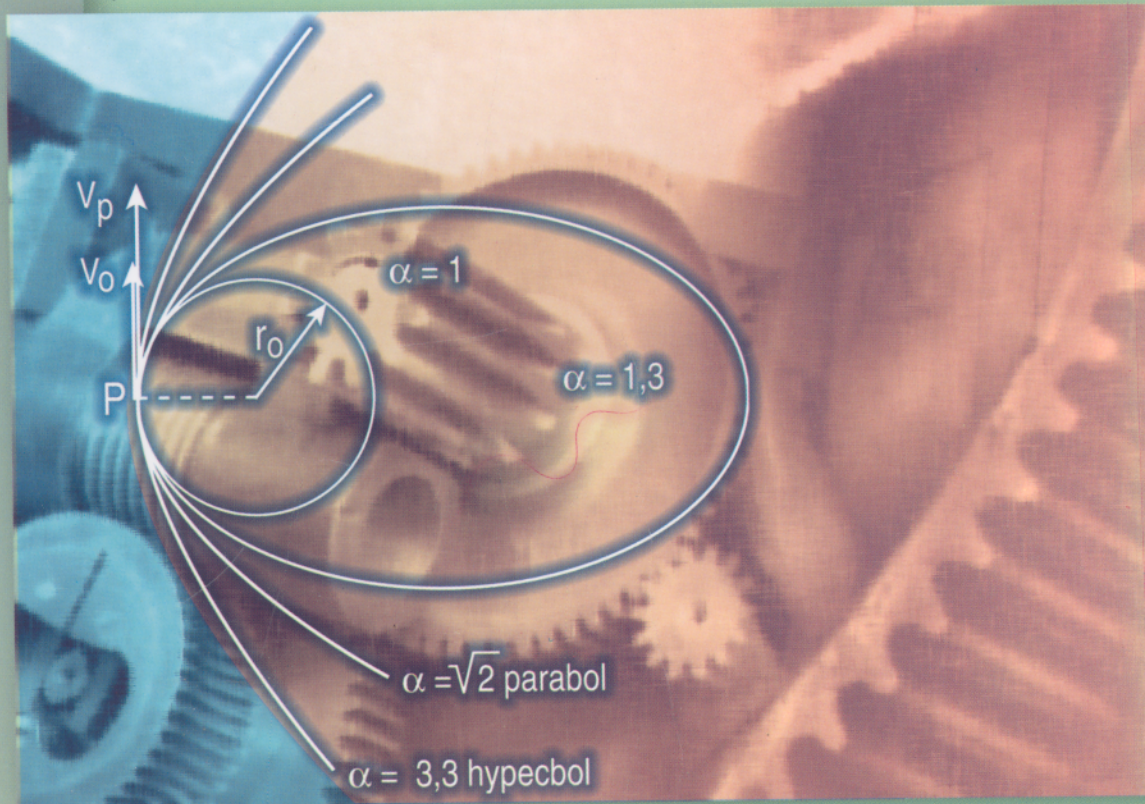


BẠCH THÀNH CÔNG

Giáo trình CƠ HỌC

(DÙNG CHO SINH VIÊN NGÀNH KHOA HỌC TỰ NHIÊN)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BẠCH THÀNH CÔNG

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC

(Dùng cho sinh viên ngành khoa học tự nhiên)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong bộ sách giáo khoa của Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội cũ (nay là trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội) đã có một số sách giáo khoa điển hình về cơ học như *Cơ Vật lý* của Ngô Quốc Quỳnh; *Cơ học* của Nguyễn Hữu Xý, Nguyễn Văn Thoả và Trương Quang Nghĩa. Tuy nhiên theo năm tháng các sách giáo khoa tốt đó đã không được tái bản và rất khó tìm trong các thư viện. Để có tài liệu học tập cho sinh viên hệ cử nhân chất lượng cao ngành Vật lý, tác giả đã biên soạn giáo trình này để giảng dạy với thời lượng là 4 đơn vị học trình lý thuyết.

Mặc dù đã cố gắng nhưng giáo trình biên soạn lần đầu tiên chắc chắn không tránh khỏi một số thiếu sót. Tác giả hy vọng nhận được nhiều ý kiến nhận xét của bạn đọc để giáo trình ngày càng hoàn thiện hơn.

TÁC GIẢ

Chương 1

MỞ ĐẦU

1.1. ĐƠN VỊ, THỨ NGUYÊN

1.1.1. ĐƠN VỊ, HỆ ĐƠN VỊ QUỐC TẾ SI

Học vật lý là nghiên cứu các quy luật của thế giới tự nhiên được thể hiện qua các định luật vật lý. Các định luật vật lý thể hiện mối quan hệ giữa các đại lượng vật lý, đó là các đại lượng đo được, đặc trưng cho hiện tượng hoặc tính chất của sự vật.

1. Đơn vị

Cơ sở của vật lý là các thí nghiệm, trong đó chúng ta đo đạc các đại lượng vật lý. Do một đại lượng vật lý nào đó có nghĩa là so sánh đại lượng đó với đại lượng vật lý cùng loại được chọn làm đơn vị. *Đơn vị là số đo đại lượng được lấy chính xác bằng 1.* Sau đó người ta định nghĩa một *chuẩn* cho đơn vị. Độ lớn của đại lượng cần đo là tỷ số của độ lớn của đại lượng đó và đơn vị được chọn.

Có rất nhiều các đại lượng vật lý, tuy nhiên không phải tất cả các đại lượng đó là không phụ thuộc lẫn nhau, thí dụ tốc độ là thương số của độ dài trên thời gian. Do đó người ta lựa chọn – dựa trên các thoả thuận quốc tế – một số đại lượng cơ bản và các đơn vị cơ bản của chúng đồng thời đưa ra các chuẩn quốc tế cho các đơn vị đó. Các chuẩn cho các đơn vị cần đáp ứng các yêu cầu bất biến (càng ít thay đổi theo thời gian càng tốt) và phổ dụng.

Các đại lượng vật lý khác và đơn vị của chúng đều có thể biểu thị qua các đại lượng cơ bản và đơn vị cơ bản. Các đơn vị khác được thể hiện qua các đơn vị cơ bản được gọi là *đơn vị dẫn xuất* (chúng được thể hiện qua các đơn vị cơ bản nhờ những phương trình diễn tả mối quan hệ giữa các đại lượng tương ứng).

Thí dụ:

Oát là đơn vị công suất (ký hiệu là W) đó là đơn vị dẫn xuất được thể hiện qua các đơn vị cơ bản nhờ công thức $N = A/t$ – với A là công còn t là thời gian cần thiết để thực hiện công đó.

$$1 \text{ oát (1 W)} = 1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^3$$

Hệ đơn vị SI:

Tập hợp các đơn vị của các đại lượng vật lý khác nhau tạo thành một *hệ đơn vị*. Năm 1971 Hội nghị quốc tế về đo lường lần thứ 14 đã quy định 7 đơn vị cơ bản của hệ đo lường quốc tế (International System of Units, viết tắt là SI) trong đó có 3 đơn

vị cơ bản dùng trong Cơ học là đơn vị độ dài, đơn vị thời gian và đơn vị khối lượng. Bảng 1.1 chỉ ra các đại lượng cơ bản trong hệ SI và đơn vị của các đại lượng đó.

Bảng 1.1: Đơn vị cơ bản của hệ SI

Đại lượng	Tên đơn vị	Ký hiệu đơn vị
Độ dài	mét (meter)	m
Thời gian	giây (second)	s
Khối lượng	kilôgam	kg
Cường độ dòng điện	ampe	A
Nhiệt độ nhiệt động lực	độ Kelvin	K
Cường độ ánh sáng	nến	cd
Lượng chất	mole	mol

Một số đơn vị cơ bản trong hệ SI:

– Đơn vị độ dài cơ bản trong hệ SI là mét được định nghĩa tại Hội nghị quốc tế về đo lường lần thứ 17 như sau:

"Mét là độ dài quãng đường mà ánh sáng đi được trong chân không, trong khoảng thời gian bằng $\frac{1}{299792458}$ giây".

Bậc độ lớn của một số độ dài được đưa ra trong bảng 1.2 giúp ta hình dung được khoảng cách, kích thước điển hình trong thế giới xung quanh.

Một số đơn vị độ dài khác cũng hay được người ta nói tới như:

$$1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ yard} = 0,9144 \text{ m}$$

Bảng 1.2: Một số khoảng cách điển hình

Độ dài	mét
Khoảng cách tới thiên hà Andromeda (tinh vân tiên nữ)	$2 \cdot 10^{22}$
Khoảng cách tới ngôi sao gần nhất (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
Khoảng cách tới hành tinh xa nhất (Pluto)	$6 \cdot 10^{14}$
Bán kính Trái đất	$6 \cdot 10^6$
Độ cao của đỉnh núi Everest	$9 \cdot 10^3$
Độ dày của tờ giấy	$1 \cdot 10^{-4}$
Bước sóng của ánh sáng	$5 \cdot 10^{-7}$
Độ dài của virút điển hình	$1 \cdot 10^{-8}$
Bán kính của nguyên tử hiđrô	$5 \cdot 10^{-11}$
Bán kính của proton	$\sim 10^{-15}$

- Hội nghị quốc tế về đo lường lần thứ 17 cũng đưa ra định nghĩa mới của giây:

"Giây là khoảng thời gian bằng 9192631770 chu kỳ bức xạ ứng với sự chuyển giữa hai mức siêu tinh tế trong trạng thái cơ bản của nguyên tử Xêdi 133".

Bậc độ lớn của một số khoảng thời gian được đưa ra trong bảng 1.3 giúp ta hình dung được khoảng thời gian điển hình trong thế giới xung quanh.

Bảng 1.3: Một số khoảng thời gian điển hình

Khoảng thời gian	giây
Thời gian sống của proton	$\sim 10^{39}$
Tuổi của vũ trụ	$5 \cdot 10^{17}$
Tuổi của Kim tự tháp Cheops	$1 \cdot 10^{11}$
Tuổi của con người (USA)	$2 \cdot 10^9$
Thời gian một ngày	$9 \cdot 10^4$
Khoảng thời gian giữa hai nhịp thở của người	$8 \cdot 10^{-1}$
Thời gian sống của hạt muyon	$2 \cdot 10^{-6}$
Khoảng thời gian của xung ngắn nhất trong PTN (1989)	$6 \cdot 10^{-15}$
Thời gian sống của hạt không bền nhất	$\sim 10^{-23}$

- Đơn vị khối lượng cơ bản trong hệ SI là kilôgam. *Chuẩn khối lượng 1 kg là khối hợp kim platin – iridi hình trụ được lưu giữ tại Viện đo lường tiêu chuẩn quốc tế ở gần Paris.* Để đo đặc khối lượng của các đối tượng vi mô (nguyên tử, phân tử...) người ta còn dùng chuẩn khối lượng thứ hai là khối lượng của nguyên tử cacbon – 12. Theo quy định quốc tế đó là 12 đơn vị khối lượng nguyên tử (kí hiệu là u). Tỷ lệ giữa hai chuẩn khối lượng là:

$$1\text{ u} = 1,6605402 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$$

Bảng 1.4 cho chúng ta thấy độ lớn của khối lượng của một số vật trong tự nhiên.

Bảng 1.4: Một số khối lượng điển hình

Vật	Kilôgam (kg)
Phần được biết tới của vũ trụ	$\sim 10^{53}$
Thiên hà của chúng ta	$2 \cdot 10^{41}$
Mặt trời	$2 \cdot 10^{30}$
Mặt trăng	$7 \cdot 10^{22}$
Núi nhô	$7 \cdot 10^7$
Con voi	$5 \cdot 10^3$
Phân tử penicilin	$5 \cdot 10^{-17}$
Nguyên tử urani	$4 \cdot 10^{-26}$
Proton	$2 \cdot 10^{-27}$
Electron	$9 \cdot 10^{-31}$

1.1.2. THỨ NGUYÊN

Ngoài khái niệm đơn vị để đặc trưng về lượng người ta còn dùng khái niệm thứ nguyên để đặc trưng cho các đại lượng về chất. Trong cơ học có 3 thứ nguyên cơ bản đó là: độ dài (ký hiệu : L), khối lượng M và thời gian T.

Thí dụ:

Thứ nguyên của vận tốc là $[v] = LT^{-1}$, thứ nguyên của gia tốc $[a] = L.T^{-2}$ (ký hiệu thứ nguyên của đại lượng vật lý bằng ký hiệu của đại lượng vật lý đó viết trong ngoặc móc vuông).

1.1.3. ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP THỨ NGUYÊN ĐỂ GIẢI BÀI TẬP

Dùng khái niệm thứ nguyên hoặc so sánh thứ nguyên của các đại lượng vật lý, chúng ta có thể phát hiện ra quy luật phụ thuộc lẫn nhau của các đại lượng đó. Ngoài ra, các kết quả vật lý đúng đều được thể hiện bằng các phương trình toán học mà hai vế của mỗi phương trình là các đại lượng vật lý có cùng thứ nguyên. Nhận xét này giúp ta kiểm tra nhanh kết quả bài tập hoặc nghiên cứu một cách định tính mà không cần tính toán chi tiết.

Thí dụ 1:

Hãy tìm quy luật phụ thuộc của lực nâng máy bay nhờ phương pháp thứ nguyên và đánh giá diện tích cần thiết của cánh máy bay Boeing 707 từ các dữ kiện sau: khối lượng máy bay khoảng 148 tấn, nó bay ở độ cao khoảng 10 km, ở độ cao này mật độ không khí khoảng $\rho \approx 0,37 \text{ kg/m}^3$, vận tốc trung bình của máy bay là $v = 250 \text{ m/s}$.

Giải:

Lực tác dụng của không khí lên máy bay F có thành phần theo phương thẳng đứng gọi là lực nâng máy bay, thành phần này phụ thuộc góc nghiêng của cánh. Quy luật phụ thuộc của F hoặc lực nâng vào các đại lượng có liên quan như vận tốc máy bay v, diện tích cánh S và mật độ không khí ρ là giống nhau. Ta viết một cách hình thức:

$$F = k\rho^\alpha v^\beta S^\gamma \tag{1.1}$$

Trong đó: k, α , β , γ là các số không thứ nguyên. Thứ nguyên của các đại lượng trong (1.1) là:

$$[F] = MLT^{-2}, [\rho] = ML^{-3}, [v] = LT^{-1}, [S] = L^{-2}$$

Đặt vào công thức (1.1) và so sánh các số mũ ta có:

$$M L T^{-2} = M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^{-2\gamma}$$

Từ đó:

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 2 \quad ; \quad 1 = -3\alpha + \beta + 2\gamma \text{ hay } \gamma = 1$$

Công thức (1.1) có dạng tường minh là:

$$F = k\rho v^2 S \tag{1.2}$$

Để đánh giá, hệ số k có thể được chọn bằng 1/2 (hệ số này xuất hiện trong biểu

thức cho áp suất động của định luật Bernoulli). Lực nâng tối thiểu là thành phần thẳng đứng của F cỡ trọng lượng máy bay P khi máy bay bay ngang và lớn hơn P khi máy bay tăng độ cao. F phụ thuộc góc nghiêng của cánh, nếu cho F cỡ $2P$ thì:

$$S \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 1,48 \cdot 10^5 \cdot 9,8}{0,37 \cdot 2,5^2 \cdot 10^4} \text{ m}^2 ; \quad S \approx 250 \text{ m}^2 \quad (1.3)$$

Đánh giá trên thấp hơn thực tế, diện tích hai cánh máy bay Boeing 707 khoảng 280 m^2 .

Thí dụ 2:

Biết đơn vị của diện tích là m^2 hãy chứng minh định lý Pitago cho tam giác vuông $a^2 + b^2 = c^2$, trong đó a, b, c là số đo độ dài của hai cạnh góc vuông và cạnh huyền (hình 1-1).

Giải:

Chia tam giác vuông ABC diện tích S ra làm hai tam giác vuông ADB (diện tích S_1) và BDC (diện tích S_2). Rõ ràng là:

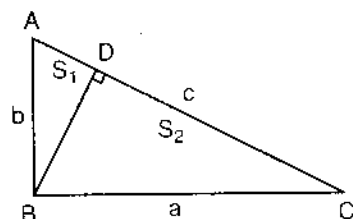
$$S = S_1 + S_2 \quad (1.4)$$

Vì đơn vị của diện tích là m^2 như đơn vị của bình phương độ dài cạnh tam giác nên ta lập luận rằng số đo diện tích của tam giác vuông tỉ lệ với bình phương độ dài cạnh huyền:

$$S = \alpha c^2 ; \quad S_1 = \alpha b^2 ; \quad S_2 = \alpha a^2 \quad (1.5)$$

Hệ số tỉ lệ không thứ nguyên α là hàm của các góc và như nhau cho ba tam giác vuông vì chúng đồng dạng với nhau. Đặt (1.5) vào (1.4) ta có định lý Pitago:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Hình 1-1. Các tam giác vuông trong chứng minh định lý Pitago.

1.2. VÉCTƠ

1.2.1. ĐẠI LƯỢNG VÉCTƠ VÔ HƯỚNG

Vectơ là một đặc trưng có giá trị số và giá trị về hướng. Sử dụng các vectơ để mô tả các định luật vật lý có một số ưu điểm là:

- Các định luật vật lý viết dưới dạng vectơ mang một ý nghĩa cụ thể không cần một hệ toạ độ nào cả.
- Nhiều định luật vật lý khi viết dưới dạng vectơ là rất ngắn gọn và có ý nghĩa tổng quát.

Một số định luật vật lý phức tạp không viết được trong dạng vectơ nhưng có thể viết được trong dạng Tensor. Tensor là một đặc trưng tổng quát của vectơ.

Đại lượng vô hướng (scalar) là đại lượng chỉ có giá trị số nhưng không có hướng

và không phụ thuộc hệ tọa độ: thí dụ T – nhiệt độ là đại lượng vô hướng. Tọa độ x của một điểm cố định không phải là đại lượng vô hướng vì nó phụ thuộc vào cách chọn chiều cho trục x .

Vectơ được biểu thị bằng chữ có mũi tên ở trên. Cụ thể hơn nó được thể hiện bằng độ lớn nhân với vectơ đơn vị chỉ phương:

$$\vec{A} = A \hat{A} \quad (1.6)$$

Trong đó: A là độ lớn của véc tơ;

$\hat{A}$ là vectơ đơn vị có độ dài bằng 1.

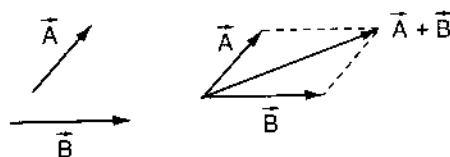
Các vectơ $\vec{A}, \vec{B}$ là bằng nhau khi chúng có độ lớn bằng nhau và có cùng hướng.

1.2.2. CÁC PHÉP TÍNH TRÊN VECTƠ

1. Cộng vectơ: theo quy tắc hình bình hành

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ phép cộng vectơ là giao hoán.

$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ phép cộng vectơ có tính kết hợp.



Hình 1-2. Cộng hai vectơ theo quy tắc hình bình hành.

2. Trừ vectơ

Phép trừ $\vec{A}$ cho vectơ $\vec{B}$ chính là phép cộng vectơ $\vec{A}$ cho vectơ $-\vec{B}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (1.7)$$

3. Nhân vectơ với số vô hướng k có tính phân phối

$$k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

4. Đạo hàm vectơ theo thời gian nếu vectơ phụ thuộc thời gian

Trong các mô tả hiện tượng vật lý có nhiều đại lượng vật lý là vectơ phụ thuộc thời gian.

$$\vec{A}(t) = A(t) \hat{A}(t) \quad (1.8)$$

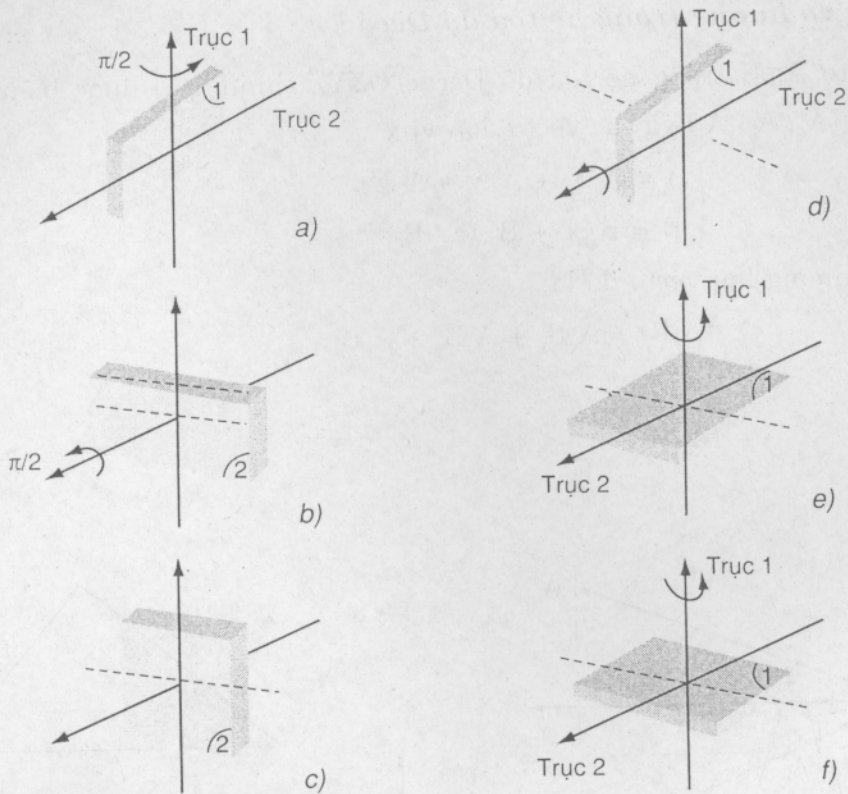
Ta có thể tìm vận tốc thay đổi của đại lượng vectơ đó bằng cách đạo hàm đại lượng vectơ đó theo thời gian

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \hat{A}(t) + A(t) \frac{d\hat{A}}{dt} \quad (1.9)$$

Ta cần chú ý rằng một đại lượng vật lý có thể biểu thị được bằng vectơ khi:

- Đại lượng đó có thể cộng được theo quy tắc hình bình hành.
- Độ lớn và hướng của đại lượng đó không phụ thuộc vào hệ tọa độ.

Không phải tất cả các đại lượng có độ lớn và hướng đều là vectơ. Quay một góc hữu hạn không phải là đại lượng vectơ mặc dầu vận tốc góc là đại lượng vectơ (quay một góc vô cùng bé quanh trục). Thí dụ, xét vật rắn quay các góc hữu hạn xung quanh các trục cố định trong không gian. Hình 1-3 mô tả sự quay quyền sách quanh 2 trục vuông góc với nhau và các góc quay được chọn là $\pi/2$.



Hình 1-3. Phép quay quyền sách một góc hữu hạn, lần lượt theo hai trục vuông góc là không giao hoán.

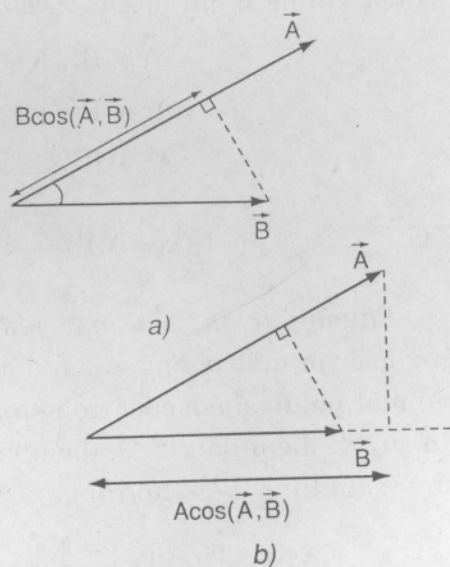
Các phép quay đó không tuân theo các phép tính vectơ, phép quay theo trục 1 trước, sau đó là trục 2 (hình 1-3a, b, c) cho kết quả khác với phép quay theo trục 2 trước sau đó là trục 1 (hình 1-3d, e, f). Vị trí cuối của 2 phép quay được thực hiện theo 2 thứ tự đảo nhau là không trùng hợp do đó định luật giao hoán không thỏa mãn mặc dầu các phép quay đều có độ lớn và hướng. Vì vậy các phép quay một góc hữu hạn quanh trục không phải là đại lượng vectơ.

5. Tích vô hướng hai vectơ là một đại lượng vô hướng

Tích vô hướng của 2 vectơ là đại lượng vô hướng bằng tích của 2 môđun của hai vectơ đó nhân với cosin của góc giữa chúng:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) \quad (1.10)$$

Chú ý rằng $B \cos(\vec{A}, \vec{B})$ hoặc $A \cos(\vec{A}, \vec{B})$ là hình chiếu của độ dài vectơ $\vec{B}$ ($\vec{A}$) lên phương của vectơ $\vec{A}$ ($\vec{B}$) (xem hình 1-4).



Hình 1-4. Tích vô hướng của hai vectơ.

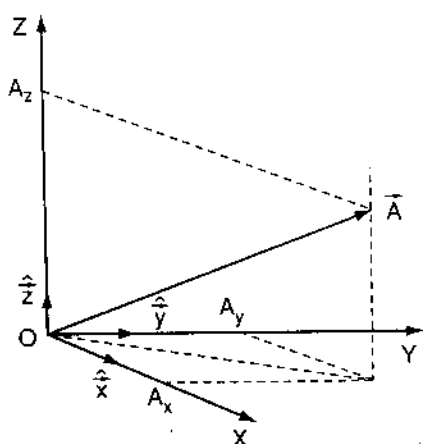
a) Tích vô hướng trong hệ tọa độ Đềcác

Hai vectơ $\vec{A}$, $\vec{B}$ trong hệ tọa độ Đềcác OXYZ (hình 1-5) được biểu thị qua các thành phần (A_x , A_y , A_z) và các vectơ đơn vị $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$:

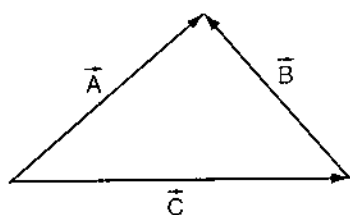
$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \\ \vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \end{cases} \quad (1.11)$$

Tích vô hướng hai vectơ đó là:

$$(\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.12)$$



Hình 1-5. Vectơ trong hệ tọa độ Đềcác.



Hình 1-6. Tam giác vectơ trong chứng minh định lý côsin.

b) Áp dụng tích vô hướng

– Định lý côsin:

Liên hệ giữa độ lớn A, B, C của ba cạnh tam giác với góc đối diện của 1 cạnh có thể được chứng minh một cách đơn giản như sau (xem hình 1-6):

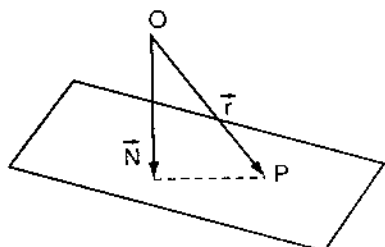
$$\begin{aligned} (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) &= (\vec{C}, \vec{C}) \\ A^2 + B^2 - 2(\vec{A}, \vec{B}) &= C^2 \\ A^2 + B^2 - 2A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) &= C^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

vì:
$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{(\vec{A}, \vec{B})}{A \cdot B}$$

– Phương trình của mặt phẳng: Nếu vectơ $\vec{N}$ vuông góc với mặt phẳng, điểm đầu của $\vec{N}$ là O nằm ngoài mặt phẳng điểm cuối trong mặt phẳng. $\vec{r}$ là một vectơ tùy ý, điểm đầu là O, điểm cuối là P trong mặt phẳng (xem hình 1-7). Rõ ràng:

$$(\vec{r}, \vec{N}) = 0$$

vì:
$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$



Hình 1-7. Hình để chứng minh phương trình mặt phẳng.

$$\vec{N} = N_x \hat{x} + N_y \hat{y} + N_z \hat{z}$$

nên:
$$x \frac{N_x}{N^2} + y \frac{N_y}{N^2} + z \frac{N_z}{N^2} = 1 \quad (1.14)$$

Đó chính là phương trình của mặt phẳng trong hệ toạ độ Đềcác, trong hình giải tích (1.14) được viết dưới dạng:

$$ax + by + cz = 1 \text{ (các hệ số } a, b, c \text{ thực chất là } \frac{N_x}{N^2}, \frac{N_y}{N^2}, \frac{N_z}{N^2} \text{)}$$

– Vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$, từ trường $\vec{B}$ trong sóng điện từ (sóng ngang) thoả mãn điều kiện:

$$(\vec{k}, \vec{E}) = 0; \quad (\vec{k}, \vec{B}) = 0; \quad (\vec{E}, \vec{B}) = 0 \quad (1.15)$$

với $\vec{k}$ là vectơ sóng.

– Công suất:

Công suất tức thời là đạo hàm của công A theo thời gian và bằng tích vô hướng của vectơ lực $\vec{F}$, với vectơ vận tốc $\vec{v}$.

$$\frac{dA}{dt} = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (1.16)$$

– Lưu khối: Lượng chất lỏng chảy từ đơn vị thể tích dV sau thời gian dt là $\frac{dV}{dt}$ (xem hình 1-8) và cũng được thể hiện bằng tích vô hướng sau:

$$\frac{dV}{dt} = (\vec{S}, \vec{v}) \quad (1.17)$$

$\vec{S}$ – vectơ vuông góc với 1 đơn vị mặt phẳng và có độ lớn bằng diện tích của đơn vị mặt phẳng đó còn $\vec{v}$ là vectơ vận tốc của đơn vị mặt phẳng chất lưu.

6. Tích có hướng 2 vectơ

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{A}, \vec{B}$ là một vectơ $\vec{C}$

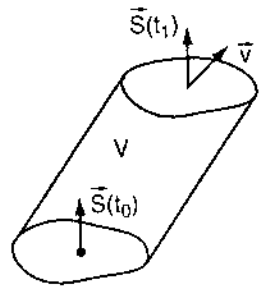
$$[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{C} \quad (1.18)$$

sao cho độ lớn của $C = A \cdot B \cdot |\sin(\vec{A}, \vec{B})|$, hướng của $\vec{C}$ xác định bằng quy tắc vận đỉnh ốc với ren phải: quay $\vec{A}$ theo góc nhỏ nhất để hướng của nó trùng với hướng của $\vec{B}$ thì chiều tiến của mũi đỉnh ốc sẽ trùng với chiều của $\vec{C}$ (xem hình 1-9).

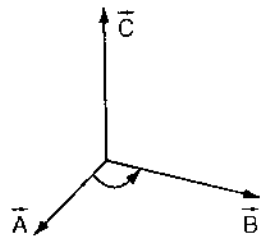
Tích vectơ có các tính chất sau:

– Khi đổi thứ tự của hai vectơ, tích sẽ đổi dấu

$$[\vec{A}, \vec{B}] = - [\vec{B}, \vec{A}] \quad (1.19)$$



Hình 1-8. Minh họa cho lưu khối.



Hình 1-9. Tích có hướng của hai vectơ.

– Tính phân bố:

$$[\vec{A}, (\vec{B} + \vec{C})] = [\vec{A}, \vec{B}] + [\vec{A}, \vec{C}] \quad (1.20)$$

7. Tích hỗn hợp

Thể tích hình hộp có độ dài 3 cạnh bằng độ dài của 3 vectơ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ có thể biểu thị bằng tích hỗn hợp sau (xem hình 1-10):

$$V = ([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}) \quad (1.21)$$

Thật vậy:

$$|[\vec{A}, \vec{B}]| = A.B.\sin\theta$$

$S = A.B.\sin\theta$ là diện tích hình bình hành đáy có cạnh là $\vec{A}, \vec{B}$ (xem hình 1-10).

$$([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}) = A.B.\sin\theta.C.\cos\beta = A.B.\sin\theta.h = S.h.$$

Giá trị đó bằng thể tích hình hộp có ba cạnh là ba vectơ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. Tích hỗn hợp có tính hoán vị tuần hoàn:

$$(\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]) = ([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}) \quad (1.22)$$

$$\text{Tuy nhiên: } (\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]) = -(\vec{A}, [\vec{C}, \vec{B}]) \quad (1.23)$$

8. Định lý hàm số sin

Định lý hàm số sin cho tam giác có ba cạnh với độ dài tương ứng là A, B, C được chứng minh như sau (xem hình 1-11):

$$\begin{aligned} \text{Xét} \quad & \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \\ & [\vec{A}, \vec{C}] = [\vec{A}, (\vec{A} + \vec{B})] = [\vec{A}, \vec{B}] \end{aligned}$$

Từ định nghĩa tích có hướng hai vectơ ta được:

$$\begin{aligned} A.C\sin(\vec{A}, \vec{C}) &= A.B\sin(\vec{A}, \vec{B}) \\ \frac{\sin(\vec{A}, \vec{C})}{B} &= \frac{\sin(\vec{A}, \vec{B})}{C} \end{aligned} \quad (1.24)$$

(1.24) là nội dung của định lý hàm số sin.

9. Tích vectơ kép

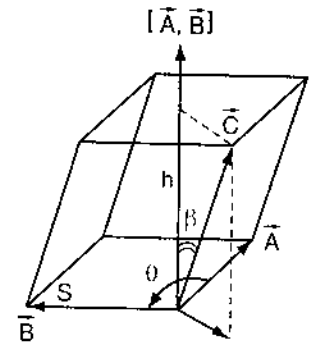
Dễ dàng chứng minh đẳng thức sau:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}) \quad (1.25)$$

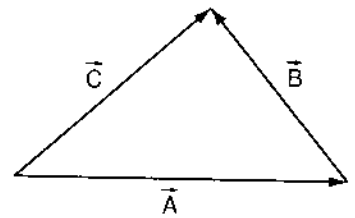
1.2.3. VECTƠ TRONG HỆ TOA ĐỘ ĐỀ CÁC

Vectơ $\vec{A}$ bất kỳ trong hệ toạ độ Đề các OXYZ có thể khai triển thành tổng các vectơ thành phần (xem hình 1-4):

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (1.26)$$



Hình 1-10. Minh họa tích hỗn hợp



Hình 1-11. Tam giác vectơ trong chứng minh định lý sin.

Bình phương môđun của vectơ $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ là bất biến đối với phép quay hệ toạ độ (hay hệ quy chiếu).

Tích vectơ $[\vec{A}, \vec{B}]$ hay tích hỗn hợp $(\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}])$ trong hệ toạ độ Đécác còn được viết trong dạng định thức:

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}]) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

Tích vectơ $[\vec{A}, \vec{B}]$ hay tích hỗn hợp $(\vec{C}[\vec{A}, \vec{B}])$ trong hệ toạ độ Đécác cũng bất biến với phép quay hệ toạ độ từ định nghĩa hình học của chúng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Sử dụng phương pháp thứ nguyên, hãy tìm:

a) Biểu thức cho sự phụ thuộc của áp suất hấp dẫn tại tâm các ngôi sao P vào khối lượng M, bán kính R của nó và hằng số hấp dẫn G.

b) Tập hợp các điện tử tự do trong kim loại có thể coi như một loại khí gồm các phần tử không tương tác (được gọi là khí điện tử tự do Fermi). Hãy tìm áp suất của khí điện tử trong kim loại như hàm của hằng số Planck $\hbar$, khối lượng điện tử m_e , mật độ khí điện tử n_e .

Trả lời: a) $P = k \frac{GM^2}{R^4}$; b) $P = f \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}$. Ở đây k, f là các hằng số không thứ nguyên.

1.2. Hòn bi hình cầu bán kính R chuyển động với vận tốc v trong chất lỏng nhớt có hệ số nhớt là η . Hãy sử dụng phương pháp thứ nguyên để tìm biểu thức gần đúng cho lực cản nhớt cản trở chuyển động của hòn bi trong trường hợp vận tốc v nhỏ và so sánh với biểu thức chính xác $F = 6\pi\eta v R$ (công thức Stock).

1.3. Hãy chứng minh công thức cho tích véc tơ kép (1.25):

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$$

1.4. Một hình hộp có các cạnh được xây dựng trên các vectơ $\hat{x} + 2\hat{y}$, $4\hat{y}$, $\hat{y} + 3\hat{z}$ đều có điểm đầu là gốc toạ độ. Hãy tìm thể tích của hình hộp đó.

Trả lời: 12.

1.5. Một chất điểm chuyển động từ điểm A(20,15,0) (m) đến điểm B(0,0,7) (m) dưới tác dụng đồng thời của hai lực $\vec{F}_1(\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z})\text{N}$ và $\vec{F}_2(4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z})\text{N}$. Hỏi công thực hiện bởi hai lực đó làm chất điểm chuyển dời từ điểm A đến điểm B.

Trả lời: -48J.

Chương 2

ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

2.1. CHẤT ĐIỂM, HỆ QUY CHIẾU

2.1.1. CHẤT ĐIỂM

Khi kích thước của vật chuyển động nhỏ hơn rất nhiều các khoảng cách đặc trưng của chuyển động, vật có thể được coi là các chất điểm. *Chất điểm là điểm vật chất không có kích thước và khối lượng của nó bằng khối lượng vật.* Chất điểm là một khái niệm mang tính tương đối giúp ta mô tả chuyển động của vật một cách dễ dàng hơn. Để nhận biết chuyển động của vật ta cần có một vật mốc quy ước là đứng yên. Để định lượng được chuyển động ta cần có một hệ toạ độ gắn với vật mốc. Vật mốc và hệ toạ độ gắn liền với nó để nhận biết chuyển động gọi là hệ quy chiếu.

Hệ quy chiếu = Vật mốc + Hệ toạ độ

2.1.2. CÁC HỆ TOẠ ĐỘ THÔNG DỤNG

1. Hệ toạ độ Đề-các

Trong hệ toạ độ này vị trí chất điểm được đặc trưng bởi vectơ bán kính $\vec{r}$. x, y, z là thành phần của vectơ $\vec{r}$ trên các trục Ox, Oy, Oz . Toạ độ chất điểm m là (x, y, z) (xem hình 2-1), ta ký hiệu là $m(x, y, z)$.

2. Toạ độ cực trong mặt phẳng

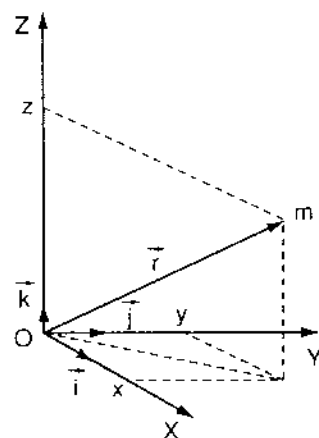
Trong hệ toạ độ này toạ độ của chất điểm m là (ρ, φ) (xem hình 2-2). ρ là khoảng cách từ chất điểm tới gốc toạ độ còn φ là góc phương vị. Mối liên hệ giữa các toạ độ Đề-các (x, y) và toạ độ cực (ρ, φ) được cho bởi:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \text{hay} & & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \varphi & & & \text{tg} \varphi &= y/x \end{aligned} \quad (2.1)$$

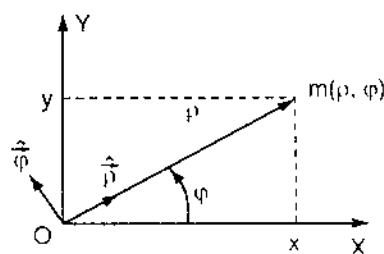
3. Hệ toạ độ trụ

Trong hệ toạ độ này vị trí chất điểm được cho bởi ba tham số z, ρ, φ với ρ, φ xác định tương tự như trong hệ toạ độ cực (xem hình 2-3).

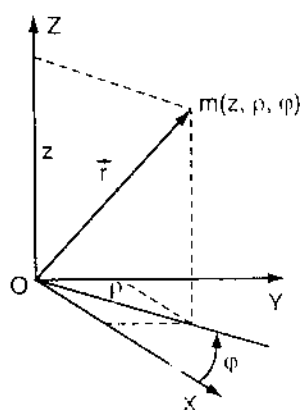
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z \quad (2.2)$$



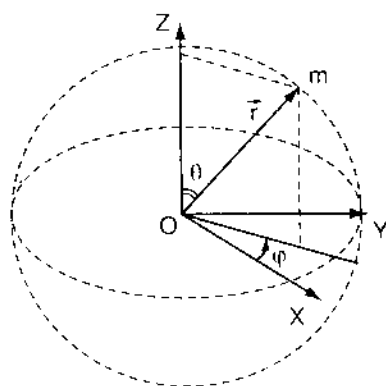
Hình 2-1. Chất điểm trong hệ toạ độ Đề-các



Hình 2-2. Chất điểm trong hệ toạ độ cực phẳng



Hình 2-3. Chất điểm trong hệ tọa độ trụ.



Hình 2-4. Chất điểm trong hệ tọa độ cầu.

4. Hệ tọa độ cầu

Vị trí chất điểm được cho bởi ba tham số r, θ, φ (xem hình 2-4).

Mối liên hệ giữa các tọa độ Đềcác và tọa độ cầu được cho bởi hệ thức:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \varphi = y/x \quad (2.4)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

2.2. VÉCTƠ VẬN TỐC VÀ VÉCTƠ GIA TỐC

2.2.1. VÉCTƠ VẬN TỐC

Khi chuyển động, chất điểm vạch ra một đường cong trong không gian, đường đó được gọi là quỹ đạo chuyển động của nó (xem hình 2-5). Véc-tơ dịch chuyển $\Delta \vec{r}$ được định nghĩa như hiệu của hai véc-tơ bán kính chỉ vị trí chất điểm ở hai thời điểm $t + \Delta t$ và t :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (2.5)$$

Véc-tơ vận tốc trung bình được định nghĩa như tỷ số giữa véc-tơ dịch chuyển $\Delta \vec{r}$ và khoảng thời gian xảy ra độ dịch chuyển ấy:

$$\vec{v}_{tb} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Khi khoảng thời gian Δt tiến tới 0 ta có khái niệm vận tốc tức thời:

$$\vec{v} = \lim \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.7a)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (2.7b)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} ; v_y = \frac{dy}{dt} ; v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.7c)$$

v_x, v_y, v_z là thành phần của véc tơ vận tốc tức thời trên các trục toạ độ. Véc tơ vận tốc tức thời có phương trùng với phương tiếp tuyến của đường cong quỹ đạo tại thời điểm đang xét t.

2.2.2. VÉCTƠ GIA TỐC TRONG HỆ TOA ĐỘ ĐỀ CÁC

Véc tơ gia tốc trung bình được định nghĩa như tỷ số của sự thay đổi véc tơ vận tốc $\Delta \vec{v}$ và khoảng thời gian Δt mà sau khoảng thời gian đó sự biến đổi vận tốc trên xảy ra:

$$\vec{a}_{tb} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Khi khoảng thời gian Δt tiến tới 0 ta có khái niệm gia tốc tức thời:

$$\vec{a} = \lim \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.9a)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.9b)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} ; a_y = \frac{dv_y}{dt} ; a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (2.9c)$$

a_x, a_y, a_z là thành phần của véc tơ gia tốc trên các trục toạ độ.

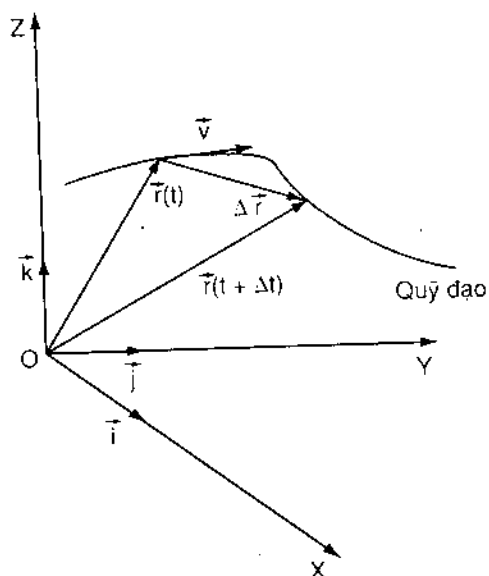
2.2.3. GIA TỐC TIẾP TUYẾN, PHÁP TUYẾN

Khi chất điểm chuyển động theo quỹ đạo cong với vận tốc thay đổi theo thời gian cả về độ lớn lẫn hướng người ta dùng gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi đó.

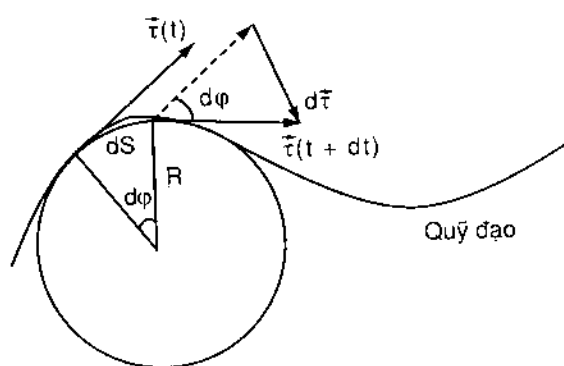
Xét hình 2-6 độ cong của quỹ đạo (ký hiệu là k) tại điểm đặc trưng bởi véc tơ đơn vị tiếp tuyến $\vec{r}(t)$ được xác định như nghịch đảo của bán kính đường tròn mật tiếp R với quỹ đạo tại điểm đó:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.10)$$

k - độ cong, R - bán kính đường tròn mật tiếp (bán kính cong của quỹ đạo).



Hình 2-5. Véc tơ chuyển, véc tơ vận tốc, quỹ đạo của chất điểm.



Hình 2-6. Đường tròn mật tiếp với quỹ đạo.

Ta viết vectơ vận tốc trong dạng $\vec{v} = v.\vec{\tau}$ và lấy đạo hàm của nó theo thời gian để được gia tốc:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v.\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (2.11)$$

Đổi biến trong khi lấy đạo hàm, ta được :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{1}{R} v \quad (2.12)$$

Mặt khác, ta hãy tìm đạo hàm $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ xuất phát từ điều kiện $\vec{\tau}^2 = 1$. Dễ thấy rằng:

$$2(\vec{\tau}, d\vec{\tau}) = 0 \quad d\vec{\tau} \perp \vec{\tau} \quad (2.13)$$

Từ hình 2-6 ta có $dt = 1.d\varphi$. Do đó:

$\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} = \frac{1}{R} \vec{n}$ ($\vec{n}$ vectơ đơn vị pháp tuyến vuông góc với vectơ đơn vị tiếp tuyến $\vec{\tau}(t)$ tại điểm của quỹ đạo có bán kính cong bằng R.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n} \quad (2.14)$$

Véc tơ gia tốc trong hệ tọa độ tự nhiên được đặc trưng bởi véc tơ đơn vị tiếp tuyến $\vec{\tau}$, pháp tuyến $\vec{n}$ và có thể coi là tổng của hai véc tơ gia tốc thành phần tiếp tuyến, pháp tuyến:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad (2.15a)$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n} \text{ gia tốc pháp tuyến.} \quad (2.15b)$$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \text{ gia tốc tiếp tuyến.} \quad (2.15c)$$

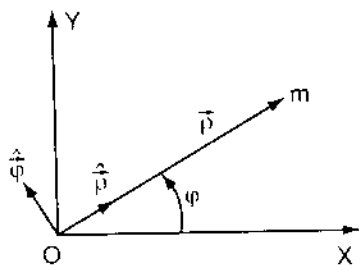
Véc tơ gia tốc tiếp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi độ lớn của vận tốc, còn vectơ gia tốc pháp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi hướng của véc tơ gia tốc.

2.2.4. VECTƠ VẬN TỐC VÀ VECTƠ GIA TỐC TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỤC

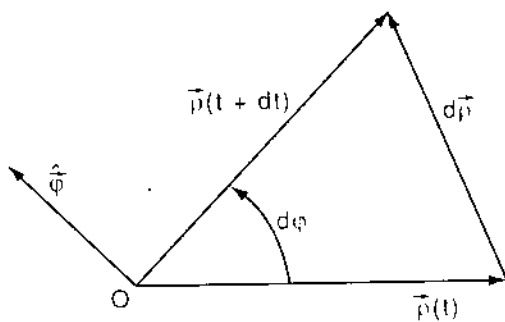
Trong hệ tọa độ cực phẳng, vị trí chất điểm m được đặc trưng bởi hai tọa độ (ρ, φ) . Cả hai tọa độ đó đều là hàm của thời gian (xem hình 2-7). Vectơ bán kính $\vec{\rho}$ có thể được viết như sau:

$$\vec{\rho} = \rho.\hat{\rho} \quad (2.16)$$

Trong (2.16) $\hat{\rho}$ là vectơ đơn vị theo hướng xuyên tâm. Lấy đạo hàm theo thời gian của (2.16):



Hình 2-7. Vị trí chất điểm trong hệ tọa độ cực.



Hình 2-8. Biến thiên của vectơ đơn vị xuyên tâm.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r \quad \vec{v}_r \cdot \hat{e}_r = v_r$$

$\vec{v}_r$ được gọi là vận tốc xuyên tâm. Đạo hàm vectơ bán kính đơn vị xuyên tâm theo t (xem độ biến thiên của vectơ đó trên hình 2-8) ta được:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = 1 \cdot \hat{e}_\phi \cdot \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

Trong đó: $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \omega$ là vận tốc góc còn $\hat{e}_\phi$ là vectơ đơn vị phương vị hướng theo phương vuông góc với $\hat{e}_r$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi; \quad \vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\phi \hat{e}_\phi \quad (2.17)$$

(2.17) là biểu thức cho vectơ bán kính trong hệ tọa độ cực, gồm hai thành phần vận tốc xuyên tâm $v_r = \dot{r}$ và vận tốc phương vị $v_\phi = r\dot{\phi}$.

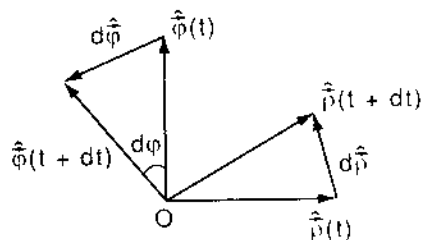
Đạo hàm (2.17) theo t ta được vectơ gia tốc trong hệ tọa độ cực:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + r \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + r \dot{\phi} \frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + r \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + r \dot{\phi} \frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$$

$$\text{Vi: } \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} (-\hat{e}_r(t)) = -\dot{\phi} \hat{e}_r$$

Đặt biểu thức trên vào biểu thức cho gia tốc, ta được:



Hình 2-9. Biến thiên của vectơ đơn vị phương vị.

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}^2\hat{\rho}$$

Như vậy trong hệ toạ độ cực phẳng véc tơ gia tốc là tổng của hai véc tơ thành phần vuông góc với nhau: gia tốc xuyên tâm $\vec{a}_\rho$, gia tốc phương vị $\vec{a}_\phi$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\phi = a_\rho\hat{\rho} + a_\phi\hat{\phi} \quad (2.18a)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \quad (2.18b)$$

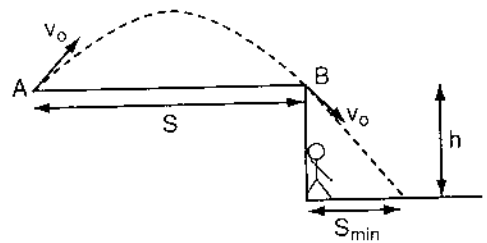
$$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Súng phóng lựu đặt cách bờ vực một khoảng $s = 8100$ m (xem hình 2-10). Vực có độ sâu $h = 105$ m. Sắt bờ vực có kẻ địch trú ẩn, hỏi đạn từ súng phóng lựu với vận tốc ban đầu là $v_0 = 300$ m/s có thể rơi ở khoảng cách gần nhất sát bờ vực như thế nào? ($s_{\min}$?).

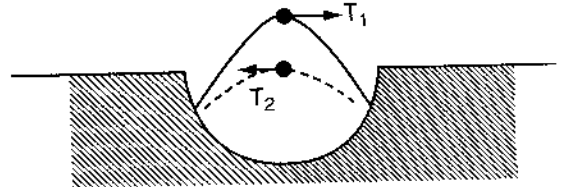
Trả lời:

$$S_{\min} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right\} = 63 \text{ m}$$



Hình 2-10.

2.2. Một hòn bi nảy đàn hồi trong một cái hố hình cầu lõm giữa hai điểm cùng nằm trên mặt phẳng nằm ngang (xem hình 2-11). Khoảng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp khi quả cầu chuyển động từ trái sang phải là T_1 còn từ phải sang trái là T_2 . Tìm bán kính của hố.



Hình 2-11.

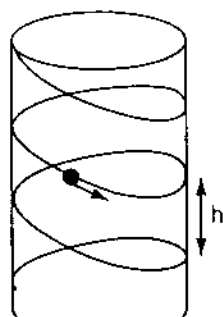
Trả lời: $R = g \frac{T_1 T_2}{2\sqrt{2}}$

2.3. Hai vòng tròn giống nhau có cùng bán kính là a tiếp xúc nhau tại một điểm và cùng nằm trên mặt nằm ngang. Một trong hai vòng tròn là cố định còn cái kia lăn không trượt và quay xung quanh vòng tròn cố định với vận tốc góc không đổi là ω . Trên vòng tròn chuyển động có gắn cố định một chất điểm và tại thời điểm ban đầu

vị trí chất điểm trùng với điểm A của vòng tròn cố định. Hãy tìm phương trình quỹ đạo của chất điểm và vẽ quỹ đạo của nó.

Trả lời: Trong hệ toạ độ cực có gốc là A, trục qua tâm O của vòng tròn cố định và A. Phương trình có dạng: $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$; $\varphi = \omega t$; ρ là khoảng cách từ chất điểm tới A.

2.4. Một cái vòng nhỏ trượt theo một cái dây quấn dạng xoắn xung quanh trục thẳng đứng (hình 2-12). Vận tốc ban đầu của vòng bằng 0 và sự trượt xảy ra không có ma sát. Biết rằng đường kính của đường xoắn ốc là $R = 3 \text{ cm}$, bước xoắn là $h = 2 \text{ cm}$. Hãy xác định gia tốc của vòng khi đi được n vòng xoắn.



Hình 2-12.

Trả lời:

$$a = \frac{gh}{h^2 + 4\pi^2 R^2} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 R^2 n^2} = 13 \text{ m/s}^2$$

2.5. Xe ô tô chuyển động với vận tốc v ở gần một bức tường dài (đi xa khỏi tường dưới một góc α). Tại thời điểm cách bức tường khoảng l người lái xe bấm một tiếng còi ngắn. Hỏi xe đi được quãng đường bao nhiêu cho đến khi nghe thấy tiếng vọng? Vận tốc sóng âm trong không khí là c .

Trả lời:

$$x = \frac{2l}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \left[\sin\alpha + \sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2 - \cos^2\alpha} \right]$$

2.6. Chất điểm chuyển động theo đường elip có phương trình là $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Vận tốc góc của bán kính véc tơ kẻ từ tâm elip tới chất điểm là không đổi và bằng ω . Hãy xác định các thành phần của véc tơ vận tốc chất điểm biết tại thời điểm ban đầu $x(0) = a$.

Gợi ý: Nên sử dụng phương trình chuyển động dạng tham số $x = \rho \cdot \cos\omega t$; $y = \rho \cdot \sin\omega t$.

Chương 3

ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

3.1. CÁC ĐỊNH LUẬT ĐỘNG LỰC HỌC CƠ BẢN CỦA NEWTON

Trong chương này chúng ta sẽ xét tới nguyên nhân gây ra chuyển động của vật hoặc chất điểm. Vật chuyển động được là do nó chịu tác dụng của vật khác. Ta đặc trưng cho tác dụng của vật này lên vật kia và gây ra chuyển động của chúng bằng một đại lượng vật lý gọi là lực. Lực là một đại lượng vectơ được xác định bởi: độ lớn, phương và chiều, điểm đặt. Dựa trên các dạng tương tác giữa các vật người ta chia các lực thành bốn loại sau:

- *Lực hấp dẫn* (thí dụ như trọng lực).
- *Lực điện từ* (mọi lực mà ta thử nghiệm trực tiếp như lực kéo, lực ma sát, lực tĩnh điện Coulomb, lực do nam châm tác dụng lên nam châm khác... đều là lực điện từ do nguyên tử này tác dụng lên nguyên tử khác).

Hai lực cơ bản khác tác dụng qua khoảng cách ngắn mà ta không thể thử nghiệm trực tiếp bằng nhận biết nhạy cảm được đó là:

- *Lực tương tác mạnh*: lực tương tác giữa các hạt trong hạt nhân (lực tương tác "gắn" các proton và neutron trong hạt nhân nguyên tử).
- *Lực tương tác yếu*: các lực tham gia trong một số loại phân rã phóng xạ.

Các nhà vật lý từ lâu vẫn cho rằng thiên nhiên là đơn giản và thống nhất nên có thể giảm số lực cơ bản xuống. Einstein trong cuộc đời khoa học của mình đã cố gắng lý giải các lực trên chỉ là các mặt khác nhau của một "siêu lực" duy nhất nhưng chưa thành công. Tuy nhiên trong những năm sáu mươi và bảy mươi của thế kỷ 20 các nhà vật lý khác đã chứng minh được lực tương tác yếu và lực điện từ là các mặt khác nhau của *lực điện yếu* duy nhất và số loại lực trong tự nhiên được giảm từ bốn xuống ba. Việc tìm cách giảm số lực hơn nữa hiện nay vẫn là một trong những vấn đề hàng đầu của vật lý.

3.1.1. ĐỊNH LUẬT THỨ NHẤT CỦA NEWTON

Vật đứng yên hay chuyển động thẳng đều nếu nó không chịu tác dụng của bất kỳ một ngoại lực nào.

$$\vec{a} = 0 \text{ khi } \vec{F} = 0$$

Định luật này được gọi là định luật quán tính, nó thừa nhận ít nhất tồn tại một hệ quy chiếu trong đó ta thấy vật đứng yên hay chuyển động thẳng đều nếu không chịu tác dụng của các vật khác.

3.1.2. ĐỊNH LUẬT THỨ HAI CỦA NEWTON

Lực tác dụng tổng cộng lên vật bằng tích khối lượng vật nhân với gia tốc mà vật nhận được dưới tác dụng của lực tổng hợp:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

Dạng tổng quát hơn của định luật này là:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\vec{P} - \text{là động lượng của vật}) \tag{3.2}$$

3.1.3. ĐỊNH LUẬT THỨ BA CỦA NEWTON

Khi hai vật tương tác với nhau thì lực tác dụng từ vật thứ nhất lên vật thứ hai ($\vec{F}_{12}$) bằng và ngược chiều với lực tác dụng từ vật thứ hai nên vật thứ nhất ($\vec{F}_{21}$):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{3.3}$$

Hai định luật đầu tiên đúng khi chúng ta quan sát trong hệ quy chiếu chuyển động không có gia tốc (hệ quy chiếu quán tính). Thí dụ xét hệ quy chiếu (không quán tính) gắn với xe ô tô khi xe tăng tốc (chuyển động có gia tốc) vật trong xe ô tô bị xô về phía sau thậm chí khi không có lực thật nào tác dụng lên các vật đó.

Định luật thứ ba của Newton được áp dụng với một số hạn chế nhất định. Định luật thứ ba của Newton nói rằng $\vec{F}_{12}$ bằng về độ lớn và ngược chiều với $\vec{F}_{21}$ khi chúng được đo ở cùng một thời điểm. Vì tất cả tín hiệu và lực cũng được truyền đi với vận tốc hữu hạn, do đó cần một khoảng thời gian để lực truyền từ vật thứ hai đến vật thứ nhất sau khi nó bị vật thứ nhất tác dụng. Nếu khoảng thời gian này rất ngắn so với khoảng thời gian tương tác giữa hai vật thì định luật thứ ba của Newton mới áp dụng chính xác được. Thí dụ như trong trường hợp hai cái ô tô va chạm nhau (trường hợp các đối tượng vĩ mô của cơ học cổ điển) thì khoảng thời gian va chạm giữa chúng lớn hơn nhiều thời gian cần thiết để tín hiệu ánh sáng chạy hết chiều dài một cái ô tô. Khoảng thời gian đó cỡ:

$$\frac{L}{c} \approx \frac{3m}{3.10^8 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ s} \quad (L - \text{độ dài cái ô tô})$$

Sau khoảng thời gian đó một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc 100 km/h (khoảng 30 m/s) chỉ đi được khoảng cách cỡ 3.10^{-7} m còn thời gian va chạm giữa hai cái ô tô cỡ một phần mười giây. Trong trường hợp va chạm của các đối tượng vĩ mô (như nguyên tử chẳng hạn) định luật thứ ba của Newton không phải lúc nào cũng là gần đúng tốt.

3.2. ÁP DỤNG CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NEWTON ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC

Trong động lực học có hai loại bài toán quan trọng. Bài toán thứ nhất là xác định lực tác dụng khi biết chuyển động của chất điểm (bài toán thuận). Bài toán thứ hai là biết các lực tác dụng và các điều kiện ban đầu của chuyển động xác định chuyển động của chất điểm (bài toán ngược).

Để giải bài toán thứ nhất cần xác định gia tốc $\vec{a}$ của chất điểm, sau đó xác định lực tác dụng theo định luật thứ hai của Newton.

Thí dụ 1 (bài toán thứ hai của động lực học) :

Một vật khối lượng m được ném lên cao với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ làm với phương nằm ngang một góc α . Biết rằng lực cản của không khí ngược chiều và tỷ lệ thuận với vận tốc của vật. Hãy xác định phương trình chuyển động của vật (xem hình 3-1).

Giải:

Khi $t = 0$ thì $x_0 = 0$; $y_0 = 0$

$$v_{ox} = v_0 \cos \alpha ; v_{oy} = v_0 \sin \alpha$$

Lực cản của không khí ngược chiều với vận tốc chuyển động của vật cho nên có thể viết như sau:

$$\vec{F}_c = -k\vec{v} \quad (k > 0)$$

Phương trình động lực học của Newton cho chuyển động của vật là:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c$$

Phương trình cho các thành phần vectơ có dạng:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v} \quad \begin{cases} ma_x = -kv_x \\ ma_y = -mg - kv_y \end{cases}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$$

Lấy tích phân phương trình trên, ta được:

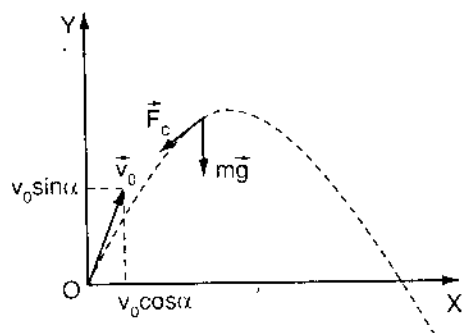
$$\ln v_x = -\frac{k}{m} t + \ln C$$

Hằng số tích phân C được xác định nhờ điều kiện ban đầu: khi $t = 0$ thì $v_x = v_{ox}$. Do đó:

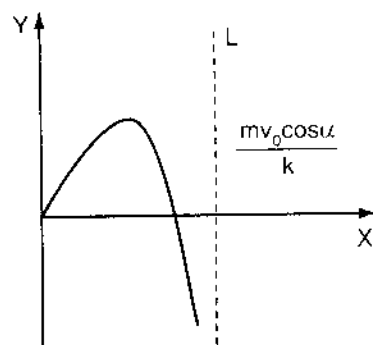
$$v_x = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m}{k} v_0 \cos \alpha (1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$



Hình 3-1. Chuyển động của vật bị ném xiên khi có lực cản.



Hình 3-2. Quỹ đạo của vật bị ném xiên khi có lực cản.

Hoàn toàn tương tự, tích phân phương trình vi phân cho thành phần vận tốc v_y , ta được:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -(mg + kv_y) \Rightarrow v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mgt}{k}$$

Quỹ đạo của chuyển động là một phương trình dạng $y(x) = 0$. Khi loại trừ t nó là đường cong tiệm cận với một đường thẳng song song với trục y . Thực vậy khi $t \rightarrow \infty$, $v_x \rightarrow 0$:

$$x \rightarrow m \frac{v_0 \cos \alpha}{k}$$

$$v_y \rightarrow -\frac{mg}{k}$$

Vật chuyển động song song với đường L cắt OX tại $\frac{mv_0 \cos \alpha}{k}$. Khi $k \rightarrow 0$ quỹ đạo là parabol. Thật vậy, lấy giới hạn khi k tiến tới không, ta được phương trình tham số quen thuộc cho parabol:

$$x \Big|_{k \rightarrow 0} = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y \Big|_{k \rightarrow 0} = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2}$$

Thí dụ 2: Chuyển động của hạt trong điện trường biến đổi

Xét chuyển động của hạt trong điện trường biến đổi tuần hoàn theo thời gian và hướng dọc theo trục OX (xem hình 3-3).

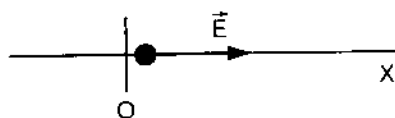
$$\vec{E} = \hat{x} \cdot E = \hat{x} \cdot E_0 \sin \omega t$$

Gia tốc chuyển động của hạt có điện tích q trong điện trường đó là:

$$a_x = q \frac{E_0}{m} \sin \omega t$$

$$\frac{dv_x}{dt} = q \frac{E_0}{m} \sin \omega t \Rightarrow v_x = \int q \frac{E_0}{m} \sin \omega t dt$$

$$\Rightarrow v_x(t) = -q \frac{E_0}{m\omega} \cos \omega t + C_1$$



Hình 3-3. Hạt điện tích q chuyển động trong điện trường biến thiên.

Trong công thức trên C_1 là một hằng số. Thể hiện vận tốc thành phần như đạo hàm của thành phần độ dịch chuyển theo thời gian và tích phân tiếp ta được:

$$\frac{dx}{dt} = -q \frac{E_0}{m\omega} \cos\omega t + C_1$$

$$\Rightarrow x = -q \frac{E_0}{m\omega^2} \sin\omega t + C_1 t + C_2$$

C_2 lại là một hằng số tích phân mới. C_1, C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

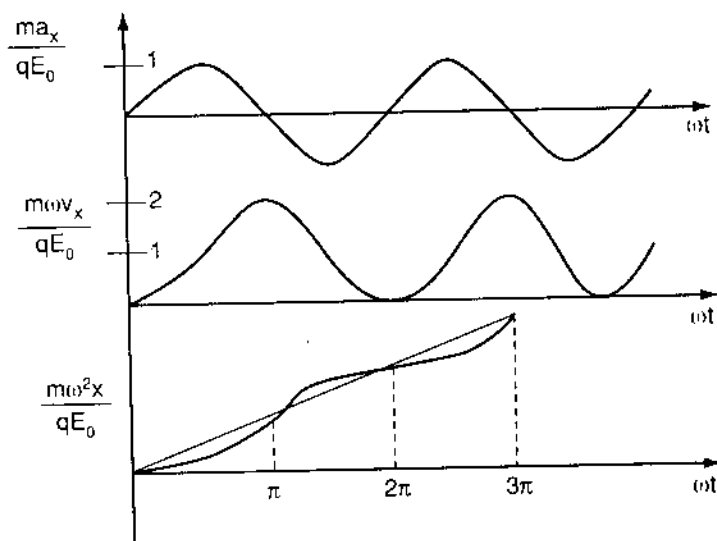
Nếu $\left. \begin{matrix} x = 0 \\ v = 0 \end{matrix} \right\}$ khi $t = 0$ thì $C_1 = \frac{qE_0}{m\omega}$; $C_2 = 0$

Từ đó ta có:

$$v_x(t) = \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos\omega t)$$

$$x(t) = \frac{qE_0}{m\omega} \left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega} \right)$$

Hình 3-4 cho thấy sự phụ thuộc của gia tốc, vận tốc, quãng đường vào thời gian.



Hình 3-4. Sự phụ thuộc của gia tốc, vận tốc, quãng đường của điện tích q vào thời gian.

Thí dụ 3: Chuyển động của hạt trong từ trường không đổi

Ta hãy khảo sát chuyển động của hạt có điện tích q trong từ trường đồng nhất có vectơ cảm ứng từ bằng $\vec{B}$. Phương trình động lực học của Newton mô tả chuyển động của hạt được viết như sau:

$$m\ddot{\vec{r}} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

Chọn $\vec{B} //$ trục z : $\vec{B} = \hat{z}.B$

$$[\vec{v}, \vec{B}]_x = v_y.B ; \quad [\vec{v}, \vec{B}]_y = -v_x.B ; \quad [\vec{v}, \vec{B}]_z = 0.$$

Do đó:

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m} v_y.B ; \quad \dot{v}_y = -\frac{q}{m} v_x.B ; \quad \dot{v}_z = 0$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = \text{const}$$

Ta thấy vận tốc dọc theo trục OZ (dọc theo hướng từ trường) là hằng số.

Động năng của hạt chuyển động trong từ trường cũng là hằng số, thật vậy:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2} m (\vec{v}, \dot{\vec{v}})$$

$$\frac{dK}{dt} = m \frac{q}{m} ([\vec{v}, \vec{B}], \vec{v}) = 0$$

Công thức trên cho thấy $K = \text{const}$, hay từ trường không làm thay đổi động năng của hạt tự do. Xét lời giải cho phương trình của các vận tốc thành phần.

Vì $\ddot{v}_x = \frac{q}{m} \dot{v}_y.B$; $\dot{v}_y = -\frac{q}{m} v_x.B$, nên ta có:

$$\ddot{v}_x + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_x = 0$$

$$\ddot{v}_y + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_y = 0$$

Phương trình này có dạng tương tự phương trình cho dao động điều hoà nên lời giải có thể viết dưới dạng:

$$v_x = v_0 \cdot \sin(\omega_c t + \alpha); \quad v_y = v_0 \cdot \cos(\omega_c t + \alpha); \quad v_z = \text{const}$$

Trong đó: $\omega_c = \frac{qB}{m}$ là tần số Xyclotron. Các hằng số v_0, α được chọn từ điều kiện ban đầu (v_0 bằng độ lớn của thành phần vận tốc ban đầu trên mặt phẳng XOY). Để dàng kiểm tra các nghiệm trên khi lấy đạo hàm theo thời gian:

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c \cdot v_0 \cdot \cos(\omega_c t + \alpha); \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_0 \cdot \sin(\omega_c t + \alpha)$$

$$\begin{cases} \omega_c \cdot v_0 \cdot \cos(\omega_c t + \alpha) = \frac{qB}{m} v_0 \cdot \cos(\omega_c t + \alpha) \\ -\omega_c \cdot v_0 \cdot \sin(\omega_c t + \alpha) = -\frac{qB}{m} v_0 \cdot \sin(\omega_c t + \alpha) \end{cases}$$

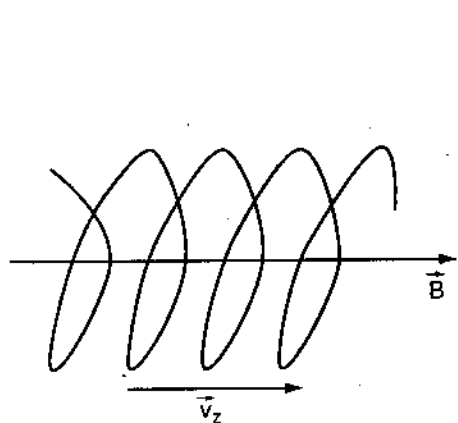
Các phương trình vi phân cho tọa độ x, y, z của điểm tích q có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \sin(\omega_c t + \alpha) ; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \cos(\omega_c t + \alpha) ; \quad \frac{dz}{dt} = v_z = \text{const}$$

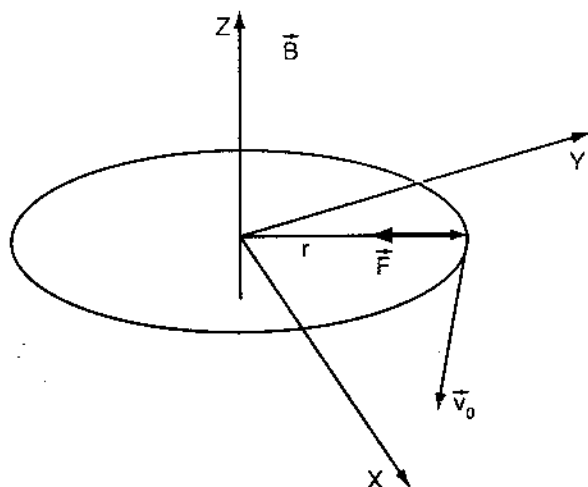
Tích phân các phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \alpha) \\ y = y_0 - \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \alpha) \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

Quỹ đạo là đường xoắn ốc có trục đối xứng là trục OZ song song với hướng từ trường $\vec{B}$ (xem hình 3-5) còn $r = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{qB}$ là bán kính quỹ đạo tròn trong mặt (x, y) (xem hình 3-6).



Hình 3-5. Chuyển động xyclotron của hạt tích điện trong từ trường tĩnh.



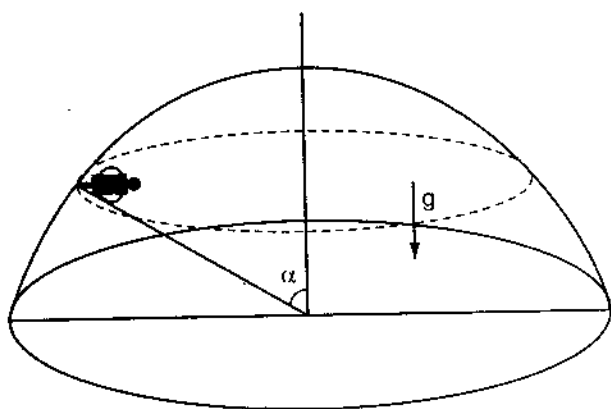
Hình 3-6. Bán kính quỹ đạo tròn trong mặt phẳng XY của chuyển động xyclotron.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Một hạt tích điện rơi vào môi trường có lực cản tác dụng lên điện tích đó. Lực cản này tỷ lệ với vận tốc của điện tích. Hạt đi được một quãng đường $L = 10$ cm cho đến khi dừng lại hoàn toàn. Nếu như trong môi trường có một từ trường vuông góc với phương vận tốc hạt thì với vận tốc ban đầu như cũ hạt sẽ dừng lại sau khi đi được quãng đường $l_1 = 6$ cm kể từ điểm bắt đầu đi vào môi trường. Hỏi hạt sẽ đi được khoảng cách l_2 bao nhiêu kể từ điểm đi vào môi trường cho đến khi dừng lại nếu như cường độ từ trường giảm đi 2 lần.

Trả lời:
$$l_2 = \frac{2l_1}{\left[1 + 3\left(\frac{l_1}{L}\right)^2\right]^{1/2}}$$

3.2. Trong rạp xiếc người ta lái mô tô chuyển động theo mặt cầu bán kính R với quỹ đạo là vòng tròn nằm ngang ở mặt cầu phía trên (xem hình 3-7). Hãy xác định vận tốc tối thiểu của người lái mô tô nếu hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt cầu là μ . Góc giữa đường thẳng đứng và phương nối từ tâm mặt cầu đến người lái mô tô là α . Khi $R = 5$ m, $\mu = 0,5$ hãy tìm vận tốc tối thiểu đó?



Hình 3-7.

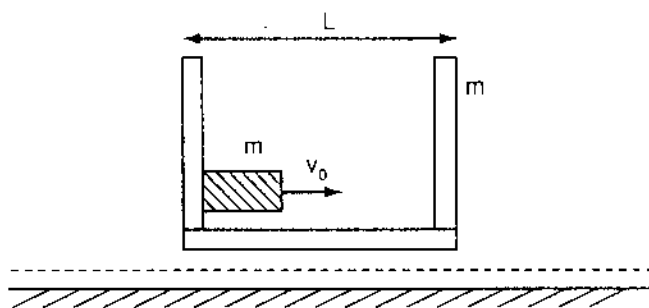
Trả lời: $v = 10$ m/s.

3.3. Dọc theo một thanh mảnh nằm ngang có một khối lượng M trượt không ma sát. Người ta buộc một sợi chỉ không co dãn độ dài L vào vật và kéo sao cho đầu tự do của sợi chỉ có vận tốc v_0 và vectơ vận tốc luôn hướng dọc sợi chỉ. Hỏi phải tác dụng một lực như thế nào vào sợi chỉ ở thời điểm nó tạo một góc α so với thanh nằm ngang? Sợi chỉ luôn nằm trong mặt nằm ngang.

Trả lời:
$$T = Mv_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^4 \alpha}$$

3.4. Một khối lượng m đàn hồi có thể chuyển động không ma sát bên trong một cái hộp vuông cũng có khối lượng như vậy. Cái hộp nằm trên mặt bàn có phủ một lớp mỡ. Lực ma sát của cái hộp vào bàn chỉ phụ thuộc vào vận tốc chuyển động của hộp trên mặt bàn và bằng: $F = -\gamma v$.

Tại thời điểm ban đầu cái hộp đứng yên còn khối lượng m đứng sát thành bên trái của hộp và có vận tốc v_0 hướng sang phải. Khối lượng m đập vào hộp bao nhiêu lần? Nếu độ dài hộp L lớn hơn kích thước của vật khối lượng m rất nhiều (xem hình 3-8)



Hình 3-8.

Trả lời:

$$n = 2 \left\lceil \frac{mv_0}{\gamma L} \right\rceil \text{ (dấu [...] biểu thị phần nguyên).}$$

3.5. Một đoạn chỉ đồng nhất được giữ theo phương thẳng đứng đầu bên dưới chạm mặt nằm ngang. Hãy chỉ ra rằng nếu đầu bên trên được thả ra tại thời điểm bất kỳ nào của sự rơi áp lực của sợi chỉ lên mặt nằm ngang sẽ bằng ba lần trọng lượng phần đoạn chỉ đã nằm trên mặt ngang.

3.6. Ống phóng điện tử được đặt trong từ trường đồng nhất cường độ H và có hướng vuông góc với màn hình. Điện tử bay vào ống phóng điện tử từ súng điện tử với thành phần vận tốc u dọc theo trục ống và thành phần vận tốc v_0 vuông góc với trục ống. Hỏi ống cần có độ dài L là bao nhiêu thì tất cả các điện tử sẽ hội tụ tại một điểm của màn hình?

Trả lời:
$$L = \frac{2\pi m u}{|e| H} n, \text{ } n, \text{ } n \text{ là số nguyên.}$$

Chương 4

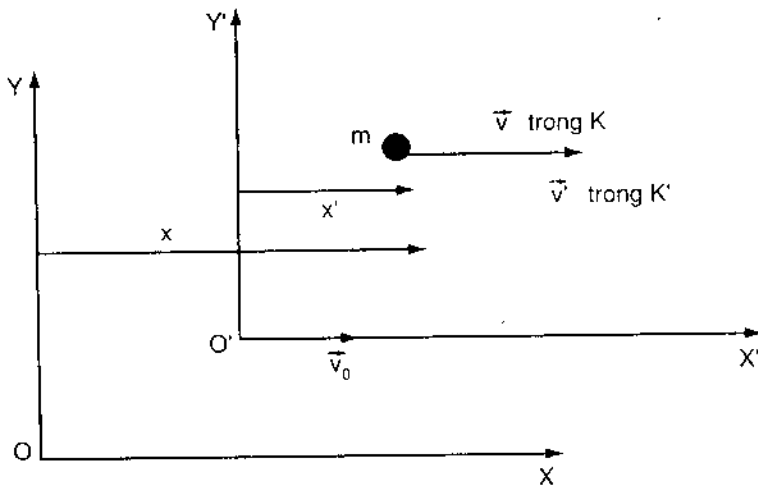
HỆ QUY CHIẾU PHI QUÁN TÍNH, LỰC QUÁN TÍNH

4.1. HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH, PHÉP BIẾN ĐỔI GALILÊ

Hệ quy chiếu quán tính:

Hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu trong đó một vật không chịu tác dụng của ngoại lực sẽ giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Định luật thứ nhất của Newton là đúng cho mọi hệ quy chiếu quán tính.



Hình 4-1. Hệ quy chiếu K' chuyển động đều so với hệ quy chiếu K dọc theo phương OX trùng với phương $O'X'$.

Xét hệ quy chiếu quán tính K có điểm mốc O đứng yên và hệ tọa độ $OXYZ$ được gắn với điểm mốc đó. Hệ quy chiếu quán tính thứ hai K' với hệ tọa độ $O'X'Y'Z'$ chuyển động đều với vận tốc $\vec{v}_0$ dọc theo chiều dương của trục $O'X'$ trùng với trục OX (xem hình 4-1). Các trục OY, OZ là song song với các trục $O'Y', O'Z'$ (trục $OZ, O'Z'$ không được vẽ trên hình 4-1). Giả thiết tại thời điểm ban đầu $t = 0$ chất điểm m có tọa độ $x = 0, x' = 0$ thì tại thời điểm t sau đó tọa độ của nó thỏa mãn hệ thức:

$$x = x_0 + x' \quad (4.1)$$

x_0 là tọa độ x của điểm O' trong hệ K . Ở đây ta giả thiết khoảng thời gian trôi qua kể từ thời điểm ban đầu đo bằng đồng hồ cố định trong hệ K và K' là như nhau trong giới hạn cơ học cổ điển:

$$t = t' \quad (4.2)$$

Giả thiết này đúng khi vận tốc chuyển động tương đối giữa hai hệ K và K', $\vec{v}_0$ nhỏ không đáng kể so với tốc độ ánh sáng còn trường hợp tốc độ đó có thể so sánh được với tốc độ ánh sáng chúng ta sẽ xét trong chương thuyết tương đối hẹp. Dễ thấy $x_0 = v_0 t$ và:

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (\text{biến đổi từ K sang K'}) \quad (4.3)$$

Công thức (4.3) được gọi là phép biến đổi Galilê, nó cho phép ta nhận được toạ độ không thời gian của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính chuyển động K' khi biết các toạ độ đó trong hệ quy chiếu đứng yên K. Phép biến đổi ngược các toạ độ không thời gian từ K' sang K có thể nhận được dễ dàng bằng phép thay trong (4.3) các ký hiệu có dấu phẩy bằng các ký hiệu không có dấu phẩy còn v_0 thay bằng $-v_0$.

Điều này hoàn toàn dễ hiểu vì ta cũng có thể coi hệ quy chiếu K' là đứng yên còn hệ quy chiếu K chuyển động tương đối so với K' với vận tốc $-v_0$.

$$x = x' + v_0 t, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (\text{biến đổi từ K' sang K}) \quad (4.4)$$

Trong phạm vi cơ học cổ điển mà sự chuyển toạ độ giữa các hệ quy chiếu quán tính được thực hiện nhờ phép biến đổi Galilê, không gian có tính chất tương đối còn thời gian có tính tuyệt đối.

Tính tương đối của không gian có thể thấy từ phân tích sau: nếu trong hệ quy chiếu K có hai sự kiện xảy ra tại thời điểm t_1 với toạ độ x_1 và thời điểm t_2 , toạ độ x_2 . Theo (4.3) trong hệ K' hai sự kiện trên sẽ xảy ra tại các thời điểm $t'_1 = t_1$, toạ độ $x'_1 = x_1 - v_0 t_1$ và tại thời điểm $t'_2 = t_2$, toạ độ $x'_2 = x_2 - v_0 t_2$. Như vậy khoảng không gian giữa hai sự kiện ở hệ K' là:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) - v_0(t_2 - t_1) \quad (4.5)$$

Nếu ta gọi khoảng cách giữa hai sự kiện ở hệ K là $l = x_2 - x_1$ thì khoảng cách giữa hai sự kiện ở hệ K' là $l' = x'_2 - x'_1$:

$$l' = l - v_0(t_2 - t_1)$$

$$l' > 0 \text{ nếu } l > v_0(t_2 - t_1)$$

$$l' = 0 \text{ nếu } l = v_0(t_2 - t_1)$$

$$l' < 0 \text{ nếu } l < v_0(t_2 - t_1)$$

Như vậy, khoảng cách giữa hai sự kiện phụ thuộc vào sự lựa chọn hệ quy chiếu, đó là tính chất tương đối của không gian.

Ta có thể lấy một ví dụ đơn giản để mô tả tính chất tương đối của không gian: hai bữa ăn sáng và ăn tối trên một chuyến xe lửa đối với hệ quy chiếu đoàn tàu có thể coi như xảy ra tại cùng một chỗ (buồng ăn của đoàn tàu) nhưng đối với hệ quy chiếu Trái đất thì hai bữa ăn đó xảy ra cách nhau đến hàng trăm kilômét.

Mặt khác cùng theo công thức $t'_1 = t_1$, $t'_2 = t_2$ khoảng thời gian giữa hai sự kiện ở hệ K' là: $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$.

Điều đó có nghĩa là nếu ở hệ K sự kiện thứ nhất xảy ra sớm hơn, muộn hơn hoặc

đồng thời với sự kiện thứ hai, thì ở hệ K' hai sự kiện đó cũng xảy ra hoàn toàn như vậy. Đó là *tính chất tuyệt đối của thời gian*, một trong những tính chất cơ bản của cơ học cổ điển Newton.

* *Sự bất biến của độ dài và khoảng thời gian:*

Nếu một thanh thẳng ở trong hệ K' có tọa độ điểm đầu và điểm cuối là x'_1, y'_1, z'_1 và x'_2, y'_2, z'_2 thì độ dài của thanh đó trong hệ K' là:

$$l = [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]^{1/2}$$

Ở trong hệ K thanh thẳng chuyển động với vận tốc v_0 nên tọa độ các điểm đầu và cuối của nó thay đổi theo thời gian. Mặt khác độ dài của thanh (khoảng cách giữa các điểm đầu và điểm cuối *tại cùng một thời điểm t nào đó*) có thể được xác định theo (4.3):

$$x'_1 = x_1 - v_0 t, \quad x'_2 = x_2 - v_0 t;$$

$$y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_2, \quad z'_1 = z_1, \quad z'_2 = z_2;$$

do đó $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1, y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1, z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$.

Như vậy $l = [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]^{1/2} = l'$ tức là *độ dài của thanh ở hai hệ bằng nhau*, vì vậy ta nói rằng độ dài là bất biến đối với phép biến đổi Galile ($l = \text{inv}$).

Sự bất biến của khoảng thời gian cũng có thể được chứng minh trên cơ sở công thức biến đổi $t' = t$. Nếu tại một điểm nào đó của hệ K' hai sự kiện xảy ra vào thời điểm t'_1 và t'_2 thì khoảng thời gian giữa hai sự kiện đó là $\Delta t = t'_2 - t'_1$. Ở hệ K hai sự kiện ấy theo (4.3) xảy ra tại các thời điểm $t_1 = t'_1, t_2 = t'_2$ và khoảng thời gian giữa chúng là $\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$.

Như vậy *khoảng thời gian cũng bất biến đối với phép biến đổi Galile* ($\Delta t = \text{inv}$).

* *Nguyên lý tương đối Galilê:*

Các định luật Newton được phát biểu như nhau trong các hệ qui chiếu quán tính. Phương trình chuyển động Newton có dạng như nhau trong các hệ qui chiếu quán tính. Vì vậy bằng các thí nghiệm cơ học trong hệ qui chiếu quán tính không thể xác định được là hệ đó đang đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Đây là *nguyên lý tương đối trong cơ học cổ điển hay nguyên lý tương đối Galilê*.

Về mặt toán học nguyên lý đó có thể phát biểu như sau: Các định luật cơ học là bất biến với phép biến đổi Galilê.

4.2. LỰC QUÁN TÍNH TRONG HỆ QUY CHIẾU CHUYỂN ĐỘNG THẲNG CÓ GIA TỐC

Hệ quy chiếu phi quán tính:

Hệ quy chiếu phi quán tính là hệ quy chiếu chuyển động có gia tốc so với hệ quy chiếu quán tính. Các dạng đơn giản nhất của hệ quy chiếu phi quán tính là hệ quy chiếu chuyển động thẳng có gia tốc và hệ quy chiếu chuyển động quay.

Xét chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng mô tả trên hình 4-1. $\vec{a}$, $\vec{v}$ là gia tốc của m và vận tốc của nó trong K (hệ quy chiếu quán tính đứng yên). $\vec{a}'$, $\vec{v}'$ là gia tốc của m và vận tốc của nó trong K' (hệ quy chiếu chuyển động thẳng có gốc O' chuyển động với vận tốc $\vec{v}_0$ và gia tốc $\vec{a}_0$ so với K). Đạo hàm lần lượt hai vế của đẳng thức (4.6) theo thời gian t (coi là đồng nhất như nhau trong cả hai hệ quy chiếu trong giới hạn vật lý cổ điển), ta có:

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{OO}' \quad (4.6)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0 \quad (4.7)$$

Trong (4.7) ta đã nhân khối lượng quán tính m vào hai vế của phương trình với giả thiết rằng khối lượng là một hằng số.

Theo định luật thứ hai của Newton áp dụng trong hệ quy chiếu K , vế trái của (4.7) là tổng các lực thật tác dụng lên vật:

$$\vec{F} = \Sigma \text{ các lực thật} = m\vec{a}$$

Từ đó:

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}' \quad (4.8)$$

Để cho định luật thứ hai của Newton trong hệ quy chiếu không quán tính K' có dạng là: "tổng các lực tác dụng lên vật = khối lượng * gia tốc trong hệ quy chiếu đó" ta biểu thị số hạng thứ hai phía bên trái (4.8) như một loại lực. Lực này được gọi là lực quán tính:

$$- m\vec{a}_0 = \vec{F}_{qt} \quad (4.9)$$

Định luật thứ hai của Newton trong hệ quy chiếu phi quán tính chuyển động thẳng với gia tốc $\vec{a}_0$ so với hệ quy chiếu quán tính có dạng:

$$\vec{F} + \vec{F}_{qt} = m\vec{a}' \quad (4.10)$$

$\vec{F}$ là tổng hợp các lực thật tác dụng lên vật (lực do các vật thật khác tác dụng lên vật đang xét). $\vec{F}_{qt}$ là lực quán tính, lực này tác dụng lên bất kỳ một vật nào có khối lượng trong hệ quy chiếu phi quán tính K' chuyển động có gia tốc $\vec{a}_0$ so với hệ quy chiếu quán tính đứng yên K . Rõ ràng là lực quán tính xuất hiện do tính chất phi quán tính của hệ quy chiếu K' chứ không phải do một vật thật nào khác tác dụng lên các vật trong K' .

Thí dụ 1:

Phải tác dụng vào hệ thống như hình 4-2 theo phương nằm ngang một lực bằng bao nhiêu để m_1 , m_2 không chuyển động so với m ?

Nếu hệ chuyển động theo phương nằm ngang với gia tốc a (trong lúc đó m_1 , m_2 không chuyển động so với m) thì:

$$0 = \vec{T} + \vec{F}_{qt}$$

$$\text{Vi : } T = m_1 a; T = m_2 g$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1} g$$

$$\text{Nên: } F = (m + m_1 + m_2) a \Rightarrow$$

$$F = (m + m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1} g$$

Thí dụ 2:

Có một con lắc được treo trong một toa xe lửa chuyển động với gia tốc $\vec{a}_0$. Người ta thấy dây treo con lắc bị lệch đi một góc cực đại là α . Hãy tìm góc lệch này?

Trong hệ quy chiếu quán tính K ta có phương trình động lực học sau:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Trong đó: $\vec{a}$ là gia tốc của vật khối lượng m trong hệ quy chiếu quán tính đứng yên K.

Trong K' (hệ quy chiếu chuyển động với gia tốc $\vec{a}_0$ so với K) gia tốc của vật khối lượng m là $\vec{a}'$. Theo công thức cộng gia tốc thì :

$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$$

$$m\vec{a}' = -m\vec{a}_0 + \vec{T} + m\vec{g}$$

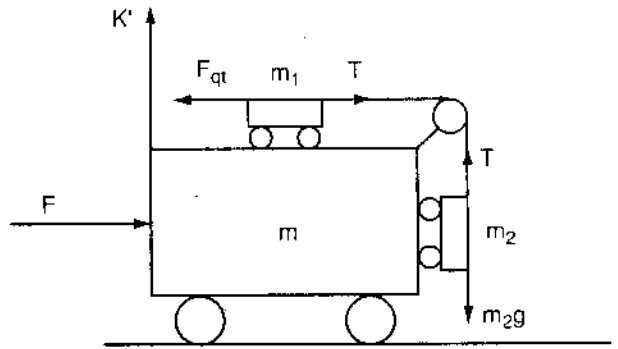
$$= \vec{F}_{qt} + \vec{T} + m\vec{g}$$

Trạng thái lệch xa nhất của khối lượng m có các lực cân bằng nhau, $a' = 0$ và ta có phương trình:

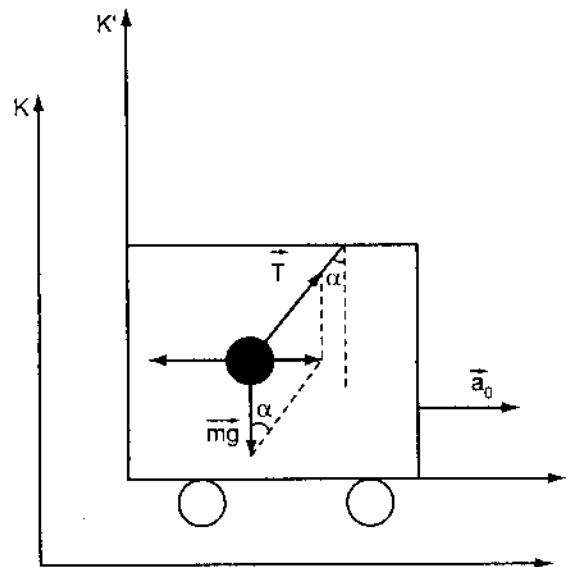
$$0 = \vec{F}_{qt} + \vec{T} + m\vec{g}$$

Từ hình 4-3 dễ dàng suy ra:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g} \Rightarrow a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$$



Hình 4-2. Hai khối lượng m_1, m_2 tiếp xúc mặt vật m và cùng chuyển động với gia tốc a.



Hình 4-3. Dây dọi bị nghiêng một góc α khi toa tàu có gia tốc $\vec{a}_0$.

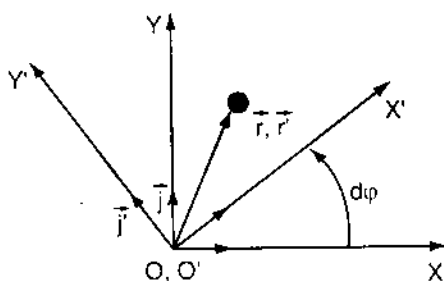
4.3. LỰC QUÁN TÍNH TRONG HỆ QUY CHIẾU CHUYỂN ĐỘNG QUAY

Xét trường hợp hệ quy chiếu K cố định (hình 4-4).

Hệ quy chiếu K' và K có trục OZ, O'Z' trùng nhau. Góc O trùng O'. K' quay với

vận tốc góc ω quanh OZ. Xét sự quay của các trục trong mặt $X'OY'$ (trùng mặt XOY). Các trục OX' , OY' quay được một góc độ so với trục OX , OY sau khoảng thời gian dt . Vị trí chất điểm m được xác định bởi hai bán kính véc tơ bằng nhau $\vec{r} = \vec{r}'$. Dễ thấy rằng:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}' &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \end{aligned} \right\} \vec{r} = \vec{r}' \quad (4.11)$$



Hình 4-4. Hệ quy chiếu K' quay với vận tốc góc ω so với hệ K đứng yên.

Lấy đạo hàm của (4.11) theo thời gian ta được:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.12) là vectơ vận tốc chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính K . Mặt khác:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

Hay:

$$\vec{v} = \vec{v}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} \quad (4.13)$$

vận tốc của chất điểm trong K' được định nghĩa như sau:

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' \quad (4.14)$$

Dễ dàng thấy từ hình 4-5:

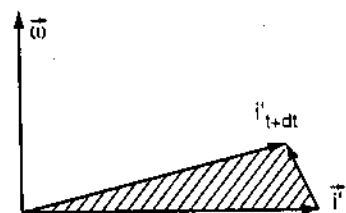
$$\left| \frac{d\vec{i}'}{dt} \right| = 1 \cdot \frac{d\phi}{dt} = \omega$$

Do đó ta có công thức vectơ sau cho đạo hàm theo thời gian của vectơ đơn vị $\vec{i}'$:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'] \quad (4.15)$$

Đặt (4.15) vào (4.13):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + x'[\vec{\omega}, \vec{i}'] + y'[\vec{\omega}, \vec{j}'] \\ \vec{v} &= \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \end{aligned} \quad (4.16)$$



Hình 4-5. Sự quay của vectơ đơn vị $\vec{i}'$ trong K'

(4.16) là vận tốc của chất điểm m trong hệ quy chiếu đứng yên K . Gia tốc của chất điểm đó trong K được xác định bởi:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$

Đạo hàm (4.13) theo t và đặt:

$$\vec{a} = \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' = a_x' \vec{i}' + a_y' \vec{j}'$$

vào phương trình đó, ta được:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] \quad (4.17)$$

Sử dụng khai triển cho tích véctor kép trong (4.17):

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}') - \vec{r}'\omega^2$$

và chú ý rằng $(\vec{\omega}, \vec{r}') = 0$, nên :

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \vec{r}'\omega^2 \quad (4.18)$$

Nhân m vào hai vế của (4.18) ta được biểu thức cho lực tác dụng lên khối lượng m :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] - m\vec{r}'\omega^2$$

Từ đó suy ra:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] + m\vec{r}'\omega^2 \quad (4.19)$$

Trong (4.19) $\vec{F}$ là tổng các lực thật tác dụng lên vật, số hạng thứ hai được gọi là lực quán tính Coriolis, số hạng thứ ba là lực quán tính ly tâm.

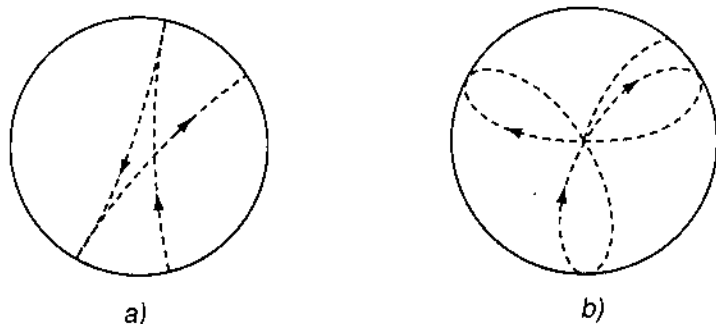
$$\vec{F}_C = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] \quad (4.20)$$

Chú ý rằng lực Coriolis vuông góc với vận tốc chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu phi quán tính và vận tốc góc $\vec{F}_C \perp \vec{v}'$, $\vec{F}_C \perp \vec{\omega}$ nên lực đó không sinh công.

Con lắc Fucô:

Thí nghiệm "con lắc Fucô" do Fucô thực hiện lần đầu tiên năm 1851 tại Paris để chứng minh sự quay của Trái đất. Thiết bị của ông gồm một quả nặng 28 kg treo ở đầu một sợi dây dài gần 70 m. Đầu trên của sợi dây được buộc sao cho con lắc có thể dao động tự do theo một phương bất kỳ. Chu kỳ dao động của con lắc kéo dài đến gần 17 giây. Theo dõi sự dao động của con lắc trong một khoảng thời gian dài người ta nhận thấy mặt phẳng dao động của con lắc quay theo chiều kim đồng hồ. Trong thí nghiệm Fucô thực hiện tại Paris, mỗi giờ mặt phẳng dao động con lắc quay quanh trục OD được một góc hơn 11° và quay được một vòng sau 32 giờ.

Giả sử thí nghiệm Fucô được tiến hành tại điểm có vĩ độ φ . Ta chọn hệ toạ độ OXYZ có trục OZ trùng với trục quay của Trái đất, hai trục OX, OY hướng tới hai ngôi sao cố định. Nếu không chú ý tới chuyển động quay của Trái đất xung quanh Mặt trời thì hệ quy chiếu này là hệ quy chiếu quán tính (trên hình 4-6 ta không vẽ trục OY). Hệ quy chiếu quay O'X'Y'Z' được gắn vào quả đất (hệ không quán tính) và



Hình 4-7. Quỹ đạo của con lắc Fucô khác nhau tùy thuộc vào trạng thái ban đầu.

Hình 4-7a, b cho thấy hai quỹ đạo khác nhau: trường hợp thứ nhất nếu vật nặng được đưa ra khỏi vị trí cân bằng và buông ra với vận tốc ban đầu bằng không, khi chuyển động, nó bị lực Coriolis làm lệch về bên phải và do đó sẽ không đi qua điểm cân bằng. Trường hợp thứ hai (hình 4-7b): nếu ta truyền cho con lắc một vận tốc ban đầu từ điểm cân bằng, lực Coriolis làm nó đi lệch về bên phải, ở vị trí lệch cực đại, vận tốc dọc theo bán kính bằng không, quỹ đạo của con lắc tiếp xúc với vòng tròn tâm là điểm cân bằng và bán kính là độ lệch cực đại của con lắc. Trong trường hợp này quỹ đạo đi qua điểm cân bằng.

*** Sự phụ thuộc của trọng lực vào vĩ độ:**

Xét hình 4-8, lực quán tính tác dụng lên vật ở vĩ độ φ là:

$$|\vec{F}_q| = m\omega_0^2 r$$

$$F_q = m\omega_0^2 R \cos\varphi$$

$$P_\varphi^2 = P^2 + F_q^2 - 2PF_q \cos^2\varphi$$

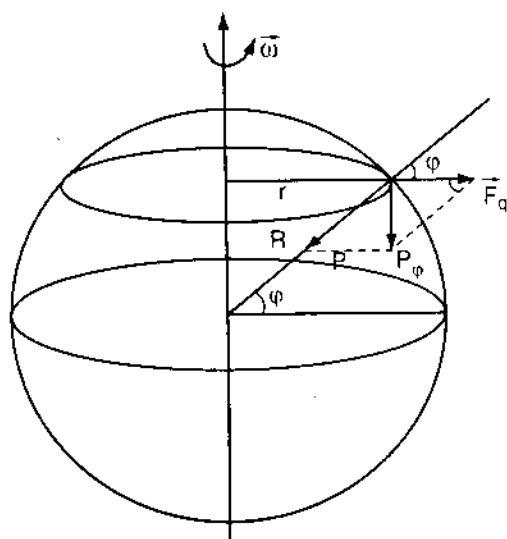
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$P_\varphi = mg \sqrt{1 - 2 \frac{\omega_0^2 R}{g} \cos^2\varphi}$$

$$P_\varphi \approx mg \left(1 - \frac{\omega_0^2 R}{g} \cos^2\varphi \right) = mg \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2\varphi \right)$$

Tại xích đạo $\varphi = 0$ độ giảm trọng lượng lớn nhất:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\omega_0^2 R}{g} = \frac{0,73^2 \cdot 10^{-8} \cdot 6400 \cdot 10^3}{10} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \approx 0,3\%$$

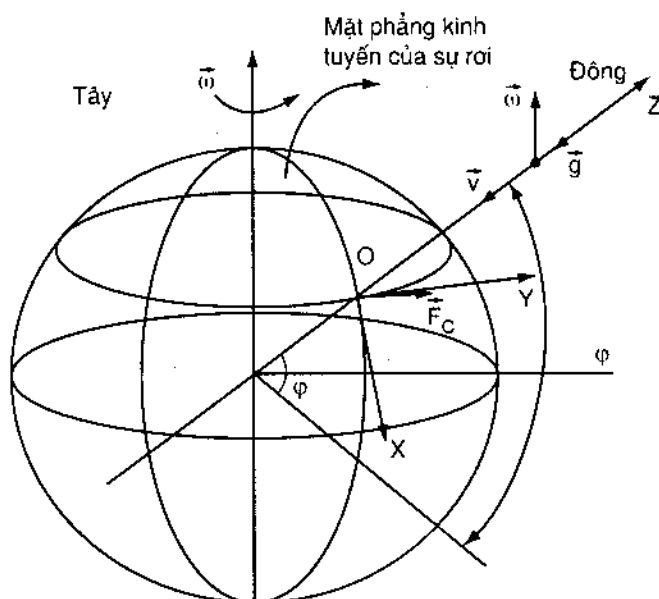


Hình 4-8. Lực quán tính tác dụng lên vật ở vĩ độ φ .

*** Sự lệch về phía đông của vật rơi tự do:**

Xét vật rơi dọc trục OZ với vận tốc ban đầu bằng không, độ cao ban đầu của vật so với mặt đất là h (hình 4-9). Lực tác dụng lên vật trong hệ quy chiếu phi quán tính quả đất quay là:

$$\vec{F} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}] + m\omega^2 \vec{r}$$



Hình 4-9. Sự rơi lệch về hướng Đông ở vĩ độ φ .

Lực quán tính ly tâm tỷ lệ với khoảng cách từ vật rơi tới trục quay. Vì vật rơi ở độ cao h không lớn, lực này quá nhỏ hầu như không đổi trong suốt quá trình rơi. Ảnh hưởng chủ yếu lên sự rơi của vật ngoài trọng lực là lực Coriolis. Gia tốc Coriolis và vận tốc của vật có dạng:

$$\vec{a}_C = -2[\vec{\omega}, \vec{v}]; \quad \vec{v} = \vec{g}t$$

Vì lực Coriolis $\vec{F}_C$ vuông góc mặt kinh tuyến của sự rơi, nên vật rơi lệch sang phía đông (phía trục Oy):

$$a_C = 2\omega g t \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = 2\omega g t \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$a_C = 2\omega g t \cos\varphi$$

a_C hướng dọc theo OY về phía đông.

Phương trình chuyển động của vật dọc theo trục OY và OZ trở thành:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega g t \cos\varphi \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = -m.g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \omega g \cdot \frac{t^3}{3} \cos\varphi \\ z = h - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Vật không rơi vào góc tọa độ O mà lệch về phía đông một khoảng L. Khi vật tới mặt đất thì:

$$z = 0; t = T \text{ (thời gian rơi)}$$

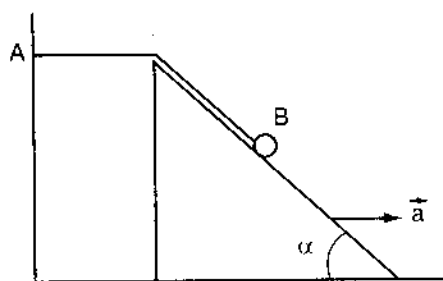
$$L = \frac{\omega \cdot g \cdot \cos \varphi}{3} T^3; \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$L = \frac{2}{3} \omega \cdot h \cdot \cos \varphi \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Biểu thức cuối cùng cho phép ta đánh giá độ lệch sang phía đông của vật rơi tự do gần bề mặt trái đất từ độ cao h. Nếu $h = 160 \text{ m}$; $\varphi = 45^\circ$; $\cos \varphi = 0,7$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $\omega = 1/14000$, thì $L = 3 \text{ cm}$, thực nghiệm đã xác nhận kết quả này.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1. Trên một cái nêm có thiết diện ngang là một tam giác tạo thành một góc α so với phương ngang có một vật nhỏ được nối với một sợi dây chỉ không co dãn tại điểm B. Đầu kia của sợi chỉ được gắn chặt vào bờ tường tại điểm A (xem hình 4-10). Ở một thời điểm nào đó cái nêm bắt đầu chuyển động với gia tốc không đổi a sang phải. Hãy xác định gia tốc của vật nhỏ trong lúc nó còn đứng trên mặt cái nêm.



Hình 4-10.

Trả lời: $a_B = 2a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $\vec{a}_B$ tạo góc $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$ so với phương ngang.

4.2. Một ống độ dài l quay với vận tốc góc ω xung quanh trục thẳng đứng đi qua điểm giữa ống và vuông góc với trục ống. Nhiệt độ của không khí là T . Coi rằng áp suất trong ống ở gần hai đầu hở bằng áp suất khí quyển P_0 . Hãy xác định áp suất không khí ở giữa ống.

Trả lời: $P = P_0 \exp \left\{ -\frac{\mu \omega^2}{8RT} \right\}$.

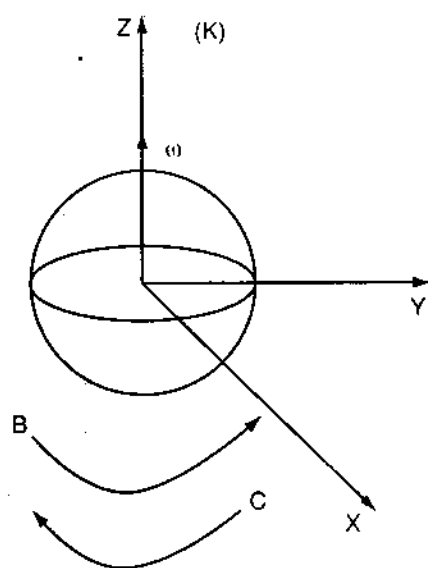
4.3. Cho rằng Trái đất là một quả cầu đồng nhất hoàn toàn bị nước phủ kín với khối lượng riêng của nước là $\rho = 1\text{g/cm}^3$. Khi Trái đất quay mặt nước có dạng elipsoid tròn xoay phình ra ở xích đạo. Hãy đánh giá độ chênh lệch mực nước ở cực và xích đạo nếu giả thiết mặt biển là mặt đẳng thế năng (mặt có thế năng không đổi). Lực hấp dẫn của các phần tử nước với nhau có thể bỏ qua.

Trả lời: $\frac{D_{\text{xd}} - D_c}{R} = \frac{\omega^2 R}{2g} = \frac{1}{298}$. Ở đây D_{xd} , D_c là mực nước biển ở xích đạo và

ở cực tính từ bề mặt trái đất (trái đất được coi là quả cầu đồng nhất bán kính R) còn ω là vận tốc góc của sự quay trái đất.

Gợi ý: Ở khoảng cách r tính từ tâm trái đất một phần tử nước khối lượng m chịu tác dụng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm $F(r) = -\frac{GMm}{r^2} + \omega^2 r$. Lực tổng cộng đó có thể coi là lực của trường thế với hàm thế năng $U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Coi mặt nước biển là mặt đẳng thế năng, lập biểu thức cho thế năng tại $R + D_{\text{xd}}$ và $R + D_c$ ta sẽ nhận được kết quả trên.

4.4 Ba đồng hồ quả lắc giống hệt nhau A, B, C đầu tiên được đặt trên một sân bay ở xích đạo trái đất. Đồng hồ A đặt trên sân bay, đồng hồ B đặt trên máy bay B, đồng hồ C đặt trên máy bay C. Khoảng giữa trưa 1 ngày nào đó 3 đồng hồ cùng chỉ một thời điểm như nhau. Máy bay B cất cánh bay quanh trái đất dọc theo xích đạo với vận tốc không đổi so với Trái đất theo hướng từ tây sang đông. Máy bay C cũng cất cánh cùng lúc và cũng bay xung quanh trái đất dọc theo xích đạo với vận tốc không đổi so với trái đất nhưng theo hướng từ đông sang tây. Cả hai máy bay đều trở về sân bay trong ngày hôm sau ở cùng một thời điểm như lúc xuất phát (cả hai có vận tốc so với mặt đất là như nhau). Đồng hồ A trên sân bay chỉ thời điểm cho thấy chính xác 24 giờ đã trôi qua. Hỏi đồng hồ B, C chạy nhanh hay chậm hơn đồng hồ A và nhanh chậm hơn bao nhiêu nếu bán kính trái đất lấy là $R = 6000\text{ km}$? (hình 4-11).



Hình 4-11.

Trả lời: Đồng hồ C chạy nhanh hơn đồng hồ A là 140 s.

Còn đồng hồ B chạy chậm hơn đồng hồ A là 420 s.

Chương 5

CÔNG VÀ NĂNG LƯỢNG

Năng lượng là thước đo lượng chuyển động của vật chất dưới mọi hình thức. Chuyển động của vật chất (trong một nghĩa rộng hơn là vận động) là vĩnh cửu và có nhiều hình thức phong phú. Chuyển động cơ học chỉ là một dạng vận động khi vật thay đổi vị trí của mình trong không gian và năng lượng tương ứng với chuyển động đó được gọi là năng lượng cơ học. Chuyển động nhiệt là một hình thức khác và dạng năng lượng tương ứng là năng lượng nhiệt. Ngoài ra có các loại năng lượng khác: năng lượng điện từ, năng lượng hạt nhân, năng lượng liên kết hoá học... đó là các dạng năng lượng đặc thù ứng với các dạng vận động cụ thể của vật chất.

5.1. CÔNG VÀ CÔNG SUẤT

5.1.1. CÔNG

Công là đại lượng vật lý dùng để đo mức độ biến thiên của năng lượng. Xét trường hợp chất điểm chuyển động dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Công của lực $\vec{F}$ thực hiện được khi gây ra một dịch chuyển bé $d\vec{r}$, được định nghĩa như:

$$\begin{aligned}dA &= (\vec{F}, d\vec{r}) \\dA &= F dr \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{r}}) \\dA &= F_r dr\end{aligned}\tag{5.1}$$

Trong đó: F_r là hình chiếu của $\vec{F}$ lên hướng của vectơ $d\vec{r}$.

Ta biểu thị A_{12} là công của lực $\vec{F}$ thực hiện khi nó tác dụng lên một chất điểm và làm chất điểm đó dịch chuyển từ điểm 1 đến điểm 2. Hai điểm đó được xác định bởi các vectơ bán kính $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$. Công A_{12} được tính bằng tích phân sau:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{(1)}^{(2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)\tag{5.2}$$

Trong đó: F_x, F_y, F_z là các thành phần của lực $\vec{F}$ trong hệ toạ độ Đềcác OXYZ. Chúng là hàm của các biến x, y, z chỉ vị trí chất điểm.

Công có đơn vị là Jun (J) trong hệ đơn vị quốc tế SI.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

Thứ nguyên của công là:

$$[A] = [F] \cdot [r] = ML^2T^{-2}.$$

5.1.2. CÔNG SUẤT

Để thực hiện cùng một công, ta có thể dùng các máy sinh lực khác nhau. Các máy đó có thể thực hiện cùng một công đó sau những khoảng thời gian khác nhau. Để đặc trưng cho việc thực hiện công nhanh hay chậm ta dùng đại lượng công suất trung bình và công suất tức thời. Công suất trung bình P_{tb} được đo bằng tỉ số giữa công thực hiện được ΔA và khoảng thời gian cần thiết để thực hiện công đó Δt :

$$P_{tb} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (5.3)$$

Khi khoảng thời gian Δt vô cùng bé trong giới hạn Δt tiến tới 0 ta có công suất tức thời P :

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad (5.4)$$

vì $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$ nên

$$P = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (5.5)$$

Dựa trên định nghĩa $P = \frac{dA}{dt}$ và dA là thước đo độ biến đổi năng lượng trong khoảng thời gian dt thì ta có thể coi công suất là vận tốc biến đổi năng lượng.

Thí dụ 1:

Công của lực đàn hồi của lò xo khi lò xo bị biến dạng.

Nếu ta kéo điểm cuối của lò xo rất chậm dọc theo chiều dài của nó bằng một ngoại lực thì trong lò xo xuất hiện một lực đàn hồi cân bằng với ngoại lực. Nếu độ biến dạng là nhỏ (trong giới hạn đàn hồi) thì theo định luật Hooke lực đàn hồi có giá trị tỉ lệ với độ biến dạng của lò xo x :

$$\vec{F}_{dh} = -k \cdot \vec{x} \quad (5.6)$$

Trong đó: k là độ cứng của lò xo (hệ số đàn hồi). Dấu trừ trong (5.6) xuất hiện do vectơ dịch chuyển $\vec{x}$ của điểm cuối lò xo ngược chiều với $\vec{F}_{dh}$ (điểm $x = 0$, ứng với trạng thái tự do của lò xo). Công thành phần của lực đàn hồi là:

$$dA = (\vec{F}_{dh}, d\vec{x}) \quad (5.7)$$

Lấy tích phân biểu thức trên ta được công mà lực đàn hồi thực hiện được khi điểm cuối lò xo bị dịch chuyển từ điểm x_1 đến x_2 :

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \quad (5.8)$$

Từ (5.8) ta thấy khi lò xo bị kéo dãn, lực đàn hồi thực hiện công âm (do $x_1 < x_2$).

Nếu lò xo bị kéo dãn một khoảng x rồi được thả tự do, nó sẽ co lại và lực đàn hồi thực hiện công dương:

$$A = - \int_x^0 k \cdot x \cdot dx = \frac{kx^2}{2}$$

5.2. ĐỘNG NĂNG, ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

Công thực hiện bởi lực $\vec{F}$ lên chất điểm khối lượng m còn có thể biểu thị qua độ biến thiên của một dạng năng lượng của chuyển động cơ học gọi là động năng. Từ phương trình động lực học thứ hai của Newton ta có:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Mặt khác theo định nghĩa, công thực hiện bởi lực $\vec{F}$ khi lực đó làm chất điểm dịch chuyển đi một khoảng vô cùng bé $d\vec{r}$ là $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$. Ta có thể viết như sau:

$$dA = m \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = m(d\vec{v}, \vec{v}) \Rightarrow dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Đại lượng :

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad (5.9)$$

được gọi là động năng của chất điểm đang chuyển động với vận tốc v . Động năng là đại lượng có giá trị không âm, $K \geq 0$. Nếu dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ chất điểm chuyển động từ vị trí $\vec{r}_1$ đến $\vec{r}_2$ đi được một quãng đường hữu hạn thì công thực hiện bởi lực $\vec{F}$ là:

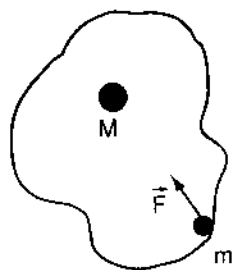
$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{r_1}^{r_2} dK$$

$$A_{12} = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (5.10)$$

Trong đó: v_2 là vận tốc của chất điểm tại vị trí r_2 , v_1 là vận tốc của chất điểm tại vị trí r_1 . *Biểu thức cuối cùng chính là nội dung của định lý động năng: độ tăng động năng của chất điểm trong một khoảng thời gian bằng công của lực đặt vào chất điểm trong khoảng thời gian đó.*

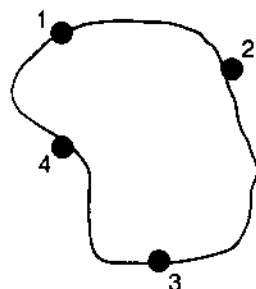
5.3. THẾ NĂNG

Thế năng là dạng năng lượng cơ học phụ thuộc vào cấu hình hình học của các vật tương tác. Các vật tương tác với nhau có thể do va chạm trực tiếp hoặc thông qua trường lực. Trường lực của vật M là khoảng không gian xung quanh vật M trong đó có lực do vật M sinh ra tác dụng vào bất kỳ vật m nào khác được nhúng vào không gian đó (hình 5-1).



Hình 5-1. Vật thử m trong trường lực của vật M .

Trường lực là đồng nhất (hay còn gọi là trường đều) nếu lực $\vec{F}$ không phụ thuộc vào vị trí. Trường lực gọi là dừng nếu $\vec{F}$ không phụ thuộc thời gian (gọi tắt là trường lực dừng). Nếu trường lực dừng có công của lực thực hiện lên chất điểm chỉ phụ thuộc vào vị trí của điểm đầu và điểm cuối mà không phụ thuộc vào hình dạng đường dịch chuyển thì trường lực đó gọi là *trường thế* và *lực của trường đó gọi là lực thế*. Điều đó cũng có nghĩa là công thực hiện bởi lực trường thế trên quãng đường khép kín là bằng 0. Cụ thể hơn, nếu vật dịch chuyển trong trường thế đi được một quãng đường khép kín 12341 (xem hình 5-2) thì:



Hình 5-2. Quãng đường khép kín của vật chuyển động trong trường thế.

$$A_{12341} = 0 \quad (5.11)$$

Công thực hiện trên toàn bộ quãng đường là tổng các công thành phần:

$$A_{12341} = A_{123} + A_{341} = 0$$

Do đó:

$$A_{123} = -A_{341}$$

Lực trường thế còn gọi là lực bảo toàn (conservative force). Hai trường hợp trường thế quan trọng là trường hấp dẫn và trường lực đàn hồi. Ta xét lần lượt các trường hợp đó:

1. Trường hấp dẫn

Ta xét một trường lực hấp dẫn quen thuộc, đó là trường lực hấp dẫn của Trái đất hay còn được gọi là trường trọng lực. Gần bề mặt Trái đất trường trọng lực có thể coi là đồng nhất.

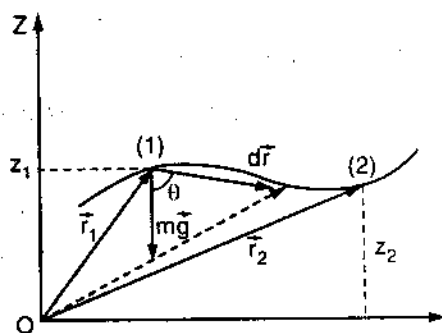
Ta chọn chiều dương trục OZ của hệ tọa độ Descartes hướng theo phương thẳng đứng lên trên thì trọng lực có các thành phần là (hình 5-3):

$$\vec{F}(0,0,F_z) = \vec{F}(0,0,-mg) \quad (5.12)$$

Công mà trọng lực thực hiện được khi chất điểm dịch chuyển trong trường từ điểm 1 (độ cao z_1) đến điểm 2 (độ cao z_2) là:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{r}) = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$A_{12} = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) \quad (5.13)$$



Hình 5-3. Vật chuyển động trong trường hấp dẫn từ điểm (1) đến điểm (2).

Nếu vật dịch chuyển tiếp theo một đường cong nào đó từ điểm 2 về điểm 1 trở về vị trí ban đầu. Để thấy rằng:

$$A_{21} = mg(z_2 - z_1) \quad (5.14)$$

Công mà trọng lực thực hiện khi chất điểm chuyển động toàn bộ theo quỹ đạo khép kín trở về vị trí ban đầu theo (5.13), (5.14) là:

$$A_{12} + A_{21} = 0$$

Do đó trường trọng lực là trường thế.

2. Trường lực đàn hồi

Xét một lò xo đàn hồi được đặt trên mặt nằm ngang dọc theo trục Ox nêu trong thí dụ 1. Công của lực đàn hồi thực hiện được khi lò xo bị biến dạng và đầu tự do của lò xo bị dịch chuyển từ điểm x_1 đến điểm x_2 , theo (5.8) là:

$$A_{12} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \quad (5.15)$$

Rõ ràng là công này chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối của dịch chuyển và ta cũng thấy ngay khi đầu tự do của lò xo từ vị trí x_2 trở về trạng thái ban đầu x_1 thì công của lực đàn hồi thực hiện được là:

$$A_{21} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = -A_{12}$$

Do đó công do lực đàn hồi thực hiện trên quãng đường khép kín $x_1x_2x_1$ bằng 0.

$$A_{1221} = A_{12} + A_{21} = 0$$

Trường lực đàn hồi là trường thế.

* Thế năng trong trường thế:

Trong trường hợp trường thế, công của lực chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối thì mỗi điểm của trường có thể đặc trưng bởi giá trị của một hàm $U(x, y, z)$ sao cho hiệu giá trị của hàm đó tại các điểm 1 và 2 bằng công của lực thế dịch chuyển chất điểm từ điểm 1 đến điểm 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2 \quad (5.16)$$

$$U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$$

$$U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$$

Hàm U có thứ nguyên năng lượng và phụ thuộc vào vị trí được gọi là hàm thế năng. Hàm đó phụ thuộc vị trí của chất điểm tương đối với vật nguồn sinh ra trường lực, do đó thế năng là dạng năng lượng phụ thuộc cấu hình của các vật tương tác.

Mức tính thế năng có thể chọn tùy ý. Thật vậy, ta có thể chọn một hàm thế năng U' khác, $U' = U + C$, trong đó C là một hằng số thì:

$$A_{12} = U_1' - U_2' = U_1 - U_2$$

Công thực hiện bởi lực thế không có gì thay đổi.

Biểu thức $A_{12} = U_1 - U_2$ thường được phát biểu như công của lực thế dịch chuyển chất điểm từ điểm 1 đến điểm 2 bằng độ giảm thế năng của chất điểm trong dịch chuyển đó. Công của lực thế thực hiện được khi chất điểm có dịch chuyển vô cùng bé được viết trong dạng vi phân:

$$dA = -dU = (\vec{F}, d\vec{r})$$

Biết dạng của $U(x, y, z)$ ta có thể suy ra biểu thức của lực thế F . Sử dụng biểu thức cho vi phân của công và vi phân toàn phần của hàm đa biến $U(x, y, z)$ ta có:

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \\ -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \\ -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad \text{hay} \quad \vec{F} = -\nabla U \quad (5.18)$$

Mặt xác định trong không gian bởi điều kiện

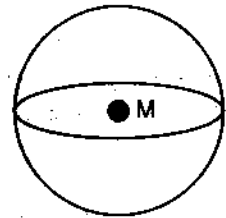
$$U(x, y, z) = C \quad (C \text{ là hằng số}) \quad (5.19a)$$

gọi là mặt đẳng thế. Khi vật dịch chuyển trên mặt đẳng thế năng thì công của lực thế bằng không. Điều đó có thể thấy từ (5.19a) nếu lấy vi phân hai vế thì:

$$A = \Delta U = 0 \quad (5.19b)$$

Hình 5-4 minh họa trường hợp trường lực hấp dẫn có mặt đẳng thế là mặt cầu vì mọi điểm cách tâm trường lực một khoảng r có thế năng như nhau:

$$U = \frac{GMm}{r}$$



Hình 5-4. Trường lực hấp dẫn có mặt đẳng thế là mặt cầu.

5.4. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

5.4.1. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG CHO CHẤT ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG TRONG TRƯỜNG THẾ

Xét chất điểm chuyển động trong trường thế từ điểm 1 đến điểm 2, theo (5.16) công mà lực thế thực hiện được là:

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Mặt khác theo định lý động năng (5.10), độ tăng động năng của chất điểm khi chất điểm dịch chuyển từ điểm 1 đến điểm 2 dưới tác dụng của lực thế bằng công của lực thế tác dụng lên nó:

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

Từ đó, ta có:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = E$$

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + U(x,y,z) = \text{const} \quad (5.20)$$

Hàm E là tổng động năng và thế năng của chất điểm và được gọi là cơ năng của nó. Dựa trên (5.20) ta có định luật bảo toàn cơ năng của chất điểm chuyển động trong trường thế: *Cơ năng của chất điểm chuyển động trong trường thế được bảo toàn.*

Ta có thể phát biểu định luật (5.20) dưới dạng khác thể hiện sự chuyển hoá giữa động năng và thế năng của cơ năng chất điểm. Lấy vi phân (5.20) ta được:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \quad (5.21)$$

(5.21) có nghĩa là khi chất điểm chuyển động trong trường thế độ tăng động năng bằng độ giảm thế năng của nó.

5.4.2. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG CHO HỆ VẬT LÝ CÔ LẬP (HỆ KÍN)

Bây giờ ta xét một hệ vật lý gồm một số vật. Hệ là cô lập không tương tác với các vật khác ngoài hệ (hệ còn được gọi là hệ kín, xem hình 5-5). Khi các phần tử của hệ cô lập này chuyển động, trong hệ có thể có ma sát và có thể có sự chuyển đổi từ năng lượng cơ học sang năng lượng nhiệt làm các vật nóng lên. Nói một cách khác là có sự chuyển đổi hình thức năng lượng bên trong hệ. Khi đó định luật bảo toàn năng lượng được viết như sau:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

E_{int} – năng lượng bên trong (hay nội năng) của hệ vật. Nội năng của vật gồm động năng chuyển động và thế năng tương tác của các hạt bên trong vật.

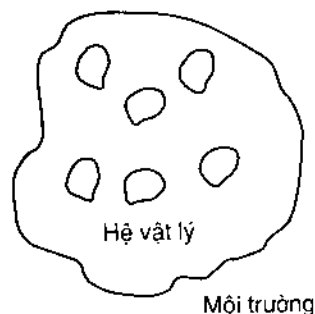
$$E_{\text{int}}^{\text{vật}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + U_{\text{hạt bên trong vật}}$$

Ngoài ra có thể có sự chuyển đổi năng lượng cơ học thành các dạng năng lượng khác (năng lượng hoá học, năng lượng điện từ...) khi đó biểu thức tổng quát cho định luật bảo toàn năng lượng sẽ là:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} + \{\text{độ biến thiên của các dạng năng lượng khác}\} = 0 \quad (5.22)$$

Định luật bảo toàn năng lượng cho hệ vật lý cô lập được phát biểu như sau:

Trong một hệ cô lập năng lượng có thể chuyển đổi từ dạng này sang dạng khác nhưng năng lượng toàn phần của hệ thì không đổi.



Hình 5-5. Hệ vật lý cô lập với môi trường xung quanh nó.

5.4.3. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

Bây giờ ta xét hệ vật lý đứng trong môi trường (xem hình 5-6). Nếu có các lực mà các vật của môi trường tác dụng xuyên qua biên giới hệ (ngoại lực) và thực hiện công trên các vật trong hệ thì hệ không phải là cô lập nữa. Công của ngoại lực sẽ bằng đúng độ biến thiên năng lượng của hệ và phương trình (5.21) được viết lại là:

$$A_{\text{ngoại lực}} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} + \{\text{độ biến thiên của các dạng năng lượng khác}\} \quad (5.23)$$

(5.23) có nghĩa là nếu ngoại lực thực hiện lên hệ một công $A_{\text{ngoại lực}}$ thì năng lượng tổng cộng trong hệ dưới mọi dạng sẽ tăng một lượng đúng bằng công $A_{\text{ngoại lực}}$. Hoàn toàn có thể xảy ra trường hợp ngược lại khi mà hệ tác dụng các lực xuyên qua biên giới thực hiện công lên các vật của môi trường và năng lượng của hệ giảm đi một cách tương ứng. Khi đó công A là âm ứng với sự giảm năng lượng của hệ. Do đó để tổng quát ta có thể bỏ ký hiệu "ngoại lực" đi và viết:

$$A = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} + \{\text{độ biến thiên của các dạng năng lượng khác}\} \quad (5.24)$$

Trong (5.24) ta cần hiểu rằng khi $A > 0$ ngoại lực của môi trường thực hiện công lên hệ. Còn nếu $A < 0$ hệ thực hiện công lên môi trường. (5.24) có thể coi là một cách phát biểu về định luật bảo toàn năng lượng dạng tổng quát: *năng lượng không tự nhiên sinh ra mà cũng không tự nhiên mất đi, nó chỉ biến đổi từ dạng này sang dạng khác hoặc truyền từ vật này sang vật khác.*

5.5. SỬ DỤNG ĐƯỜNG CONG THỂ NĂNG, GIỚI HẠN CỦA CHUYỂN ĐỘNG

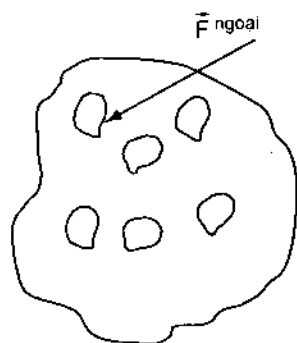
Ta có thể sử dụng đường cong thế năng để khảo sát chuyển động của hạt. Phương pháp này trực quan và giúp chúng ta phân tích chuyển động của hạt một cách tổng thể.

5.5.1. CHUYỂN ĐỘNG DAO ĐỘNG CỦA HẠT TRONG KHÔNG GIAN HẠN CHẾ

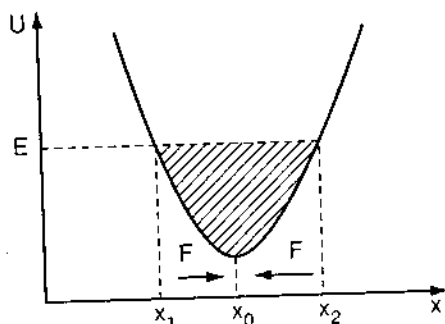
Trước tiên ta xét chuyển động của hạt trong trường thế một chiều (thế năng chỉ là hàm của biến x). Hàm thế năng có một cực tiểu và năng lượng cơ học E được bảo toàn và là một hằng số dương cắt đường cong thế năng tại điểm x_1, x_2 (xem hình 5-7):

$$E = K + U$$

Chuyển động của hạt chỉ có thể xảy ra trong vùng không gian hạn chế $x_1 \leq x \leq x_2$ mà ở đó $U \leq E$, còn lực thế phụ thuộc tọa độ hạt và bằng:



Hình 5-6. Hệ vật lý mở chịu tác dụng của ngoại lực.



Hình 5-7. Hạt trong hố thế 1 chiều.

$$F = - \frac{dU}{dx} \quad (5.25)$$

Lực có hướng như trên hình vẽ và luôn có xu thế kéo hạt về vị trí cân bằng x_0 - vị trí có thế năng nhỏ nhất. Chuyển động của hạt là chuyển động tuần hoàn có chu kỳ bằng hai lần khoảng thời gian chuyển động từ x_1 đến x_2 . Thí dụ điển hình của trường hợp này là dao động điều hoà với hàm thế dạng parabol $kx^2/2$.

5.5.2. TRƯỜNG HỢP THỨ HAI: ĐƯỜNG CONG THỂ NĂNG MỘT CHIỀU CÓ CẢ CỰC TIỂU LẦN CỰC ĐẠI (xem hình 5-8)

Đường đẳng năng lượng $E = \text{const}$ cắt đường cong thế năng tại ba điểm x_1, x_2, x_3 . Ta có thể chia chuyển động của hạt ra làm ba vùng I, II, III, trong đó:

I - Vùng hạt chuyển động hữu hạn trong hố thế.

II - Hàng rào thế.

III - Vùng chuyển động vô hạn.

Trong vùng I hạt chuyển động trong hố thế tương tự như trường hợp 1, tọa độ hạt bị hạn chế bởi điều kiện $x_1 \leq x \leq x_2$.

Vùng II và vùng III được ngăn cách bởi một rào thế năng có độ cao $U_{\text{max}} - E$. Trong khung cảnh của cơ học cổ điển, hạt với năng lượng E không thể chuyển động từ vùng I sang vùng III. Nếu hạt ban đầu ở vô cực có năng lượng

$E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ (thế năng ở vô cực coi như bằng không) và chuyển động theo chiều âm của

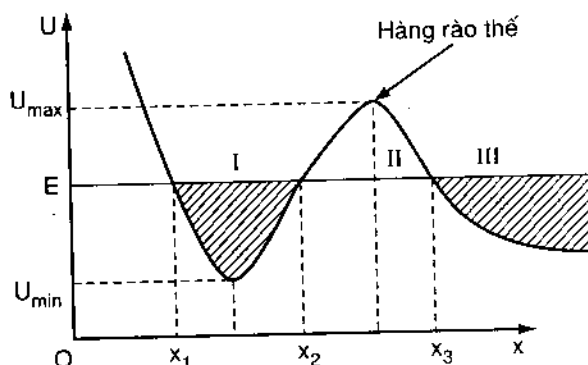
trục OX thì x_3 chính là điểm dừng của hạt. Hạt không thể chuyển động từ vùng III sang vùng I mà chỉ có thể đổi hướng vận tốc của nó từ ngược chiều sang cùng chiều với hướng dương của trục OX.

5.5.3. TRƯỜNG HỢP HÀM THỂ NĂNG CÓ DẠNG NHƯ HÌNH 5-9

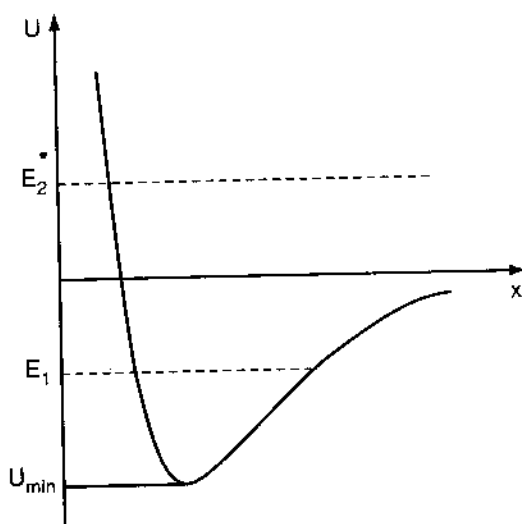
Tùy theo giá trị của hằng số cơ năng $E = \text{const}$ mà chuyển động của hạt có thể là vô hạn hoặc hữu hạn.

$E > 0$ chuyển động có thể xảy ra trong không gian vô hạn (thí dụ khi $E = E_2$ trên hình 5-9).

$E < 0$ chuyển động chỉ xảy ra trong vùng không gian hữu hạn (thí dụ khi $E = E_1$ như trên hình 5-9).



Hình 5-8. Hạt trong trường thế với hàm thế năng có cực đại, cực tiểu.



Hình 5-9. Chuyển động của hạt có thể hữu hạn hoặc vô hạn tùy theo năng lượng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Kỷ lục thế giới về ném tạ, ném đĩa và ném lao năm 1960 là 19,40, 59,96 và 86,09 m. Khối lượng các vật bị ném tương ứng là 7,257, 1,99 và 0,806 kg. Hãy làm tròn các con số nêu trên và so sánh với công thực hiện bởi vận động viên khi thực hiện các kỷ lục ném thế giới đó nếu biết rằng trong mỗi lần ném các vật đều được ném lên dưới góc 45° từ độ cao 1,8 m so với bề mặt trái đất và lực cản của không khí có thể bỏ qua.

Trả lời: $A_{\text{tạ}}=647 \text{ J}$; $A_{\text{đĩa}}=588 \text{ J}$; $A_{\text{lao}}=328 \text{ J}$.

5.2. Đĩa cân của một cân lò xo nặng 0,025 kg, còn độ cứng của lò xo là 15,3 N/m. Có một vật nhỏ khối lượng $m = 50 \text{ g}$ rơi từ độ cao $h = 9,0 \text{ cm}$ lên đĩa cân và va chạm hoàn toàn mềm với đĩa. Hỏi vật nhỏ đó có thể dịch chuyển xuống phía dưới một khoảng cách lớn nhất là bao nhiêu tính từ điểm nó bắt đầu rơi.

Trả lời: $h = 19,1 \text{ cm}$.

5.3. Hạt khối lượng m và xung lượng p bị phân rã ra làm hai hạt con giống nhau. Hỏi góc nhỏ nhất giữa các hướng bay ra của hai hạt con khi phân rã hạt lớn nếu khi phân rã có nhiệt lượng E được toả ra.

Trả lời: $\cos\alpha = \frac{p^2 - 2mE}{p^2 + 2mE}$.

5.4. Chất điểm chuyển động trong trường thế với thế năng $U(x) = U_0 \text{tg}^2 \frac{x}{a}$. Hãy chứng minh rằng chất điểm chuyển động tuần hoàn giữa hai điểm x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $E_0 - \frac{m}{2} (v_{oy}^2 + v_{oz}^2) - U_0 \text{tg}^2 \frac{x}{a} = 0$ (E_0 là hằng số năng lượng còn v_{oy}, v_{oz} là thành phần vận tốc ban đầu theo phương Oy, Oz). Còn chu kỳ của chuyển động là

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{m}{2\left(E_0 - \frac{m}{2} (v_{oy}^2 + v_{oz}^2) + U_0\right)}}$$

Chương 6

HỆ CHẤT ĐIỂM

6.1. KHỐI TÂM CỦA HỆ CHẤT ĐIỂM

Xét hệ gồm N chất điểm đứng trong môi trường. Các chất điểm trong hệ tương tác với nhau bằng những nội lực. Mặt khác các chất điểm trong hệ còn có thể chịu tác dụng của những phần tử môi trường ngoài hệ. Lực mà môi trường tác dụng lên hệ ta gọi là ngoại lực.

Một khái niệm rất quan trọng giúp chúng ta áp dụng các hiểu biết về chất điểm để nghiên cứu hệ chất điểm đó là khối tâm.

Khi hệ chất điểm được đặt trong trường trọng lực thì điểm đặt của trọng lực tổng hợp tác dụng lên hệ được gọi là trọng tâm. Trọng tâm hoặc khối tâm hay tâm quán tính thực chất là tên gọi khác nhau của cùng một điểm. Trước hết ta xét hệ hạt nằm trên một đường thẳng, khối lượng của mỗi hạt là m_i , tọa độ tương ứng của nó là x_i . Ta biểu thị vị trí khối tâm của hệ gồm N chất điểm là X_C thì:

$$X_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad (6.1)$$

$M = \sum_i m_i$ là khối lượng tổng cộng của hệ.

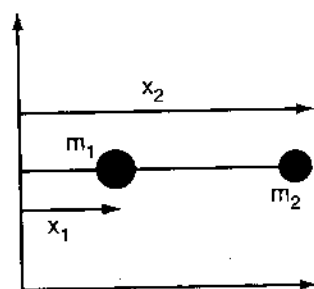
Ta kiểm tra sự đúng đắn của (6.1) không khó khăn gì. Ta thấy ngay từ (6.1), nếu hệ chỉ có 1 hạt thì vị trí khối tâm hay trọng tâm trùng với tọa độ của chất điểm $x_1 = X_C$. Khi hệ gồm hai hạt thì (xem hình 6-1):

$$X_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (6.2)$$

Rõ ràng rằng trong trường hợp đặc biệt, khi $m_1 = m_2$ thì tọa độ của trọng tâm hệ phải ở điểm giữa hai điểm m_1 và m_2 , nghĩa là:

$$X_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

như trường hợp riêng của (6.2). Điều này cho thấy tính đúng đắn của (6.2).



Hình 6-1. Hệ hai hạt trên đường thẳng.

Tương tự (6.1), ta viết hai toạ độ còn lại cho khối tâm của hệ chất điểm trong trường hợp không gian 3 chiều và hệ toạ độ được chọn là hệ toạ độ Đềcác:

$$Y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} ; \quad Z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \quad (6.3)$$

Công thức (6.1), (6.3) có thể viết gọn lại là:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (6.4)$$

Trong trường hợp phân bố khối lượng trong hệ hay vật là liên tục, ta thay chất điểm bằng vi phân khối lượng và tổng theo các chất điểm bằng tích phân theo khối lượng và vùng lấy tích phân là vùng không gian chứa khối lượng M:

$$m_i \rightarrow dm \quad \sum_i \dots \rightarrow \int_{(M)} dm \dots$$

Từ đó:

$$\vec{r}_C = \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{M} , \text{ ở đây } M = \int dm \quad (6.5)$$

Mặt khác vì $dm = \rho \cdot dV$ trong đó $\rho = \rho(x, y, z)$ là khối lượng riêng:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{(V)} \rho \vec{r} dV}{M} \quad (6.6)$$

Ký hiệu (V) biểu thị sự lấy tích phân theo không gian thể tích vật. Công thức (6.6) tương đương với 3 công thức cho các thành phần của vectơ bán kính khối tâm vật:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{\int_{(V)} \rho x \cdot dV}{M} \\ Y_C &= \frac{\int_{(V)} \rho y \cdot dV}{M} \\ Z_C &= \frac{\int_{(V)} \rho z \cdot dV}{M} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Trường hợp vật đồng chất thì khối lượng riêng không phụ thuộc vị trí chất điểm trong thể tích vật, hay $\rho(\vec{r}) = \rho = \text{const}$. Khi đó (6.7) trở thành:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dV}{V} \quad (6.8)$$

Trong (6.8) V là thể tích vật còn tích phân lấy theo toàn bộ không gian thể tích vật. Từ công thức (6.1) - (6.3) ta có nhận xét rằng nếu hệ chất điểm đồng nhất có trục hoặc mặt đối xứng thì khối tâm của hệ phải nằm trên trục hoặc trục đối xứng đó.

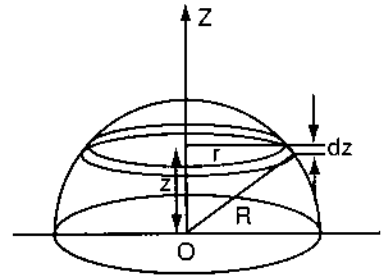
Thí dụ 1:

Hãy tìm khối tâm của bán cầu đồng chất bán kính R .

Giải:

Ta chọn trục OZ là trục đối xứng của bán cầu như hình 6-2. Do tính đối xứng của bán cầu đồng nhất, khối tâm phải nằm trên OZ và $x_c = y_c = 0; z_c \neq 0$:

$$z_c = \frac{\int_{(V)} z \cdot dV}{V}$$



Hình 6-2. Chia thành các đĩa mỏng để tính khối tâm bán cầu.

Thể tích bán cầu là: $V = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3} R^3$

Ta chia bán cầu ra làm các đĩa mỏng có độ dày dz thể tích của mỗi đĩa là $dV = \pi \cdot r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$ (hình 6-2). Mỗi đĩa có toạ độ khối tâm là điểm z . Tích phân có thể lấy dễ dàng cuối cùng ta được:

$$z_c = \frac{\int_0^R \pi(R^2 - z^2)z dz}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$$

6.2. ĐỊNH LUẬT CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM

Đầu tiên ta viết phương trình động lực học của Newton cho chất điểm thứ i có khối lượng m_i thuộc hệ chất điểm:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i \quad (6.9)$$

Trong đó: $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ là gia tốc của chất điểm thứ i . $\vec{F}_i$ là ngoại lực tổng hợp,

$\vec{f}_i$ là nội lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm thứ i . Lấy tổng cả hai vế theo i ta được: $\sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F} + \sum_i \vec{f}_i$ vì tổng các nội lực bằng không $\sum_i \vec{f}_i = 0$ nên:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \vec{F} \quad (6.10)$$

Với $\sum \vec{F}_i = \vec{F}$ là ngoại lực tổng hợp tác dụng lên hệ. Nếu ta lấy đạo hàm theo thời gian của véctơ bán kính khối tâm (6.4) thì:

$$M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (6.11)$$

$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c$ vận tốc chuyển động của khối tâm, còn $\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$ là động lượng toàn phần của hệ. Ta viết lại (6.11) trong dạng:

$$M\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (6.12)$$

Theo (6.12) động lượng toàn phần của hệ $\vec{P}$ chính bằng động lượng của chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của hệ và chuyển động với vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ. Đạo hàm hai vế của (6.12) một lần nữa theo thời gian ta được:

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F} \quad (6.13)$$

$$\text{hay:} \quad M\vec{a}_c = \vec{F} \quad (6.14)$$

(6.14) chính là biểu thức của định luật chuyển động của khối tâm của hệ chất điểm.

Định luật chuyển động của khối tâm hệ chất điểm:

Khối tâm của hệ chất điểm dưới tác dụng của ngoại lực tổng hợp $\vec{F}$ chuyển động như

một điểm có khối lượng bằng khối lượng của toàn hệ và gia tốc bằng $\frac{\vec{F}}{M}$.

6.3. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN ĐỘNG LƯỢNG CỦA HỆ CHẤT ĐIỂM CÔ LẬP (HỆ KÍN)

Công thức (6.14) còn được viết trong dạng định luật biến thiên động lượng cho hệ chất điểm như sau:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (6.15)$$

Trong đó: $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ động lượng của hệ chất điểm. $\vec{F}$ là ngoại lực tổng cộng tác dụng lên hệ chất điểm. Nếu hệ vật lý là kín thì ngoại lực tổng cộng $\vec{F}$ bằng 0.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{hay} \quad \vec{P} = \text{const} \quad (6.16)$$

(6.16) chính là nội dung của định luật bảo toàn động lượng cho hệ chất điểm kín: *động lượng của hệ chất điểm kín được bảo toàn.*

Có thể xảy ra trường hợp chỉ một hoặc hai thành phần của véc tơ động lượng hệ chất điểm được bảo toàn còn các thành phần khác không bảo toàn. Thật vậy phương trình $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ tương đương với ba phương trình cho ba thành phần Descartes của véc tơ động lượng tổng cộng:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z \quad (6.17)$$

Có thể chỉ xảy ra trường hợp một thành phần của ngoại lực tổng hợp bằng không, thí dụ $F_x = 0$ còn $F_y, F_z \neq 0$. Do đó chỉ có $P_x = \text{const}$, còn P_y, P_z là không bảo toàn. (6.16) bao gồm cả trường hợp riêng cho 1 chất điểm. Khi hệ chỉ có 1 chất điểm thì $\vec{F}$ là tổng hợp các lực tác dụng lên chất điểm. Nếu $\vec{F} = 0$ thì động lượng của chất điểm được bảo toàn.

Bảo toàn động lượng của hệ kín là hệ quả của biến đổi Galile

Xét cụ thể một hệ kín 1 chiều gồm 2 hạt (xem hình 6-3). Thế năng tương tác giữa hai hạt $U(x_1, x_2)$ chỉ phụ thuộc vào toạ độ x_1, x_2 của hai hạt. Trong biến đổi Galile:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - vt \\ x'_2 = x_2 - vt \end{cases} \quad (6.18)$$

thực chất mỗi hạt đã được tịnh tiến đi một véc tơ $\vec{b} = \vec{v}t$ với vận tốc không đổi $\vec{v}$. Cấu hình tương tác giữa các hạt là không đổi nên thế năng tương tác là bất biến với biến đổi Galile:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + b, x_2 + b) = U(x'_1 + x'_2)$$

Điều đó còn có nghĩa rằng thế năng không đổi khi hệ được tịnh tiến tới một vị trí mới mà trong quá trình đó hoàn toàn không sinh công. Do đó thế năng $U(x_1, x_2)$ chỉ là hàm của toạ độ tương đối $(x_1 - x_2)$:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 - x_2) = U(x) \quad (6.19)$$

$$x_1 - x_2 = x$$

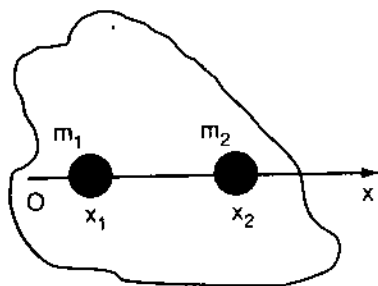
lực tác dụng của các hạt lên nhau trong trường hợp này là lực thế, chúng chỉ phụ thuộc vào toạ độ các hạt.

Lực tác dụng của hạt 2 lên hạt 1 là:

$$F_{21} = - \frac{\partial U}{\partial x_1} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Lực tác dụng của hạt 1 lên hạt 2:

$$F_{12} = - \frac{\partial U}{\partial x_2} = - \frac{\partial U}{\partial x} (-1) = \frac{\partial U}{\partial x}$$



Hình 6-3. Thế năng tương tác giữa hai hạt chỉ phụ thuộc khoảng cách giữa chúng.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (6.20)$$

Lực tác dụng tổng hợp lên hệ gồm hai hạt $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$ nếu hệ là hệ kín. Và do đó động lượng của hệ là bảo toàn.

Trong trường hợp ba chiều tổng quát, thế năng tương tác của hệ nhiều hạt chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tương đối giữa hai hạt.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_1 - \vec{r}_N; \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \vec{r}_2 - \vec{r}_4, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)$$

6.4. CHUYỂN ĐỘNG CỦA TÊN LỬA (CHUYỂN ĐỘNG PHẢN LỰC)

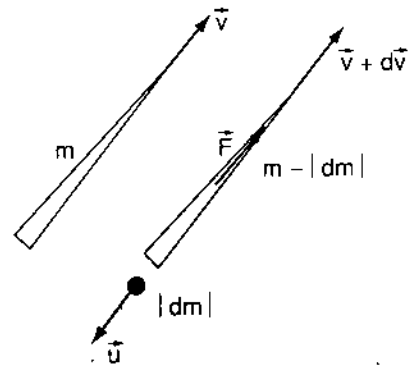
Ta khảo sát chuyển động của con tàu vũ trụ trong không gian không có lực hấp dẫn sử dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ kín.

6.4.1. CÔNG THỨC CHO PHẢN LỰC

Hình 6-4 mô tả con tàu vũ trụ chuyển động trong không gian có lực hấp dẫn. Vận tốc của con tàu tại thời điểm t đang xét là $\vec{v}$ (đo trong hệ quy chiếu quán tính phòng thí nghiệm) khối lượng của con tàu lúc đó là m . $\vec{u}$ là vận tốc tương đối của khí phụt ra đối với con tàu.

Trong chuyển động phản lực, tên lửa phụt khí mất dần khối lượng và tiến về phía trước với vận tốc tăng dần. Tốc độ giảm khối lượng con tàu đặc trưng bởi đại lượng μ :

$$\frac{dm}{dt} = -\mu; \quad \mu > 0 \quad (6.21)$$



Hình 6-4. Con tàu trong không gian vũ trụ và nguyên nhân của lực đẩy.

Tích phân phương trình trên ta được khối lượng con tàu:

$$\int_{m_0}^m dm = -\mu \int_0^t dt \Rightarrow m = m_0 - \mu.t \quad (6.22)$$

Định luật bảo toàn động lượng cho hệ kín trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm được viết như sau:

$$m\vec{v} = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|(\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}) \quad (6.23)$$

Đơn giản phương trình trên, ta được:

$$0 = m d\vec{v} + |dm| \vec{u}, \text{ hay:}$$

$$d\vec{v} = - \left| \frac{dm}{m} \right| \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{|dm|}{dt} \cdot \frac{1}{m} \vec{u} \Rightarrow m\vec{a} = -\mu.\vec{u}$$

$$\vec{F} = -\mu\vec{u} \quad (6.24)$$

Công thức (6.24) được gọi là công thức Meserski nội dung của nó là phản lực do khí tác dụng lên con tàu có độ lớn tỷ lệ với tốc độ phụt khí μ và vận tốc tương đối của khí so với con tàu $\vec{u}$. Công thức này giải thích nguyên nhân chuyển động của tên lửa, lực đẩy tên lửa sinh ra do khí phụt. $\vec{F}$ có chiều ngược với vận tốc phụt khí $\vec{u}$.

6.4.2. CÔNG THỨC XIÔNCÔPXKI

Khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối, (6.23) trở thành:

$$m d\vec{v} = -|dm| \vec{u} \Rightarrow m d\vec{v} = dm \cdot \vec{u} \quad (6.25)$$

Tích phân (6.25) ta được:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} \vec{u} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \ln \frac{m}{m_0} \vec{u} \quad (6.26)$$

Đặt m theo (6.22) vào công thức trên ta được:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t} \vec{u} \quad (6.27a)$$

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t} \quad (6.27b)$$

Công thức (6.27) có tên gọi là công thức Xiôncôpxki, trong đó: v_0 – vận tốc ban đầu của tên lửa, v là vận tốc của tên lửa ở thời điểm t .

Muốn tăng v phải tăng u và tỷ số m_0/m . Để giảm m ngoài cách giảm bằng khí phụt ra nhanh còn phải vứt bỏ khối lượng thừa như vỏ của tầng chứa nhiên liệu.

Thí dụ 1

Để đưa một trạm thí nghiệm có khối lượng $m = 10$ tấn lên quỹ đạo gần Trái đất, biết khí phụt ra có vận tốc tương đối so với tên lửa mang trạm là $u = 4$ km/s thì khối lượng ban đầu của tên lửa mang và trạm m_0 tối thiểu phải là bao nhiêu?

Giải:

Phương trình (6.26) cho ta vận tốc tên lửa ở thời điểm t phụ thuộc khối lượng tên lửa ở thời điểm đó theo quy luật:

$$v = -u \ln \frac{m}{m_0} \Rightarrow m_0 = m \cdot e^{v/u}.$$

Vận tốc tối thiểu mà tên lửa mang cần có để lên được quỹ đạo gần bề mặt Trái đất chính là vận tốc quỹ đạo cấp một $v = 8$ km/s nên khối lượng ban đầu của tên lửa là:

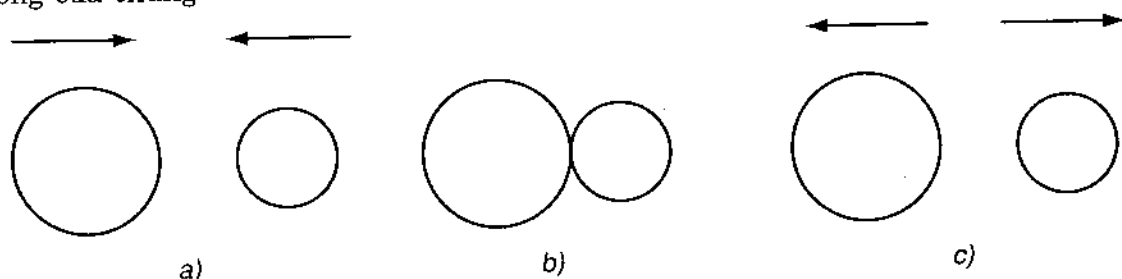
$$m_0 = m \cdot e^{v/u} \approx 74,6 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$\Delta m = m_0 - m = 64,6 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Δm đó là lượng nhiên liệu cần phải sử dụng để đưa trạm thí nghiệm khối lượng m lên quỹ đạo gần Trái đất.

6.5. VA CHẠM ĐÀN HỒI

Va chạm là một sự cố trong đó các vật tác dụng lên nhau một lực rất lớn trong một khoảng thời gian rất ngắn. Ta có thể phân chia một cách rõ ràng thời gian trước, trong khi và sau khi va chạm theo định nghĩa trên. Các vật va chạm nhau không nhất thiết phải chạm vào nhau trong khi va chạm mà có khi chỉ lại gần nhau đến một khoảng cách cực cận nào đó rồi lại đi ra xa nhau (va chạm không tiếp xúc). Trong vật lý vi mô, va chạm giữa các đối tượng vi mô còn thường được gọi là tán xạ. Va chạm giữa các vật được chia làm hai loại: va chạm đàn hồi và va chạm không đàn hồi. Va chạm đàn hồi là va chạm mà động năng toàn phần của hệ các vật va chạm không đổi. Các vật va chạm lại gần nhau rồi xa nhau không có sự thay đổi gì về năng lượng bên trong của chúng.



Hình 6-5. Va chạm giữa hai vật

a) Trước lúc va chạm; b) Trong lúc va chạm; c) Sau lúc va chạm.

6.5.1. XUNG LƯỢNG CỦA LỰC

Ta xét một va chạm giữa hai vật (giống như hai hạt) có khối lượng khác nhau mô tả trên hình 6-6. Hai lực tác dụng – phản lực tác dụng lên mỗi hạt theo chiều ngược nhau bằng nhau về độ lớn tại mỗi thời điểm trong va chạm. Các lực đó làm thay đổi động lượng của hai vật và độ thay đổi đó chẳng những phụ thuộc vào giá trị trung bình của các lực nêu trên mà còn phụ thuộc vào thời gian va chạm Δt . Áp dụng định luật thứ hai của Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ cho vật bên phải ta có:

$$d\vec{P} = \vec{F}(t)dt \quad (6.28)$$

Lực $\vec{F}(t)$ phụ thuộc thời gian như mô tả trên hình 6-7, lấy tích phân theo khoảng thời gian va chạm $\Delta t = t_i - t_f$ (t_i thời điểm bắt đầu, t_f thời điểm kết thúc va chạm), ta có:

$$\int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad (6.29)$$



Hình 6-6. Lực và phản lực trong va chạm.

Phía bên trái của phương trình là độ thay đổi động lượng của vật bên phải do va chạm:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \tag{6.30}$$

Đại lượng bên phải của (6.29) được gọi là xung lượng của lực trong thời gian Δt :

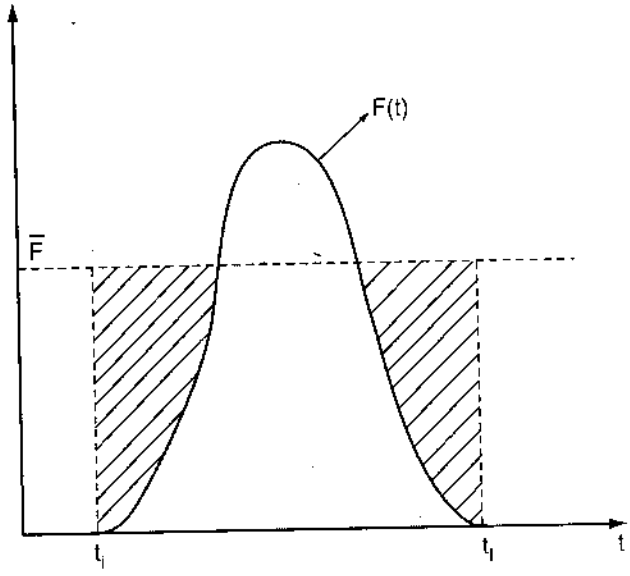
$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Trên hình 6-7, xung lượng của lực bằng diện tích giới hạn bởi đường cong $F(t)$ và trục thời gian t . Như vậy "Độ biến thiên động lượng của vật trong một khoảng thời gian bằng xung lượng của ngoại lực tác dụng lên vật trong khoảng thời gian đó".

$$\vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta \vec{P} = \vec{J} \tag{6.31}$$

Đó là nội dung của định lý biến thiên động lượng của vật. Ở đây cần chú ý $F(t)$ là nội lực nếu hai vật va chạm là hệ kín, là ngoại lực đối với riêng vật bên phải ($-\vec{F}(t)$ ngoại lực đối với vật bên trái). Dễ thấy độ biến thiên động lượng của vật bên trái là $-\Delta \vec{P}$. Phương trình trên tương đương với ba phương trình vô hướng cho các thành phần vectơ của (6.30) là:

$$\begin{cases} P_{fx} - P_{ix} = \Delta P_x = J_x \\ P_{fy} - P_{iy} = \Delta P_y = J_y \\ P_{fz} - P_{iz} = \Delta P_z = J_z \end{cases} \tag{6.32}$$



Hình 6-7. Xung lượng của lực bằng diện tích giới hạn bởi đường cong $F(t)$ và trục t .

Xung lượng của lực và động lượng đều là các đại lượng vectơ, chúng có cùng đơn vị và số chiều (hay thành phần). Định luật biến thiên động lượng và định lý động năng chỉ là hệ quả của định luật II Newton. Chúng được sử dụng cho những mục đích khác nhau mà thôi.

Nếu $\bar{F}$ là giá trị trung bình của lực còn $\bar{J}$ là giá trị trung bình của xung lượng thì:

$$\bar{J} = \bar{F} \Delta t$$

Giá trị của $\bar{F}$ cần được chọn sao cho diện tích giới hạn bởi đường cong $F(t)$ và trục t bằng diện tích của hình chữ nhật có độ cao $\bar{F}$ chiều dài $\Delta t = t_f - t_i$.

5.2. XÉT TRƯỜNG HỢP VA CHẠM ĐÀN HỒI VÀ XUYỀN TÂM CỦA HAI HẠT CÓ KHỐI LƯỢNG m_1, m_2 (hình 6-8)

Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, vận tốc của các hạt trước và sau va chạm là $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ và $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$. Hệ hai hạt đó được coi là cô lập cho nên ta có thể áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho hệ đó:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (6.33)$$

Vì va chạm xảy ra trên đường thẳng, ta viết phương trình vectơ trên cho một thành phần trong dạng đại số:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (6.34)$$

Định luật bảo toàn năng lượng (ở đây là động năng) cho hệ kín hai hạt được viết như sau:

$$\begin{aligned} m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \\ \begin{cases} m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \end{cases} \\ v_1 + v'_1 &= v'_2 + v_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

kết hợp với (6.34), suy ra:

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{(m_2 + m_1)} \quad (6.36a)$$

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{(m_2 + m_1)} \quad (6.36b)$$

Nếu hai quả cầu có cùng khối lượng $m_1 = m_2$, ta thấy ngay:

$$\begin{cases} v'_2 = v_1 \\ v'_1 = v_2 \end{cases} \quad (6.37)$$

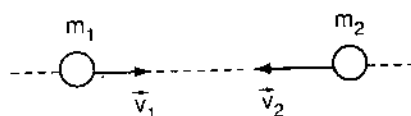
nghĩa là hai quả cầu trao đổi vận tốc với nhau, vận tốc của hạt thứ 2 sau va chạm bằng vận tốc của hạt 1 trước va chạm và ngược lại.

Nếu $m_1 = m_2$, 1 quả cầu đứng yên trước va chạm $v_2 = 0$ thì :

$$\begin{cases} v'_2 = v_1 \\ v'_1 = 0 \end{cases}$$

Nếu $m_2 \gg m_1$ (m_2 được coi là bia chắn có khối lượng lớn) thì:

$$\begin{cases} v'_2 \approx v_2 \\ v'_1 \approx 2v_2 - v_1 \end{cases}$$

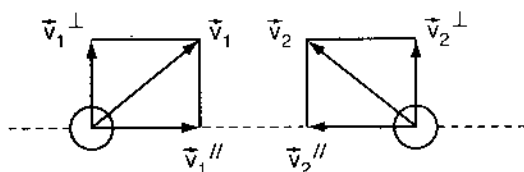


Hình 6-8. Va chạm đàn hồi xuyên tâm hai hạt.

Trong trường hợp này nếu trước va chạm quả cầu thứ hai đứng yên, $v_2 = 0$ thì sau va chạm $v_1' \approx -v_1$; $v_2' = 0$ (mô hình tương tự là trường hợp quả cầu lao vào bờ tường nhẵn và bị phản xạ lại).

Trường hợp va chạm đàn hồi không xuyên tâm:

Ta phân tích vận tốc trước va chạm thành các thành phần xuyên tâm $v_1^{\parallel}$, $v_2^{\parallel}$ và thành phần vuông góc $v_1^{\perp}$, $v_2^{\perp}$ (hình 6-9) sau đó áp dụng lý luận trên cho thành phần song song, còn thành phần vuông góc không thay đổi trong va chạm đàn hồi.



Hình 6-9. Va chạm không xuyên tâm.

6.6. VA CHẠM KHÔNG ĐÀN HỒI, VA CHẠM MỀM

Nếu va chạm là không đàn hồi thì một phần động năng của các vật va chạm chuyển thành nội năng của chúng. Động năng của hệ trước, sau va chạm không bảo toàn.

Va chạm mềm là trường hợp đặc biệt của va chạm không đàn hồi khi mà hai vật sau va chạm kết hợp làm một. Trong va chạm không đàn hồi, ta vẫn áp dụng được định luật bảo toàn động lượng vì định luật này đúng cho hệ cô lập:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (6.38)$$

Tuy nhiên tổng động năng của các vật trước, sau va chạm không bảo toàn. Một phần động năng của vật va chạm bị chuyển hoá thành các dạng năng lượng khác (nhiệt năng, năng lượng biến dạng...)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \neq \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

Phần động năng tiêu hao biến thành nhiệt hoặc năng lượng làm biến dạng vật là:

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \frac{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ \Rightarrow \Delta E_K &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Phần động năng tiêu hao (6.39) phụ thuộc vào vận tốc tương đối giữa các vật trước va chạm và khối lượng rút gọn μ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} ; \quad \mu < m_1, m_2 \quad (6.40a)$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m \cdot v_{12}^2 \quad (6.40b)$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Thí dụ ta muốn đập vỡ viên gạch. Trong trường hợp này hai vật va chạm là chiếc búa chuyển động và hòn gạch ban đầu đứng yên. Ta cần chuyển động năng của búa thành năng lượng biến dạng làm vỡ hòn gạch (lúc này phần động năng tiêu hao biến thành năng lượng biến dạng hay công phá vỡ hòn gạch), do đó cần tăng vận tốc của búa trước va chạm (tăng hiệu $v_1 - v_2$).

Một thí dụ khác là trường hợp đóng đinh. Khi đóng đinh ta cần biến động năng của búa thành công ấn sâu đinh vào vật bị đóng, do đó cần giảm động năng tiêu hao, cần tăng khối lượng búa m_1 để đạt được động năng búa lớn với v_1 chưa lớn nhờ vậy giảm động năng tiêu hao.

6.7. VA CHẠM GIỮA CÁC VẬT THẬT

Trong va chạm không hoàn toàn đàn hồi cũng không hoàn toàn là mềm thì một phần động năng chuyển thành nhiệt năng và năng lượng biến dạng.

Theo Newton tỷ số vận tốc tương đối giữa vận tốc sau và trước va chạm chỉ phụ thuộc vào bản chất vật va chạm. Tỷ số này được gọi là hệ số đàn hồi, được đo bằng tỷ số giữa độ lớn của vận tốc tương đối trước và sau va chạm của hai vật:

$$e = \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \quad (6.41)$$

Nếu va chạm hoàn toàn đàn hồi thì:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \frac{|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = 1 \Rightarrow e = 1$$

Nếu va chạm là hoàn toàn không đàn hồi (va chạm mềm) thì $e = 0$ còn va chạm giữa các vật thật có $0 < e < 1$. Thí dụ nếu hai quả cầu thủy tinh va chạm với nhau thì sự va chạm này có hệ số đàn hồi $e = 1/16$. Bây giờ ta xét va chạm giữa hai vật thật theo đường thẳng. Coi hệ hai vật này là hệ kín thì theo định luật bảo toàn động lượng và định nghĩa của hệ số đàn hồi ta có:

$$\begin{cases} v'_1 - v'_2 = -e(v_1 - v_2) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 v'_1 - m_2 v'_2 = -em_2(v_1 - v_2) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{cases}$$

từ hệ trên suy ra:

$$v'_1 = v_1 - \frac{m_2(1+e)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (6.42a)$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{m_1(1+e)(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad (6.42b)$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2)$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+e)(v_1 - v_2)(v_1 + v'_1 - v_2 - v'_2)$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1-e^2)(v_1 - v_2)^2$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} \mu (1-e^2)(v_1 - v_2)^2 \quad (6.43)$$

Trong đó: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ là khối lượng rút gọn của hệ hai hạt.

Như vậy động năng tiêu hao trong va chạm giữa hai vật thật phụ thuộc vào vận tốc tương đối trước khi va chạm giữa hai vật, khối lượng rút gọn và hệ số đàn hồi e .

6.8. MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM, HỆ CHẤT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH. ĐỊNH LUẬT BIẾN THIÊN VÀ BẢO TOÀN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG.

6.8.1. TRƯỜNG HỢP MỘT CHẤT ĐIỂM

Mômen động lượng của chất điểm m đối với một điểm O cố định là một vectơ cho bởi biểu thức (xem hình 6-10):

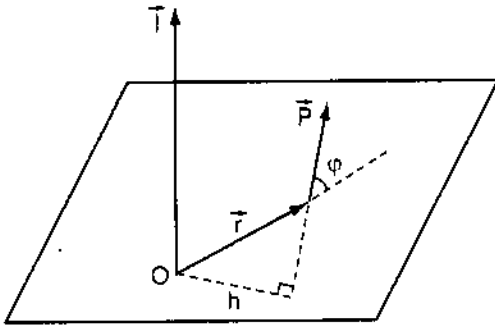
$$\vec{l} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \quad (6.44)$$

Nếu hiểu cánh tay đòn là khoảng cách từ điểm O đến phương kéo dài của vectơ động lượng $\vec{P}$ thì độ lớn của vectơ động lượng cho bởi:

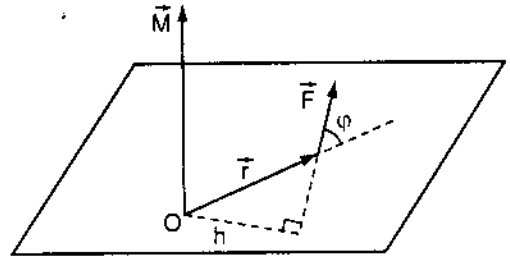
$$\begin{aligned} l &= r.P.\sin\varphi; \quad r.\sin\varphi = h \\ l &= P.h \quad (h - \text{cánh tay đòn}) \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = m \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{v} \right] + m \left[\vec{r}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M} \quad (6.46)$$



Hình 6-10. Mômen động lượng chất điểm đối với điểm O.



Hình 6-11. Mômen lực tác dụng lên chất điểm đối với điểm O.

Vế phải của (6.46) là mômen lực tác dụng lên chất điểm đối với điểm O (xem hình 6-11):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (6.47)$$

(6.46) là định luật biến thiên mômen động lượng của chất điểm: Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng của chất điểm đối với điểm cố định O bằng mômen lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm đối với điểm đó.

* Nếu $\vec{M} = 0$ thì hoặc là lực bằng không hoặc là lực xuyên tâm nhưng khác không:

$$\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{r} \parallel \vec{F} \end{cases} \quad (6.48)$$

Ta có định luật bảo toàn mômen động lượng của chất điểm. Mômen động lượng của chất điểm đối với một điểm cố định được bảo toàn nếu mômen của lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm đối với điểm đó bằng không:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{l} = \text{const} \quad (6.49)$$

6.8.2. TRƯỜNG HỢP HỆ CHẤT ĐIỂM VỚI MÔMEN THÀNH PHẦN $\vec{l}_i = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$

Véc tơ mômen động lượng của hệ chất điểm được coi là tổng các véc tơ mômen động lượng của từng chất điểm:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] \quad (6.50)$$

Vận tốc thay đổi của mômen động lượng hệ chất điểm được tìm tương tự như trường hợp chất điểm:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{a}_i] \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \vec{f}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, \vec{f}_i]\end{aligned}\quad (6.51)$$

Trong (6.51) $\vec{f}_i$ là nội lực và $\vec{F}_i$ là ngoại lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm m_i .

Tổng mômen các nội lực đối với một điểm bằng không, điều này được chứng minh như sau:

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{ij \\ (i \neq j)}} \vec{f}_{ji}$$

Trong đó: $\vec{f}_{ji}$ là nội lực của chất điểm m_j tác dụng lên chất điểm m_i . Nhân véc-tơ phương trình trên với $\vec{r}_i$ và lấy tổng theo i .

$$\sum_i [\vec{r}_i, \vec{f}_i] = \sum_{\substack{ij \\ (i \neq j)}} [\vec{r}_i, \vec{f}_{ji}]$$

Tách tổng trên thành 2 phần sau đó đổi chỉ số i cho j trong phần thứ hai ta được:

$$\sum_i [\vec{r}_i, \vec{f}_i] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ (i \neq j)}} \{ [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}] \}$$

$$\sum_i [\vec{r}_i, \vec{f}_i] = \frac{1}{2} \sum_{ij} \{ [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] \} \quad \text{vì } \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

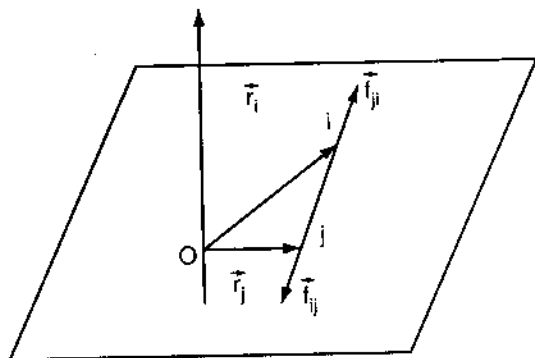
Do $\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{f}_{ij}$ (xem hình 6-12) nên tổng mômen các nội lực bằng 0.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M}^{\text{ngoại}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ngoại}}$$

Định luật biến thiên mômen động lượng của hệ chất điểm:

Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng của hệ chất điểm (đối với một điểm cố định O) bằng tổng các mômen đối với O của các ngoại lực tác dụng lên hệ.



Hình 6-12. Tổng mômen lực của cặp nội lực tương hỗ bằng không

Mômen động lượng của hệ chất điểm là bảo toàn nếu $\vec{M}^{\text{ngoại}} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \quad (6.52)$$

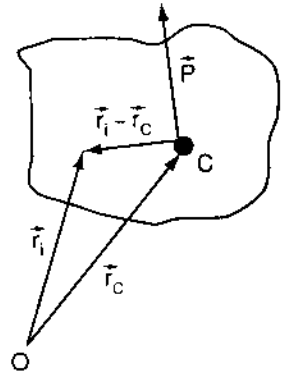
Mômen động lượng của hệ chất điểm (6.50) còn có thể được biểu thị qua mômen quán tính của khối tâm.

Nếu $\vec{r}_c$ là vectơ bán kính chỉ vị trí của tâm quán tính, ta có thể viết (6.50) như sau (xem hình 6-13):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i - \vec{r}_c, \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_c, \vec{v}_i]$$

$$\vec{L} = \vec{L}_c + [\vec{r}_c, \vec{P}] \quad (6.53)$$

$$\vec{L}_c = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i - \vec{r}_c, \vec{v}_i] \quad (6.54)$$



Hình 6-13. Mômen động lượng của hệ chất điểm

Trong các công thức trên $\vec{L}_c$ là mômen động lượng đối với khối tâm (tâm quán tính), còn $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ là

động lượng của cả hệ. $[\vec{r}_c, \vec{P}]$ là mômen động lượng của khối tâm đối với gốc toạ độ O. Đại lượng $\vec{L}_c$ đối với một hạt được gọi là mômen cơ học spin. Nếu chọn điểm O cố định trùng với khối tâm C thì:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

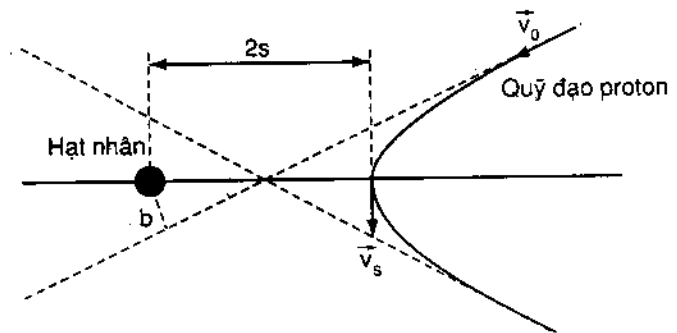
Định luật biến thiên mômen động lượng trong hệ quy chiếu khối tâm được viết là:

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}^{\text{ngoại lực}} \quad (6.55)$$

Thí dụ: Ứng dụng định luật bảo toàn năng lượng và mô men động lượng trong bài toán va chạm (tán xạ) không tiếp xúc giữa các hạt.

Ta xét thí dụ tán xạ proton bởi hạt nhân nặng

Điện tích hạt nhân là Ze vận tốc của proton khi ở rất xa hạt nhân là $\vec{v}_0$ và tham số ngắm bằng b (tham số ngắm là khoảng cách gần nhất mà hai hạt có thể lại gần nhau nếu không có tương tác). Hãy tìm khoảng cách gần nhất mà



Hình 6-14. Tán xạ proton bởi hạt nhân nặng.

proton có thể lại gần hạt nhân. Cho rằng khối lượng hạt nhân lớn hơn rất nhiều khối lượng proton.

Giải:

Vì khối lượng hạt nhân rất lớn ta có thể coi khối tâm của hệ trùng với khối tâm của hạt nhân và xét chuyển động của hạt proton tương đối với hạt nhân đứng yên. Hệ hạt nhân và proton tương tác với nhau được coi là kín, do đó ta có thể viết định luật bảo toàn năng lượng của hệ như sau:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{Z e^2}{s}$$

trong đó s , v_s là khoảng cách cực cận và vận tốc ở điểm cực cận. Dễ thấy là tại điểm cực cận vectơ $\vec{v}_s$ vuông góc với vectơ bán kính $\vec{s}$. Mặt khác vì lực đẩy giữa hạt nhân và hạt proton là xuyên tâm (luôn luôn hướng theo đường nối giữa khối tâm của hai hạt) nên ta có thể áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng đối với điểm khối tâm hạt nhân (điểm O):

$$m v_0 b = m v_s s \quad \text{hay} \quad \frac{v_s}{v_0} = \frac{b}{s} \quad . \quad \text{Từ đó suy ra} \quad \frac{Z e^2}{s} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{s^2} \right)$$

Giải phương trình bậc hai trên cho khoảng cách cực cận s ta được:

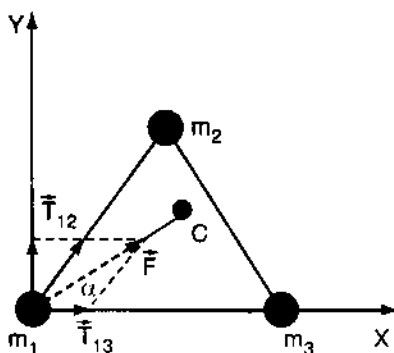
$$s = \frac{Z e^2}{m v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b m v_0^2}{Z e^2} \right)^2} \right)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Ba chất điểm m_1 , m_2 , m_3 liên kết với nhau bằng ba sợi chỉ có cùng độ dài l và quay với vận tốc góc ω xung quanh khối tâm (xem hình 6-15), trong lúc quay vẫn giữ nguyên cấu hình tam giác đều. Hãy tìm sức căng của các sợi chỉ.

Trả lời: $T_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \omega^2$

(tương tự cho những sợi chỉ khác).



Hình 6-15.

6.2. Một hòn bi thép rơi từ độ cao $h = 1$ m lên một quả bóng tennis và nảy lên độ cao cùng xấp xỉ bằng 1 m. Hãy đánh giá độ cao H mà quả bóng tennis sẽ nảy lên.

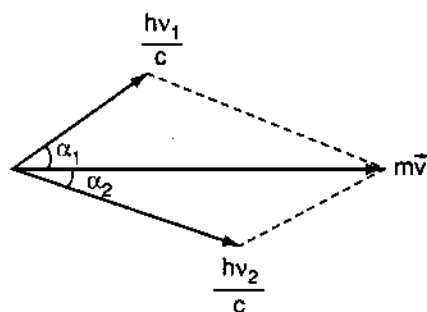
Trả lời: $H \approx 0,25$ m.

6.3. Một viên đạn nổ tung ở điểm cao nhất của quỹ đạo parabol với độ cao $h = 40$ m thành 2 mảnh bằng nhau. Mảnh thứ nhất rơi thẳng đứng xuống đất sau khoảng thời gian $T_1 = 2$ s. Hỏi mảnh thứ hai rơi xuống đất sau khoảng thời gian là bao nhiêu tính từ lúc nổ? Lấy $g = 10$ m/s².

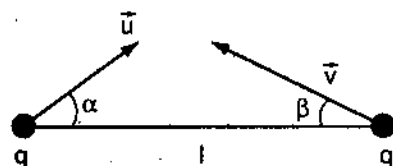
Trả lời:
$$T_2 = \left(\frac{h}{gT_1} - \frac{T_1}{2} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{g \left(\frac{h}{gT_1} - \frac{T_1}{2} \right)^2}} \right) = 4 \text{ s.}$$

6.4. Hai photon được tạo thành do phân rã một hạt trung hòa chuyển động dưới góc $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$ so với hướng chuyển động ban đầu của hạt trung hòa. Hỏi vận tốc ban đầu của hạt trung hòa (xem hình 6-16)?

Trả lời:
$$v = c \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \approx 0,73c.$$



Hình 6-16.



Hình 6-17.

6.5. Hai hạt như nhau có cùng điện tích q và vận tốc u, v nằm trong một mặt phẳng và tạo thành các góc α, β với đường nối tâm giữa chúng. Hai hạt đó cách nhau một khoảng l ở thời điểm có các vận tốc nêu trên (xem hình 6-17). Hãy xác định khối lượng các hạt đó biết khoảng cách gần nhất mà chúng có thể lại gần nhau là r .

Trả lời:
$$m = \frac{4q^2(l - r)}{rl \left[u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \beta) - \frac{l^2}{r^2} (u \sin \alpha - v \sin \beta)^2 \right]}$$

Chương 7

VẬT RẮN

7.1. BẬC TỰ DO, CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

Vật rắn lý tưởng là một hệ chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ thuộc hệ không thay đổi trong quá trình chuyển động. Như vậy vật rắn lý tưởng là một vật có hình dạng và kích thước không thay đổi, không biến dạng.

Vì chất rắn cũng là một hệ chất điểm nên các khái niệm xét trong chương VI về khối tâm, động lượng, mômen động lượng... cho hệ chất điểm cũng được áp dụng để khảo sát vật rắn.

Bậc tự do của vật rắn:

Để mô tả chuyển động của vật rắn ta phải xác định được chuyển động của bất kỳ điểm nào của vật. Vị trí của vật rắn không liên kết (không bị ràng buộc gì bởi liên kết với các vật khác) trong không gian hoàn toàn được xác định bởi vị trí của ba điểm không thẳng hàng của vật rắn. Ba điểm này được xác định bởi 9 toạ độ (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) . Tuy nhiên do tính chất của vật rắn, ba điểm này chính là ba đỉnh của một hình tam giác có kích thước không đổi gắn liền với vật nên ta có ba phương trình mô tả độ dài các cạnh tam giác không đổi. Ba phương trình này thể hiện mối quan hệ phụ thuộc giữa 9 toạ độ nêu trên. Do đó chúng ta chỉ cần 6 toạ độ độc lập để xác định vị trí của vật rắn.

Số toạ độ độc lập cần biết để xác định vị trí của vật rắn trong không gian được gọi là số bậc tự do của vật rắn.

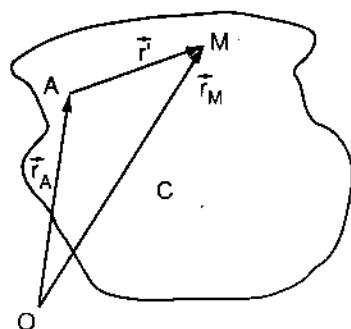
Như trên đã nói vật rắn tự do có 6 bậc tự do. Vật rắn có 1 điểm cố định sẽ có 3 bậc tự do. Vật rắn có hai điểm cố định sẽ có 1 bậc tự do.

7.2. CHUYỂN ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

Chuyển động bất kỳ của vật rắn có thể coi là kết quả tổng hợp của hai chuyển động: chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay xung quanh một trục đi qua một điểm của vật rắn.

Tâm quay tức thời: vectơ bán kính chỉ vị trí của một điểm bất kỳ M của vật rắn có thể coi là tổng của hai vectơ bán kính $\vec{r}_A$ và $\vec{r}'$ (xem hình 7-1). Trong đó A là một điểm bất kỳ khác thuộc vật rắn, O là gốc toạ độ:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}' \quad (7.1)$$



Hình 7-1.

A cũng là một điểm thuộc vật rắn. Đạo hàm đẳng thức trên theo thời gian t , ta được:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (7.2)$$

Vì khoảng cách giữa hai điểm thuộc vật rắn là không đổi nên:

$$\vec{r}'^2 = \text{const}$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo thời gian ta có:

$$2(\vec{r}'_M - \vec{r}'_A)(\vec{v}_M - \vec{v}_A) = 0 \quad (7.3)$$

Trong đó:

$$\frac{d\vec{r}'_M}{dt} = \vec{v}_M ; \quad \frac{d\vec{r}'_A}{dt} = \vec{v}_A$$

$\vec{v}_M, \vec{v}_A$ là vận tốc của điểm M và A thuộc vật rắn. (7.3) được viết lại là:

$$\vec{r}' \cdot (\vec{v}_M - \vec{v}_A) = 0 \quad (7.4)$$

Vì tích vô hướng của hai vectơ bằng không, do đó theo (7.4) hai vectơ đó vuông góc với nhau:

$$\vec{r}' \perp (\vec{v}_M - \vec{v}_A) \quad (7.5)$$

Nếu vật rắn có một điểm A sao cho vận tốc tức thời của điểm đó bằng không $\vec{v}_A = 0$ thì theo (7.5) $\vec{v}_M \perp \vec{r}'$. Mặt khác do $|\vec{r}'| = \text{const}$, vectơ vận tốc của một điểm M bất kỳ của vật rắn $\vec{v}_M$ ở thời điểm t đang xét là vận tốc dài trong chuyển động quay của vật rắn quanh trục đi qua điểm A. Lúc đó A được gọi là tâm quay tức thời và trục đi qua điểm đó gọi là trục quay tức thời:

$$(\vec{r}', \vec{v}_M) = 0 \text{ hay } \left(\vec{r}', \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) = 0 \quad (7.6)$$

Biết tâm quay tức thời, vận tốc góc $\vec{\omega}$ của sự quay đó ta có được phân bố vận tốc của các điểm M khác của vật rắn tại thời điểm đang xét (xem hình 7-2):

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}'}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \quad (7.7)$$

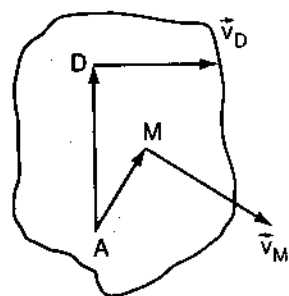
Nếu ta không tìm được tâm quay tức thời thì (7.2) có dạng là:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad (7.8)$$

Điểm A thường được chọn là khối tâm C của vật rắn. Do đó vận tốc tức thời của một điểm bất kỳ vật rắn là tổng vectơ của vận tốc khối tâm và vận tốc của chuyển động quay xung quanh trục đi qua khối tâm.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{r}'] \quad (7.9)$$

r' khoảng cách từ khối tâm đến chất điểm.



Hình 7-2. Tâm quay tức thời A của vật rắn.

Chú ý: Vận tốc góc của sự quay $\vec{\omega}$ không phụ thuộc vào cách chọn điểm A hoặc C. Điều này có thể được chứng minh như sau: giả sử vận tốc của điểm M có thể mô tả như tổng của vận tốc điểm A và chuyển động quay quanh A với vận tốc góc $\vec{\omega}'$ khác $\vec{\omega}$. Ta sẽ chứng minh hai vận tốc góc đó bằng nhau. Xét hình 7-3 ta có:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}', \vec{r}'] \quad (7.10)$$

Mặt khác vận tốc điểm A có thể coi như tổng vận tốc của khối tâm C và vận tốc dài của hệ quanh C:

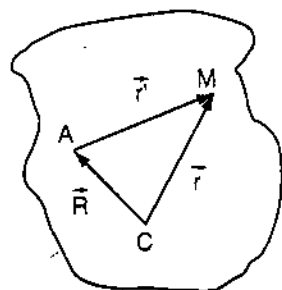
$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{R}] \quad (7.11)$$

Đặt (7.11) vào (7.10) ta được:

$$[\vec{\omega}, (\vec{R} - \vec{r}')] = -[\vec{\omega}', \vec{r}']$$

$$\text{Vì: } \vec{r}' + \vec{R} = \vec{r} \Rightarrow \vec{R} - \vec{r}' = -\vec{r}'$$

nên $-\vec{\omega}, \vec{r}' = -[\vec{\omega}', \vec{r}']$ do $\vec{r}'$ là tùy chọn ta suy ra $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ (điều phải chứng minh).



Hình 7-3. Hệ quy chiếu khối tâm.

7.3. ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN

Động năng của vật rắn bằng tổng động năng của các chất điểm m_i tạo nên nó. Sử dụng (7.9) ta có biểu thức cho động năng:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{v}_C + [\vec{\omega}, \vec{r}_i])^2 \quad (7.12)$$

Trong đó: $\vec{r}_i$ là khoảng cách từ khối tâm C đến m_i (xem hình 7-4).

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \{v_C^2 + 2(\vec{v}_C, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]) + ([\vec{\omega}, \vec{r}_i], [\vec{\omega}, \vec{r}_i])\}$$

$$K = \frac{M v_C^2}{2} + (\vec{v}_C, [\vec{\omega}, \sum_i m_i \vec{r}_i]) + \sum_i \frac{m_i}{2} ([\vec{\omega}, \vec{r}_i], [\vec{\omega}, \vec{r}_i])$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i$$

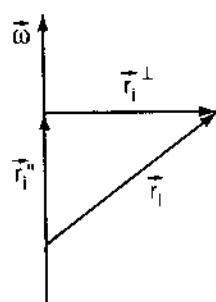
Vì véc-tơ bán kính khối tâm $\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$, nhưng điểm C là khối tâm $\vec{r}_C = 0$ nên

$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$, số hạng thứ hai trong biểu thức trên bằng 0. Ta coi véc-tơ chỉ vị trí chất điểm i là tổng của hai véc-tơ song song và vuông góc với trục quay $\vec{\omega}$, khi đó tích véc-tơ trong tổng thứ ba trở thành:

$$[\vec{\omega}, \vec{r}_i] = [\vec{\omega}, \vec{r}_i^{\parallel} + \vec{r}_i^{\perp}] = [\vec{\omega}, \vec{r}_i^{\perp}]$$

$$[\vec{\omega}, \vec{r}_i^{\perp}]^2 = \omega^2 (r_i^{\perp})^2$$

$$K = \frac{M v_C^2}{2} + \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \frac{\omega^2}{2} \quad (7.13)$$



Hình 7-4. Phân tích $\vec{r}_i$ thành hai thành phần song song, vuông góc với trục quay.

$$\sum_i m_i r_{i\perp}^2 = I_C \quad (7.14)$$

I_C được gọi là mômen quán tính đối với trục quay qua khối tâm C. Nếu vật rắn có phân bố khối lượng liên tục, ta chuyển (7.14) tới dạng tích phân sau:

$$I_C = \int dm \cdot r_{\perp}^2 \quad (7.15)$$

(7.13) trở thành:

$$K = \frac{Mv_C^2}{2} + I_C \cdot \frac{\omega^2}{2} \quad (7.16)$$

Theo (7.16) động năng của vật rắn gồm hai thành phần: động năng tịnh tiến của cả vật rắn như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng vật rắn và vận tốc bằng vận tốc khối tâm cộng với động năng của chuyển động quay của vật rắn quanh trục đi qua khối tâm.

Từ cách chứng minh công thức (7.16) ta có nhận xét rằng nếu như vật rắn có một tâm quay tức thời A với $v_A = 0$ trong hệ quy chiếu quán tính đứng yên nào đó thì động năng của vật rắn trong hệ quy chiếu này sẽ là:

$$K = I_A \frac{\omega^2}{2}$$

Trong đó I_A là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay tức thời đi qua A.

7.4. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

Phương trình này được suy ra từ định luật biến thiên mômen động lượng của vật rắn đối với một điểm cố định O.

Trước hết ta xét một vật rắn tùy ý và tính mômen động lượng của nó đối với điểm O thành hai phần: vuông góc với trục quay qua O, $\vec{L}_{\perp}$ và song song với trục đó $\vec{L}_z$ (xem hình 7-5):

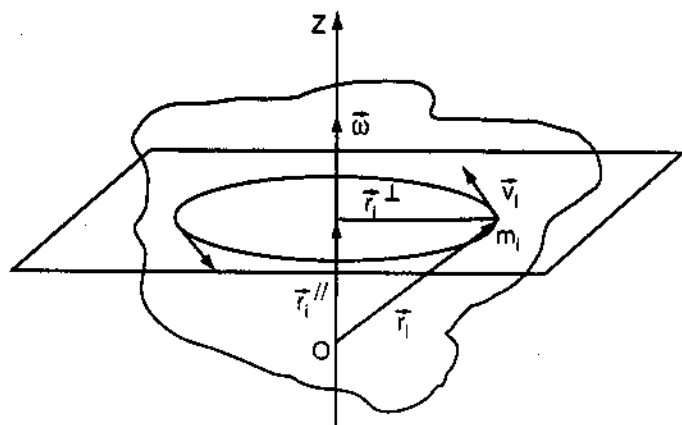
$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i'' + \vec{r}_i^{\perp}, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i'', m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i^{\perp}, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{\perp} + \vec{L}_z \quad (7.17)$$

Nếu vật là đối xứng với trục quay OZ thì thành phần mômen động lượng vuông góc với trục quay $\vec{L}_{\perp} = 0$. Xét vật đối xứng có trục đối xứng là



Hình 7-5. Vật rắn không đối xứng quay quanh trục OZ.

trục quay OZ thì phương trình biến thiên mômen động lượng bây giờ chỉ còn một thành phần:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}^{\text{ngoại}} \\ \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} &= M_z^{\text{ngoại}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Mômen động lượng của vật rắn đối với trục đối xứng cũng là trục quay.

$$\begin{aligned} \vec{L}_z &= \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]]] \\ \vec{L}_z &= \sum_i m_i \vec{\omega} \vec{r}_{i\perp}^2 = I_z \vec{\omega} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Trong công thức trên I_z là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay Oz:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_z^{\text{ngoại}} \quad (7.20)$$

Nếu mômen ngoại lực đối với trục z bằng 0 thì mômen động lượng của vật rắn đối với trục đó được bảo toàn.

$$I \vec{\omega} = \text{const} \quad (7.21)$$

Phương trình (7.20) được gọi là phương trình mô tả chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định.

7.5. TÍNH MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN

Xét vật rắn quay quanh trục xác định bởi vận tốc góc $\vec{\omega}$. Hệ toạ độ phòng thí nghiệm có thể có định hướng bất kỳ. Mômen động lượng của vật đối với điểm O thỏa mãn phương trình tổng quát:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ngoại}} \quad (7.22)$$

Vì $\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$ và $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ (xem hình 7-6) nên:

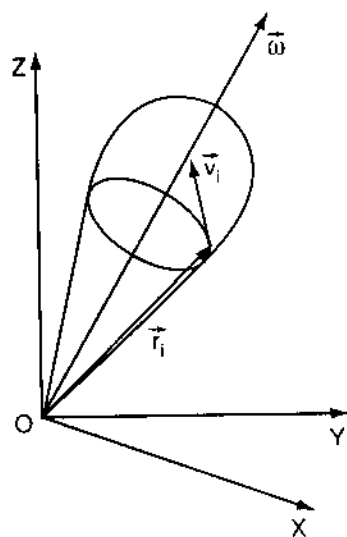
$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]]$$

Viết tường minh biểu thức cho tích véctơ kép ta được:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \{ \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \}$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$L_x = \sum_i m_i \{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}$$



Hình 7-6. Vật rắn quay quanh trục quay $\vec{\omega}$.

$$L_x = \sum_i m_i \{ \omega_x (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \}$$

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_x = \sum_{\alpha} I_{x\alpha} \omega_{\alpha} \quad (\text{chỉ số } \alpha \text{ có các giá trị } x, y, z)$$

Trong các công thức trên $I_{\alpha\beta}$ được gọi là các thành phần của tenxơ mômen quán tính của vật rắn trong hệ toạ độ Đề-các. Tương tự ta có biểu thức sau cho thành phần y và z của vectơ mômen động lượng.

$$L_y = \sum_i m_i \{ \omega_y (r_i^2 - y_i^2) - \omega_x x_i y_i - \omega_z y_i z_i \}$$

$$L_z = \sum_i m_i \{ \omega_z (r_i^2 - z_i^2) - \omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i \}$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

Ta có thể viết ma trận của tenxơ mômen quán tính của vật rắn như sau:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.23a)$$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \quad (7.23b)$$

Thành phần chéo của tenxơ mômen quán tính, thí dụ như I_{xx} được thể hiện qua khoảng cách tới trục quay tương ứng:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

Vì $y_i^2 + z_i^2$ = bình phương khoảng cách từ chất điểm m_i tới trục OX nên I_{xx} gọi là mômen quán tính đối với trục OX.

Tính chất của Tenxơ mômen quán tính của vật rắn:

1. Tổng các mômen quán tính đối với các trục là đẳng hướng không phụ thuộc sự định hướng vật với các trục x, y, z.

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \sum_i m_i (3r_i^2 - r_i^2) = 2 \sum_i m_i r_i^2 \quad (7.24)$$

2. Tenxơ mômen quán tính là đối xứng:

$$I_{xy} = I_{yx} ; I_{xz} = I_{zx} ; I_{yz} = I_{zy} \quad (7.25)$$

Tenxơ mômen quán tính có thể viết dưới dạng đơn giản khác, ký hiệu $x_\alpha = x, y, z$ với $\alpha = 1, 2, 3$.

Đưa vào ký hiệu Kronecker:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (7.26)$$

thành phần tenxơ mômen quán tính được viết là:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} \sum_\gamma x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \quad (7.27a)$$

Thí dụ:

$$I_{\alpha\alpha} = \sum_i m_i (\sum_\gamma x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha}^2) \quad (7.27b)$$

Dạng tích phân của mômen quán tính:

$$I_{xx} = \int dm(y^2 + z^2) \quad (7.28a)$$

$$I_{xx} = \int \rho(\vec{r})(r^2 - x^2)d\vec{r} \quad (7.28b)$$

Ký hiệu $d\vec{r} = dx.dy.dz$ biểu thị vi phân của thể tích, $\rho(\vec{r})$ là khối lượng riêng và tích phân ở đây là tích phân ba lớp.

Nếu trong một hệ tọa độ nào đó tenxơ mômen quán tính là chéo hoá thì hệ tọa độ đó được gọi là hệ trục chính còn các trục tọa độ tương ứng được gọi là các trục chính. Trong hệ trục chính thì:

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\alpha} \delta_{\alpha\beta}$$

Thí dụ 1:

Tìm tenxơ mômen quán tính của quả cầu rỗng bán kính R , khối lượng M . Gốc tọa độ trùng với tâm quán tính của quả cầu rỗng.

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i = 0; \quad I_{yz}, I_{zx} = 0$$

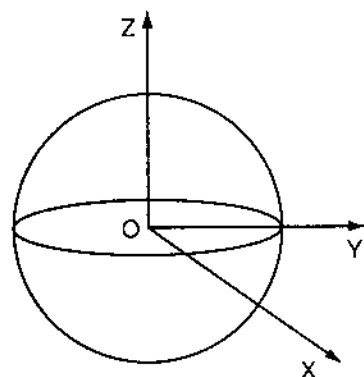
$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = I_{yy} = I_{zz}$$

Từ sự đối xứng của quả cầu và tương đương của ba trục tọa độ, ta có:

$$\sum_i x_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2$$

$$I_{xx} = \frac{2}{3} \sum_i m_i r_i^2$$

$$I_{xx} = \frac{2}{3} R^2 M$$



Hình 7-7. Quả cầu rỗng đồng chất có trục đối xứng là đường thẳng qua tâm của nó.

Do đó mômen quán tính của quả cầu rỗng đồng chất đối với trục đi qua tâm của nó là:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} MR^2 \quad (7.29)$$

(7.29) là mômen quán tính của quả cầu rỗng đối với trục đối xứng của nó.

Thí dụ 2:

Tìm mômen quán tính của quả cầu đồng chất bán kính R đối với trục qua khối tâm.

Vì tính đối xứng của quả cầu đối với trục bất kỳ đi qua tâm, nên:

$$I_C = I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \frac{2}{3} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{2}{3} \rho \int dV \cdot r^2$$

$$I_C = \frac{2}{3} \rho \int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot r^2 \Rightarrow I_C = \frac{8\pi}{3} \rho \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} MR^2 \text{ vì } \frac{4\pi}{3} R^3 \rho = M$$

$$I_C = \frac{2}{5} MR^2 \quad (7.30)$$

(7.30) là mômen quán tính của quả cầu đặc đồng chất đối với trục qua khối tâm.

Bảng 7.1 liệt kê giá trị mômen quán tính của một số vật rắn.

Bảng 7.1: Mômen quán tính của một số vật rắn thường gặp có khối lượng là M

Vật rắn	Trục quay	Mômen quán tính
Hình trụ đặc (hoặc cái đĩa đặc) bán kính R	Trục đối xứng qua tâm hai mặt đáy	$I = \frac{1}{2} MR^2$
Thanh mảnh có độ dài L	Trục đi qua tâm và vuông góc với thanh	$I = \frac{1}{12} ML^2$
Quả cầu đặc bán kính R	Đường kính bất kỳ	$I = \frac{2}{5} MR^2$
Quả cầu rỗng bán kính R	Đường kính bất kỳ	$I = \frac{2}{3} MR^2$
Tấm chữ nhật có chiều rộng a, chiều dài b	Trục vuông góc với mặt phẳng tấm và qua tâm	$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

7.6. ĐỊNH LÝ HUYGENS (ĐỊNH LÝ VỀ CÁC TRỤC QUAY SONG SONG)

Xét vật rắn và các trục quay song song, đi qua khối tâm Δ_C và không đi qua khối tâm Δ trên hình 7-8. Cũng trên hình này C biểu thị khối tâm của vật rắn, m_i là khối lượng của chất điểm A_i của vật rắn. KA_i , HA_i là khoảng cách từ điểm A_i đến các trục Δ , Δ_C .

Mômen quán tính của vật rắn đối với hai trục đó được viết như sau:

$$I_C = \sum_i m_i H A_i^2 \quad (7.31)$$

$$I_\Delta = \sum_i m_i K A_i^2 \quad (7.32)$$

Theo định lý cosin thì:

$$\begin{aligned} K A_i^2 &= K H^2 + H A_i^2 + 2(\vec{KH}, \vec{H A_i}) \\ &= d^2 + H A_i^2 + 2(\vec{KH}, \vec{H A_i}) \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế với khối lượng chất điểm m_i và lấy tổng theo mọi chất điểm i ta được:

$$I_\Delta = \sum_i m_i [d^2 + H A_i^2 + 2(\vec{KH}, \vec{H A_i})]$$

$$I_\Delta = M.d^2 + I_C + 2(\vec{d}, \sum_i m_i \vec{H A_i}) \quad (7.33)$$

Chú ý rằng : $(\vec{d}, \vec{H A_i}) = (\vec{d}, \vec{r_i} - \vec{CH}) = (\vec{d}, \vec{r_i})$ do đó tích vô hướng (số hạng thứ ba trong tổng trên) bằng 0:

$$2(\vec{d}, \sum_i m_i \vec{H A_i}) = 2(\vec{d}, \sum_i m_i \vec{r_i}) = 0. \text{ Ở đây } \sum_i m_i \vec{r_i} = 0 \text{ vì } C \text{ là khối tâm.}$$

Cuối cùng ta được:

$$I_\Delta = I_C + M.d^2 \quad (7.34)$$

Biểu thức trên thể hiện nội dung của định lý Huygens: *Mômen quán tính của vật rắn đối với một trục bất kỳ bằng mômen quán tính của nó đối với trục đi qua khối tâm và song song với trục bất kỳ đó cộng với tích khối lượng của vật rắn với bình phương khoảng cách giữa hai trục.*

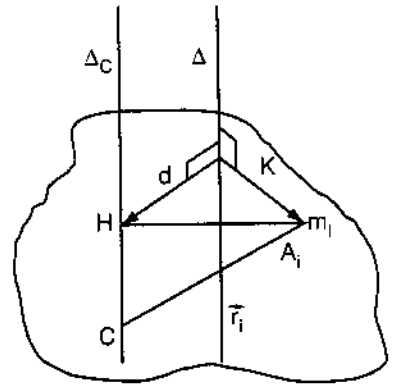
7.7. PHƯƠNG TRÌNH EULER

Xét một vật rắn quay, phương trình biến thiên mômen động lượng của vật rắn:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F$$

là đúng cho hệ quy chiếu quán tính K mà ta quy ước là đứng yên. Thành phần Đêcac của vectơ mômen động lượng trong hệ quy chiếu K được viết là $L_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta$.

Trong đó: $I_{\alpha\beta}$ và ω_β là thành phần của tenxơ mômen quán tính và vận tốc góc của vật rắn trong hệ quy chiếu K (OXYZ). Tuy nhiên thành phần mômen quán tính của vật rắn nếu được viết trong hệ quy chiếu có trục tọa độ gắn liền với vật rắn và cùng quay với vật rắn thì tiện hơn nhiều. *Hệ quy chiếu gắn với vật rắn và quay cùng vật rắn là hệ quy chiếu phi quán tính* (Hệ tọa độ O'X'Y'Z' có gốc O trùng với O' và được gọi tắt là hệ K' , điều này ta đã biết từ chương 4). Định luật biến đổi vectơ mômen động



Hình 7-8. Vị trí của chất điểm m_i thuộc vật rắn đối với hai trục quay song song Δ_C, Δ .

lượng L từ hệ quy chiếu quán tính K sang hệ quy chiếu phi quán tính quay K' được viết như sau:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{L}'] \quad (7.35)$$

trong đó: $\vec{L}'$ là mômen động lượng trong hệ K' (xem hình 7-9). Công thức (7.35) tương tự như công thức $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']$ hay $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{r}']$ với $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của hệ quy chiếu phi quán tính quay mô tả trong chương 4). Do đó ta có:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{L}'] = \vec{M}_F \quad (7.36)$$

Nếu trục toạ độ $O'X', O'Y', O'Z'$ của hệ quy chiếu quay K' hướng dọc theo 3 trục chính của vật rắn (hệ trục chính là hệ trục toạ độ mà tenxơ mômen quán tính có dạng chéo trong hệ toạ độ đó) thì tenxơ mômen quán tính của vật trong hệ K' có dạng chéo:

$$I' = \begin{pmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

$$L'_\alpha = I'_{\alpha\alpha} \omega_\alpha \quad (7.38)$$

Trong đó: L'_α là thành phần của vectơ mômen động lượng trong hệ quy chiếu K' . $\vec{\omega}(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ là vectơ vận tốc góc có các thành phần ω'_α trong hệ quy chiếu K' .

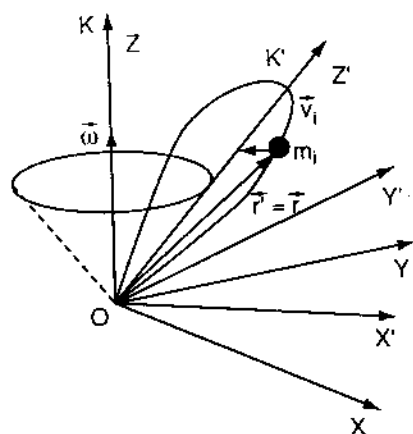
Trong hệ quy chiếu K vectơ này chỉ có một thành phần ω_z . Phương trình Euler có dạng:

$$I'_{xx} \frac{d\omega'_x}{dt} + (\omega'_y L'_z - L'_y \omega'_z) = M_x$$

$$I'_{yy} \frac{d\omega'_y}{dt} + (\omega'_z I'_{xx} \omega'_x - \omega'_x I'_{zz} \omega'_z) = M_y$$

$$I'_{zz} \frac{d\omega'_z}{dt} + (\omega'_x I'_{yy} \omega'_y - \omega'_y I'_{xx} \omega'_x) = M_z$$

Viết gọn lại, ta được:



Hình 7-9. Vật rắn quay trong hệ trục chính K' và hệ đứng yên K .

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_{xx} \frac{d\omega'_x}{dt} + (I'_{zz} - I'_{yy})\omega'_y\omega'_z = M_x \\ I'_{yy} \frac{d\omega'_y}{dt} + (I'_{xx} - I'_{zz})\omega'_x\omega'_z = M_y \\ I'_{zz} \frac{d\omega'_z}{dt} + (I'_{yy} - I'_{xx})\omega'_x\omega'_y = M_z \end{array} \right. \quad (7.39)$$

Phương trình này gọi là phương trình Euler. Hãy luôn nhớ rằng khi sử dụng phương trình Euler, các trục chính $O'X', O'Y', O'Z'$ gắn liền với vật.

Thí dụ 1:

Tiến động của quả cầu không chịu tác động của mômen quay. Thật vậy đối với quả cầu $I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = I'$. Phương trình Euler:

$$\left\{ \begin{array}{l} I' \frac{d\omega'_x}{dt} = 0 \\ I' \frac{d\omega'_y}{dt} = 0 \\ I' \frac{d\omega'_z}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Từ đó suy ra $\vec{\omega} = \vec{\text{const.}}$

Quả cầu quay với vận tốc góc không đổi nếu ban đầu nó có vận tốc góc khác không.

Thí dụ 2:

Con quay đối xứng không có mômen ngoại lực tác dụng.

$$\begin{array}{l} I'_{xx} = I'_{yy} \neq I'_{zz} \\ \left\{ \begin{array}{l} I'_{xx} \frac{d\omega'_x}{dt} + (I'_{zz} - I'_{yy})\omega'_y\omega'_z = M_x = 0 \\ I'_{yy} \frac{d\omega'_y}{dt} + (I'_{xx} - I'_{zz})\omega'_x\omega'_z = M_y = 0 \\ I'_{zz} \frac{d\omega'_z}{dt} = M_z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

lời giải phương trình này có dạng:

$$\begin{cases} \frac{d\omega'_x}{dt} + \Omega\omega'_y = 0 \\ \frac{d\omega'_y}{dt} - \Omega\omega'_x = 0 \end{cases}$$

$$\text{với: } \Omega = \frac{I'_{zz} - I'_{xx}}{I'_{xx}} \omega'_z$$

$$\omega'_z = \text{const}; \quad \omega'_x = A \cos \Omega t; \quad \omega'_y = A \sin \Omega t \quad (A = \text{const}).$$

Vectơ $\vec{\omega}$ ($\omega'_x = A \cos \Omega t$; $\omega'_y = A \sin \Omega t$; $\omega'_z = \text{const}$) quay quanh trục OZ' với vận tốc góc Ω .

Chú ý:

Thành phần của vectơ mômen động lượng trong K' được viết tương tự như trong K

$$L'_\alpha = \sum_{\beta} I'_{\alpha\beta} \omega'_\beta$$

Trong đó: $I'_{\alpha\beta}$ thành phần mômen quán tính của vật rắn trong K' , còn thành phần vận tốc góc vẫn như ở trong K . Thật vậy, vận tốc của chất điểm i thuộc vật rắn trong hệ quy chiếu đứng yên K khi chuyển sang hệ quy chiếu quay K' được biến đổi theo công thức (xem chương 4 - Hệ quy chiếu phi quán tính, công thức 4.16):

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + [\vec{\omega}, \vec{r}'_i]$$

$\vec{v}'_i$ là vận tốc của chất điểm trong K' , còn $\vec{r}'_i = \vec{r}_i$ chỉ vị trí chất điểm trong K' (xem hình 4-4, hệ K và K' có cùng gốc toạ độ). Vì K' gắn liền và quay cùng vật rắn nên $\vec{v}'_i = 0$. Nhân cả hai vế phương trình trên với khối lượng chất điểm m_i sau đó nhân véc tơ với vectơ bán kính và lấy tổng theo i để được biểu thức cho vectơ mômen động lượng, ta được:

$$m_i \vec{v}_i = m_i [\vec{\omega}, \vec{r}'_i]$$

$$\sum_i [\vec{r}'_i, m_i \vec{r}'_i] = \sum_i m_i [\vec{r}'_i, [\vec{\omega}, \vec{r}'_i]]$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i{}^2 - \vec{r}'_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i))$$

$$\vec{L}' = \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i{}^2 - \vec{r}'_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i))$$

$$L'_x = \sum_i m_i (\omega_x (r_i'^2 - x_i'^2) - \omega_y y'_i x'_i - \omega_z x'_i z'_i)$$

$\vec{L}'_\alpha = I'_{\alpha\beta} \omega'_\beta$ khi chuyển vào hệ quy chiếu gắn liền với vật rắn quay.

7.8. GYROSCOPE (CON QUAY) TRONG TRƯỜNG TRỌNG LỰC

Ta khảo sát con quay là vật rắn đối xứng quay xung quanh trục đối xứng OZ' của mình trong trường trọng lực và trong hệ qui chiếu quán tính đứng yên $OXYZ$ gọi tắt là hệ K (xem hình 7-10, trên hình này chỉ vẽ trục OZ , OZ').

Phương trình chuyển động quay của con quay (vật rắn đối xứng) có dạng chung là phương trình biến thiên mômen động lượng:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F \quad (7.40)$$

Trong đó: L - mômen động lượng của vật rắn đối với điểm nào đó (điểm O trên hình vẽ hình 7-10). M_F - mômen ngoại lực đối với điểm O tác dụng lên vật rắn.

$$\vec{M}_F = [\vec{r}_C, \vec{F}] \quad (7.41)$$

Nếu con quay quay xung quanh trục đối xứng OZ' với vận tốc góc $\vec{\omega}$ thì mômen động lượng $\vec{L}$ đối với điểm O nằm song song với trục OZ' và bằng:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (7.42)$$

I là mômen quán tính của con quay đối với trục đối xứng OZ' . Biểu thị $\vec{r}_C$ là vectơ chỉ vị trí khối tâm con quay thì :

$$\vec{r}_C = \hat{r}_C \cdot r_C \quad (7.43)$$

Với $\hat{r}_C$ là vectơ đơn vị hướng dọc trục Oz' ;

$\hat{r}_C // \vec{\omega} // \vec{L}$ hay:

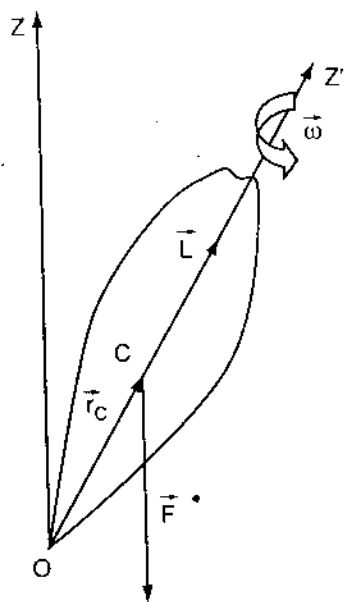
$$\hat{r}_C = \frac{\vec{L}}{I\vec{\omega}} \quad (7.44)$$

Đặt vào (7.41) ta có:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{r_C}{I\omega} [\vec{L}, \vec{F}] \quad (7.45)$$

Đại lượng $\frac{r_C \vec{F}}{I\omega}$ có thứ nguyên là vận tốc góc, ta biểu thị:

$$\vec{\Omega} = - \frac{r_C \vec{F}}{I\omega} \quad (7.46)$$



Hình 7-10. Con quay đối xứng trong trường trọng lực.

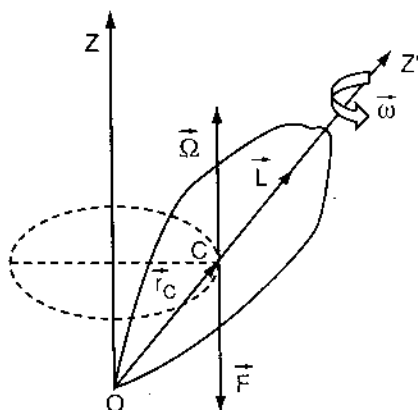
Phương trình (7.45) trở thành:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}] \quad \text{hoặc} \quad \vec{M}_F = [\vec{\Omega}, I\vec{\omega}] \quad (7.47)$$

Phương trình (8) cho thấy trục đối xứng OZ' mà theo nó vectơ mômen động lượng của con quay định hướng sẽ chuyển động quay xung quanh trục thẳng đứng OZ với vận tốc góc Ω cho bởi (7.46) chuyển động này gọi là chuyển động tiến động (xem hình 7-11). Nếu ngoại lực tác dụng lên con quay là trọng lực, $F = mg$ thì vận tốc góc của chuyển động tiến động là:

$$\Omega = \frac{r_C \cdot mg}{I_0} \quad (7.48)$$

r_C cũng là khoảng cách từ điểm giao O của hai trục OZ , OZ' tới trọng tâm C của con quay.



Hình 7-11. Tiến động của con quay đối xứng trong trường trọng lực.

7.9. CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN

7.9.1. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN

Chúng ta coi vật rắn ở trạng thái cân bằng là trường hợp vật rắn không chuyển động (không chuyển động tịnh tiến, không quay).

Vật rắn tự do (không bị liên kết, ràng buộc với các vật khác) có sáu bậc tự do. Để xác định các bậc tự do đó cần có sáu phương trình đại số. Sáu phương trình đó tương đương với hai phương trình vectơ sau cho $\vec{P}$ (động lượng toàn phần) và $\vec{L}$ (mômen động lượng toàn phần):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ngoại}} \quad (7.49)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ngoại}} \quad (7.50)$$

Trong trạng thái cân bằng mọi toạ độ của các điểm $\vec{r}_i$ thuộc vật rắn không đổi theo thời gian, vậy vận tốc của mọi điểm đó $\vec{v}_i = 0$. Gia tốc của mọi điểm $\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ cũng như vậy phải bằng không. Từ đó ta có điều kiện cần và đủ cho cân bằng là:

+ Điều kiện cần:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{hay} \quad \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{ngoại}} = 0 \quad (7.51)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{hay} \quad \vec{M}_{\text{ngoại}} = 0 \quad (7.52)$$

+ Điều kiện đủ:

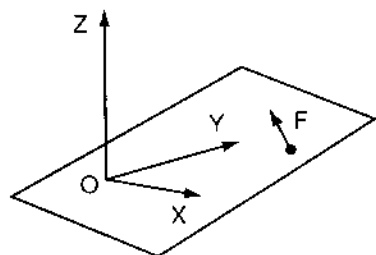
$$\vec{P} = 0 ; \vec{L} = 0 \quad (7.53)$$

Điều kiện cần thiết đòi hỏi các ngoại lực và các mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn phải bù trừ nhau để cho ngoại lực tổng hợp và tổng các mômen ngoại lực bằng không. Điều kiện đủ có ý nghĩa là trạng thái ban đầu có gia tốc và vận tốc bằng 0. (7.51), (7.52) tương đương với sáu phương trình đại số cho các thành phần của các vectơ tương ứng.

Vật rắn ở trạng thái cân bằng ít khi được hoàn toàn tự do mà bị liên kết với các vật khác.

Trong một số trường hợp thường gặp các lực tác dụng lên vật rắn đều nằm trong một mặt phẳng XOY (xem hình 7-12). Do đó mômen quay của các lực đó chỉ làm quay vật rắn quay xung quanh trục OZ vuông góc với mặt phẳng trên. Chúng ta chỉ cần xét các phương trình cân bằng sau:

$$\begin{cases} 0 = F_x = \sum_i F_i^x \\ 0 = F_y = \sum_i F_i^y \\ 0 = M_z = \sum_i M_i^z \end{cases} \quad (7.54)$$



Hình 7-12. Lực tác dụng lên vật rắn nằm trong mặt XOY.

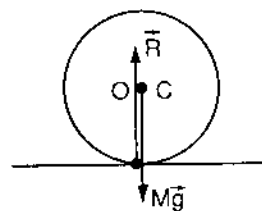
7.9.2. LIÊN KẾT KHÔNG MA SÁT

Ta khảo sát trường hợp hai vật rắn liên kết không có ma sát tiếp xúc với nhau tại một điểm. Hãy xét thí dụ cân bằng của một vật rắn được đặt trên một mặt nằm ngang rắn, nhấn đồng thời giữa vật và mặt nằm ngang không có ma sát (xem hình 7-13).

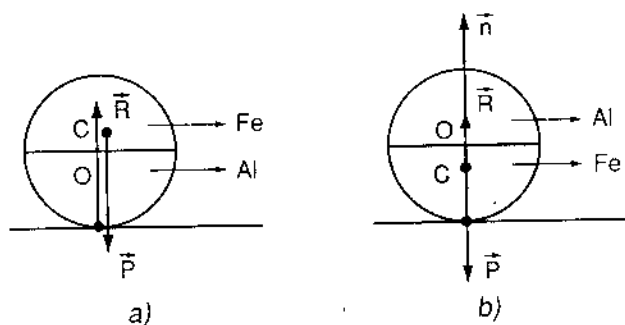
Phản lực $\vec{R}$ của mặt nằm ngang tác dụng lên vật khi không có ma sát sẽ vuông góc với mặt tiếp tuyến của hai vật π và có điểm đặt là điểm tiếp xúc. Vật rắn cân bằng khi $\vec{R}$ trực đối với trọng lượng $\vec{P}$ và hai lực này là trực đối cùng nằm trên pháp tuyến chung tại điểm tiếp xúc.

Trường hợp đơn giản nếu vật là khối cầu đồng tính có khối tâm trùng với tâm O của quả cầu thì bất kỳ pháp tuyến nào cũng qua O. Rõ ràng rằng mọi vị trí của quả cầu trên mặt nằm ngang đều tương đương và đều là vị trí cân bằng. Trường hợp này được gọi là trường hợp cân bằng phiếm định.

Ta xét trường hợp khác khi quả cầu là không đồng tính và gồm hai nửa có khối lượng riêng khác nhau. (Hình 7-14 mô tả một quả cầu có một nửa được làm bằng sắt



Hình 7-13. Cân bằng phiếm định của quả cầu đồng chất trên mặt nằm ngang nhẵn.



Hình 7-14. Quả cầu không đồng chất (một nửa bằng nhôm, một nửa bằng sắt) trên mặt nằm ngang nhẵn.

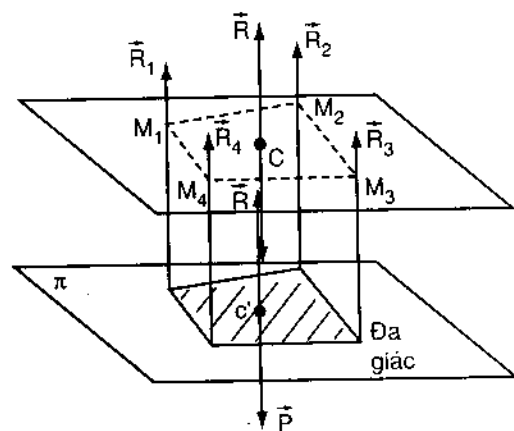
có khối lượng riêng lớn còn nửa kia được làm bằng nhôm có khối lượng riêng nhỏ hơn). Lúc này chỉ có thể vẽ được hai vị trí của pháp tuyến $\vec{n}$ sao cho $\vec{R}$ và $\vec{P}$ cùng nằm trên đường đó để thoả mãn điều kiện cân bằng.

Trường hợp mô tả trên hình 7-14a là trường hợp cân bằng không bền. Chỉ một kích động nhỏ cũng làm vật chuyển sang trạng thái khác mà không hồi phục về vị trí ban đầu được. Trường hợp mô tả trên hình 7-14b là trường hợp cân bằng bền. Vật dễ dàng hồi phục về vị trí ban đầu được nếu như phải chịu một kích động đưa nó ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu.

Trường hợp hai vật rắn liên kết không có ma sát tiếp xúc với nhau tại nhiều điểm:

Hãy xét thí dụ vật là bàn có bốn chân liên kết không ma sát với mặt nằm ngang rắn nhẵn. Các phản lực của mặt nằm ngang tác dụng lên bàn đều hướng lên trên vuông góc với mặt tiếp xúc π (xem hình 7-15).

Tổng hợp lực của các phản lực $\vec{R}_i$ là $\vec{R}$ đặt tại C'. Điểm đặt của $\vec{R}$ là C' vật sẽ cân bằng khi $\vec{R}$ trực đối với trọng lực $\vec{P}$. Như vậy điều kiện cân bằng sẽ là *đường thẳng đứng đi qua trọng tâm của vật phải nằm ở trong đa giác chân đế*.



Hình 7-15. Bàn có 4 chân nằm trên mặt nằm ngang nhẵn.

Để chứng minh điều này ta chọn trường hợp đơn giản nhất là bàn chỉ có ba chân. Do lực tác dụng lên bàn chỉ hướng theo phương thẳng đứng OZ, nên ta có:

$$\sum_{i=1}^n F_i^z = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i]_x = M_x = 0 \Rightarrow \sum (y_i F_i^z - z_i F_i^y) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i]_y = M_y = 0 \Rightarrow \sum_i (z_i F_i^x - x_i F_i^z) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i]_z = M_z = 0 \Rightarrow \sum_i (x_i F_i^y - y_i F_i^x) = 0$$

Để thấy rằng chỉ còn 3 phương trình cho các thành phần lực và mômen lực:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i^3 F_i^z = 0 \\ \sum_i^3 y_i F_i^z = 0 \\ \sum_i^3 x_i F_i^z = 0 \end{array} \right. \quad \text{hay} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{P} = 0 \\ y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3 - yP = 0 \\ x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 - xP = 0 \end{array} \right. \quad (7.55)$$

Ta chọn các trục tọa độ như hình 7-16, gốc tọa độ được đặt tại điểm M_1 (chân bàn thứ nhất) còn trục Ox đi qua chân bàn thứ hai (điểm M_2) thì:

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0$$

Trong đó: (x, y) là tọa độ của C' , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) lần lượt là tọa độ của các điểm tiếp xúc M_1 , M_2 , M_3 (chân bàn). (7.55) trở thành:

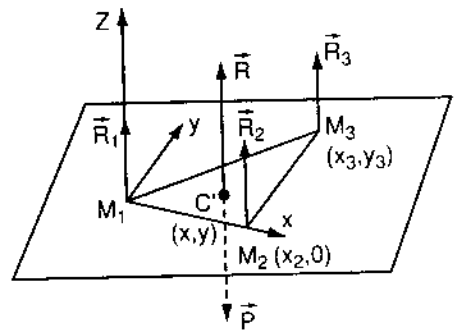
$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + R_2 + R_3 - P = 0 \\ y_3 R_3 - yP = 0 \\ x_2 R_2 + x_3 R_3 - xP = 0 \end{array} \right. \quad (7.56)$$

Trong hệ phương trình (7.56) R_1, R_2, R_3 là các ẩn số, còn các hệ số x_2, x_3, y_3, x, P là hoàn toàn xác định. Phương trình thứ hai cho ta:

$$R_3 = \frac{y}{y_3} P \quad (7.57)$$

Do y, y_3 là cùng dấu nên C' và M_3 cùng phía của đường $M_1 M_2$.

Tương tự có thể chọn gốc tọa độ tại M_2 và chứng minh C' phải nằm ở một phía trong của $M_2 M_3$. Từ đó ta kết luận rằng để bàn đứng cân bằng thì C' (điểm đặt của hợp lực phản lực hoặc hình chiếu của khối tâm bàn lên mặt nằm ngang) phải nằm trong đa giác chân đế.



Hình 7-16. Bàn có 3 chân với 3 điểm tiếp xúc M_1, M_2, M_3 với mặt nằm ngang.

7.9.3. LIÊN KẾT CÓ MA SÁT

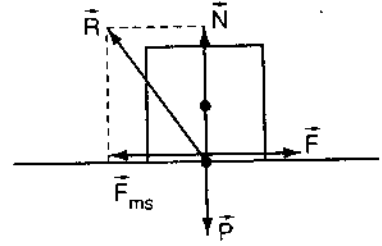
Khi hai vật rắn liên kết có ma sát, thí dụ trường hợp một vật rắn nằm trên một mặt nằm ngang nhẵn (xem hình 7-17). Khi có ma sát, phản lực $\vec{R}$ không vuông góc với mặt tiếp xúc nữa mà có cả thành phần vuông góc lẫn thành phần nằm trong mặt phẳng tiếp xúc (thành phần tiếp tuyến). Ta gọi thành phần tiếp tuyến f_z của phản lực $\vec{R}$ là lực ma sát, thành phần vuông góc với mặt tiếp xúc $\vec{f}_n = \vec{N}$ gọi là phản lực pháp tuyến. Tuy nhiên nếu ta tác dụng một lực kéo vào vật rắn (trên hình 7-17 lực này ký hiệu là $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc) không phải với giá trị nào của lực này vật rắn cũng chuyển động. Nguyên nhân là có lực ma sát nghỉ tác dụng lên vật rắn. Lực này bao giờ cũng bằng và ngược chiều với lực kéo tiếp tuyến đặt vào vật $\vec{F}$. Chỉ khi nào $F > f_{ms}^{max}$ giá trị tới hạn của lực ma sát nghỉ vật mới bắt đầu trượt. Giá trị cực đại của lực ma sát nghỉ tỉ lệ với độ lớn của phản lực pháp tuyến.

$$f_{ms}^{max} = kN \quad (7.58)$$

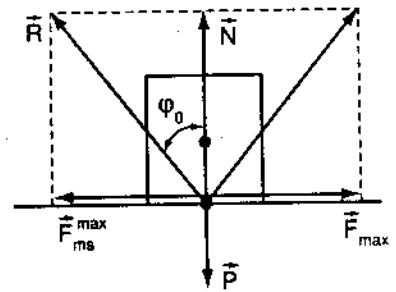
(7.58) là định luật Coulomb về ma sát nghỉ. k là hệ số ma sát tĩnh hay ma sát nghỉ. Ta có thể xây dựng một hình nón mà trục đối xứng của nó trùng với phương của phản lực pháp tuyến N còn mặt bên được tạo bởi sự quay của vectơ phản lực tổng cộng $\vec{R}$ trong trường hợp ma sát nghỉ là cực đại. Hình nón này được gọi là hình nón ma sát nghỉ có nửa góc đỉnh φ_0 xác định bởi:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{f_{ms}^{max}}{N} = k \quad (7.59)$$

Vật rắn sẽ không trượt nếu $\varphi < \varphi_0$ hay nói một cách khác là khi $\vec{R}$ ở bên trong hình nón ma sát nghỉ.



Hình 7-17. Khi có ma sát phản lực tổng cộng $\vec{R}$ không vuông góc với mặt tiếp xúc.



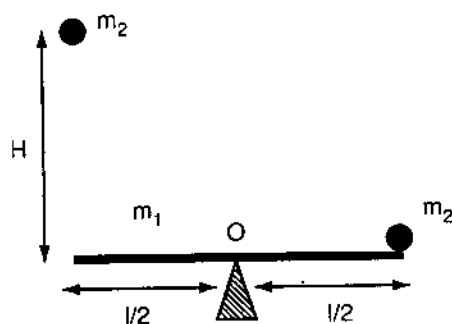
Hình 7-18. Nón ma sát nghỉ với nửa góc đỉnh φ_0 .

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1. Túi cát khối lượng m_2 nảy lên cao bao nhiêu nếu ở bên kia cầu bập bênh ta thả một túi cát hết như vậy từ độ cao H . Khối lượng tấm ván là m_1 và độ dài của nó là l (xem hình 7-19).

Trả lời:

$$h = H \left(\frac{3m_2}{m_1 + 6m_2} \right)^2$$



Hình 7-19.

7.2. Một thanh mảnh khối lượng M độ dài l nằm trên mặt nằm ngang nhẵn. Có một vật nhỏ cũng có khối lượng là M chuyển động với vận tốc v vuông góc với thanh đến đập vào một đầu thanh và dính chặt vào thanh (vật nhỏ đó thực hiện một va chạm mềm trong một khoảng thời gian rất ngắn, xem hình 7-20). Hỏi:

a) Vận tốc khối tâm hệ trước và sau va chạm?

b) Mômen động lượng của hệ đối với khối tâm hệ trước khi xảy ra va chạm mềm?

c) Vận tốc góc đối với khối tâm ngay sau khi va chạm?

d) Độ giảm động năng của hệ khi va chạm?

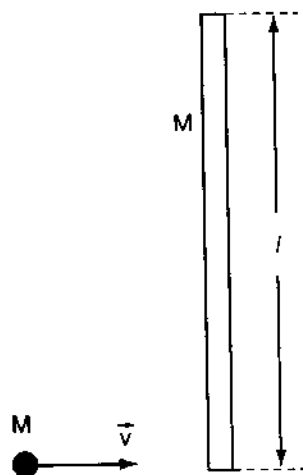
Trả lời: a) $v_C = v/2$;

b) $L = Mvl/4$;

c) $\omega = 6v/5l$;

d) $K_{\text{trước}} = Mv^2/2$;

$K_{\text{sau}} = 2Mv^2/5$.



Hình 7-20.

7.3. Một cái vòng mảnh bán kính R , khối lượng m đang quay với vận tốc góc ω_0 và được đặt thẳng đứng lên mặt phẳng nằm ngang nhẵn. Hỏi vòng sẽ chuyển động

như thế nào nếu hệ số ma sát giữa vòng và mặt phẳng nằm ngang là k ? Hãy xác định sự phụ thuộc vào thời gian của vận tốc của trục vòng và vận tốc góc của sự quay. Hỏi sau bao nhiêu thời gian kể từ lúc đặt vòng lên mặt nằm ngang thì sự trượt sẽ kết thúc? Hỏi bao nhiêu phần của năng lượng ban đầu bị biến thành nhiệt năng?

Trả lời: $t = \frac{\omega_0 R}{kg}$; $\frac{Q}{E} = \frac{1}{2}$.

7.4. Hãy tìm thành phần của tenxơ mômen quán tính của bán cầu đồng nhất bán kính a , khối lượng m trong hệ trục chính có gốc là tâm quả cầu.

Trả lời: $I_{xx} = I_{yy} = \frac{83}{320} ma^2$; $I_{zz} = \frac{2}{5} ma^2$.

7.5. Một thanh đồng chất có đầu trên dựa vào bờ tường thẳng đứng nhẵn còn đầu dưới được tì trên mặt nằm ngang nhẵn. Thanh nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và ban đầu nó lập một góc α với phương thẳng đứng. Hãy chỉ ra rằng nếu để thanh tự nó thì thanh sẽ rời khỏi mặt thẳng đứng khi góc nó tạo với mặt thẳng đứng θ thoả mãn điều

kiện: $\cos\theta = \frac{2}{3} \cos\alpha$.

Chương 8

BÀI TOÁN HAI HẠT VÀ ỨNG DỤNG

Bài toán hai hạt (hạt được hiểu như hai chất điểm) tương tác với nhau là một bài toán quan trọng điển hình của vật lý có lời giải giải tích chính xác. Bài toán với số hạt nhiều hơn hai không có lời giải giải tích mà phải dùng phương pháp số. Do đó nghiên cứu bài toán hai hạt có ý nghĩa rất lớn về mặt phương pháp luận.

8.1. BÀI TOÁN 2 HẠT VÀ CÁC ĐỊNH LUẬT KEPLER

Ta xét trường hợp hai hạt có khối lượng tương ứng là m_1, m_2 tạo thành một hệ kín. Véc tơ bán kính chỉ vị trí của chúng trong hệ quy chiếu quán tính phòng thí nghiệm (PTN) là $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Lực tương tác giữa chúng là lực hấp dẫn còn véc tơ chỉ vị trí tương đối giữa các hạt là $\vec{r}$ (xem hình 8-1) và tổng các nội lực bằng 0. Khối tâm của hệ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = +\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}} \end{cases} \quad (8.1)$$

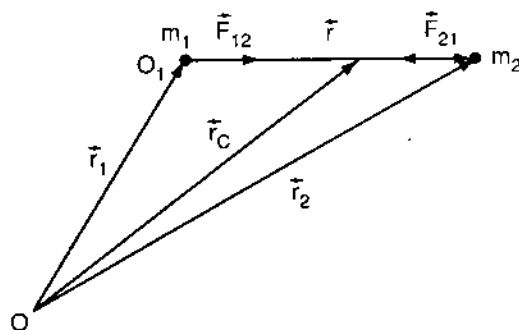
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

$\hat{\vec{r}}$ là véc tơ đơn vị hướng dọc theo véc tơ bán kính $\vec{r}$.

Từ đó suy ra định luật bảo toàn động lượng cho hệ kín: $m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{const} = 0$ (ta đặt bằng 0 và cho rằng ở trạng thái ban đầu khối tâm đứng yên).

$$\dot{\vec{r}}_C = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}}$$



Hình 8-1. Tương tác hấp dẫn giữa hai hạt m_1, m_2 .

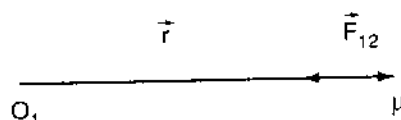
Đưa vào khái niệm khối lượng rút gọn μ :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{hay } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.2)$$

Phương trình chuyển động của hệ hai hạt trong hệ tọa độ mô tả chuyển động tương đối của hạt nọ với hạt kia bây giờ có:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}} \quad (8.3)$$

Phương trình (8.3) mô tả chuyển động của 1 hạt có khối lượng rút gọn μ chịu tác dụng của lực hút xuyên tâm (bằng lực tác dụng tương hỗ giữa hai hạt m_1, m_2) luôn luôn hướng về điểm O_1 - vị trí của hạt 1 (xem hình 8-2). Nói cách khác ta đã đưa bài toán hai hạt về bài toán một hạt chuyển động trong trường lực xuyên tâm với tâm của trường lực là vị trí O_1 của hạt thứ nhất. Dễ thấy khối lượng rút gọn nhỏ hơn hoặc bằng khối lượng nhỏ nhất của một trong hai hạt $\mu \leq m_1, m_2$.



Hình 8-2. Bài toán hai hạt được chuyển thành bài toán một hạt có khối lượng rút gọn μ chuyển động dưới tác dụng của lực hút xuyên tâm.

Ta hãy xét chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu tương đối có điểm gốc gắn với O_1 . Trong trường xuyên tâm mômen động lượng của hạt μ (ký hiệu là $\vec{L}$) bảo toàn). Mômen động lượng của hệ trong hệ quy chiếu PTN ($\vec{L}_0$). Dễ thấy rằng $\vec{L} = \vec{L}_0$:

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}_1, m_1 \dot{\vec{r}}_1] + [\vec{r}_2, m_2 \dot{\vec{r}}_2]$$

vì :

$$\begin{cases} m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = 0 \\ m_1 \dot{\vec{r}}_2 - m_1 \dot{\vec{r}}_1 = m_1 \dot{\vec{r}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

$$\begin{cases} m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = 0 \\ m_2 \dot{\vec{r}}_2 - m_2 \dot{\vec{r}}_1 = m_2 \dot{\vec{r}} \end{cases}$$

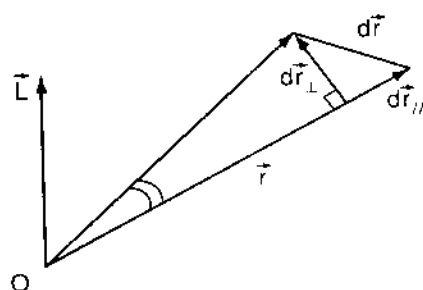
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{L}_0 = - \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} [\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}] + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}]$$

$$\vec{L}_0 = \mu [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \mu \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \text{const}$$

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}, \mu \dot{\vec{r}}] = \vec{L} = \text{const}$$

Hằng số mômen động lượng const có thể nhận được một cách dễ dàng nếu coi vi phân của vectơ bán kính $d\vec{r}$ là tổng của hai thành phần song song và vuông góc với $\vec{r}$ (hình 8-3):



Hình 8-3. Mômen động lượng của hạt μ trong trường xuyên tâm.

$$\vec{L} = \mu \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}_\perp}{dt} + \frac{d\vec{r}_\parallel}{dt} \right] = \mu \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}_\perp}{dt} \right]$$

Độ lớn của mômen động lượng là:

$$L = \mu \cdot r \left| \frac{d\vec{r}_\perp}{dt} \right| = \mu \cdot r \cdot r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$L = \mu \cdot r^2 \cdot \omega = \text{const} \quad (8.4)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng cơ học cho hệ kin hai hạt, năng lượng cơ học E là:

$$E = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{2} \quad (\text{hệ quy chiếu PTN}) \quad (8.5a)$$

Thay tương tự như trên chuyển sang hệ quy chiếu tương đối giữa hai hạt ta được:

$$E = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{hệ quy chiếu tương đối}) \quad (8.5b)$$

Do mômen quỹ đạo $\vec{L}$ bảo toàn quỹ đạo của hạt μ nằm trong mặt phẳng vuông góc với vectơ $\vec{L}$. Quỹ đạo đó là đường cong bậc hai. Ta chuyển sang hệ tọa độ cực trong mặt phẳng để mô tả thuận lợi hơn. Trong hệ tọa độ này quỹ đạo có dạng $r = r(\varphi)$. Ta viết:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

và lấy đạo hàm theo thời gian cho vectơ bán kính chỉ vị trí hạt có khối lượng rút gọn.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \hat{r} + r\omega\hat{\varphi}$$

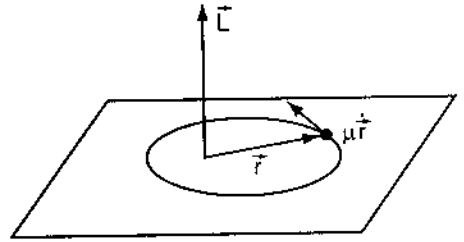
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi})\hat{\varphi}$$

Trong các biểu thức trên, $\hat{\varphi}$ là vectơ đơn vị phương vị vuông góc với vectơ đơn vị xuyên tâm $\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$ là vận tốc góc và $\ddot{\varphi}$ là gia tốc góc. Phương trình chuyển động trong hệ quy chiếu tương đối (8.3) có thể tách ra thành hai thành phần xuyên tâm và phương vị:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (8.6)$$

$$\mu(\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + \mu(2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

So sánh hai vế ta thấy phần chuyển động phương vị thể hiện định luật bảo toàn



Hình 8-4. Quỹ đạo của hạt thứ hai nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\vec{L}$.

mômen động lượng mô tả ở trên (công thức (8.4)) nên ta chỉ cần giải cho phần xuyên tâm:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}} + m.r.\omega^2 \quad (8.7)$$

số hạng thứ hai ở vế phải (8.7) là lực ly tâm.

Theo (8.4) $\omega = \frac{L}{\mu.r^2}$ nên (8.7) trở thành:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\vec{r}} + \frac{L^2}{\mu.r^3} \quad (8.8)$$

Phương trình (8.8) có ý nghĩa như sau: hạt có khối lượng rút gọn μ chuyển động dưới tác dụng của hai lực, lực hấp dẫn hút (số hạng thứ nhất ở vế phải) tỉ lệ r^{-2} , lực đẩy (số hạng thứ hai ở vế phải). Lực đẩy chính là lực quán tính ly tâm nhưng tỉ lệ với r^{-3} , đó là hệ quả của định luật bảo toàn mômen động lượng.

Phương trình (8.8) có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ. Đặt $\frac{1}{r} = y$ thì:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \omega = \frac{dr}{dy} \cdot \frac{dy}{d\varphi} \cdot \omega = - \frac{L}{\mu} \frac{dy}{d\varphi} \\ \ddot{r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{L^2}{\mu^2} y^2 \frac{d^2 y}{d\varphi^2} \end{aligned}$$

Đặt các biểu thức trên vào (8.8) ta được phương trình vi phân bậc 2 cho biến phụ y:

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} = -y + \frac{\mu}{L^2} Gm_1 m_2 \quad (8.9)$$

Đặt $z = y - \frac{\mu}{L^2} Gm_1 m_2$ ta có thể đưa (8.9) về phương trình vi phân bậc 2 tương tự như phương trình của dao động điều hoà (biến góc φ bây giờ đóng vai trò của biến thời gian t trong phương trình dao động điều hoà mà chúng ta đã quen thuộc):

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = 0$$

Tương tự như trường hợp dao động điều hoà, phương trình trên có lời giải là: $z = A.\cos\varphi$. Chuyển về biến khoảng cách r ta có phương trình quỹ đạo $r(\varphi)$:

$$\frac{1}{r} = A.\cos\varphi + \frac{\mu.G.m_1 m_2}{L^2} \quad (8.10)$$

Đó là phương trình của đường Elip. Theo (8.10) hạt thứ hai có thể cách hạt thứ nhất các khoảng cách cực tiểu, cực đại ($r_{\min}$, $r_{\max}$ hay còn được gọi là điểm cực cận và cực viễn). Các khoảng cách đó thỏa mãn các phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{\min}} = A + \frac{\mu \cdot G \cdot m_1 m_2}{L^2} \\ \frac{1}{r_{\max}} = -A + \frac{\mu \cdot G \cdot m_1 m_2}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} = \frac{2\mu \cdot G \cdot m_1 m_2}{L^2} \\ \frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} = 2A \end{cases} \quad (8.11)$$

Tại điểm $r_{\min}$, $r_{\max}$ ta có vận tốc xuyên tâm bằng không $\dot{r}|_{r=r_{\min}, r_{\max}} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \dot{r} \cdot \hat{r} + r\omega\hat{\phi} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \cdot \hat{r} + r\omega\hat{\phi} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Trong đó: Ta ký hiệu chung điểm cực cận, cực viễn là $(r_{\min}, r_{\max}) = r_*$. Phương trình (8.12) cho ta thấy tại điểm cực cận hoặc cực viễn vectơ vận tốc vuông góc với vectơ bán kính (nếu không thì các điểm đó không phải là điểm cực cận hoặc viễn nữa). Mặt khác ta có hệ thức cho năng lượng và mômen động lượng tại r_* theo (8.4) (8.5b) là:

$$E = \frac{\mu \cdot r_*^2 \cdot \omega^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r_*}$$

$$L = \mu \cdot r_*^2 \cdot \omega$$

Từ hai phương trình trên ta nhận được phương trình bậc hai cho $\frac{1}{r_*}$:

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu \cdot r_*^2} - G \frac{m_1 m_2}{r_*} \quad (8.13)$$

Lời giải của phương trình này là:

$$\frac{1}{r_*} = \frac{\mu}{L^2} G m_1 m_2 \pm \sqrt{\left(\frac{G m_1 m_2 \mu}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu \cdot E}{L^2}} \quad (8.14)$$

Dấu cộng ứng với $r_{\min}$ còn dấu trừ ứng với $r_{\max}$:

$$\frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} = \frac{2\mu}{L^2} G m_1 m_2 \quad (8.15a)$$

$$\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} = 2 \sqrt{\left(\frac{G m_1 m_2 \mu}{L^2} \right)^2 + \frac{2\mu \cdot E}{L^2}} \quad (8.15b)$$

Như vậy theo (8.11) (8.15b) hằng số A trong phương trình quỹ đạo là:

$$A = \frac{\mu G m_1 m_2}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu} \cdot \frac{E}{G^2 m_1^2 m_2^2}} \quad (8.16)$$

Tâm sai của Elip được định nghĩa bằng tỷ số sau:

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu} \cdot \frac{E}{G^2 m_1^2 m_2^2}} \quad (8.17)$$

Bình phương hai vế ta có:

$$e^2 - 1 = \frac{2L^2 E}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}$$

Như vậy năng lượng E của hệ phụ thuộc vào tâm sai elip theo quy luật:

$$E = - (1 - e^2) \frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2L^2} \quad (8.18)$$

Phương trình (8.18) cho phép chúng ta thảo luận về mối liên hệ giữa dạng quỹ đạo (xác định bởi tâm sai e) và năng lượng của chuyển động tương đối của một hạt đối với hạt kia:

$0 < e < 1 \rightarrow E < 0$: quỹ đạo là đường elip khép kín.

$e = 1 \rightarrow E = 0$: quỹ đạo là đường parabol mở ($r_{\max} = \infty$).

$e > 1 \rightarrow E > 0$: quỹ đạo là đường hypebol mở.

$e = 0 \rightarrow$ quỹ đạo tròn.

Xét riêng quỹ đạo tròn bán kính là r_0 và năng lượng tương ứng là:

$$E_0 = - \frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{L^2} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \frac{G m_1 m_2}{r_0} \quad (8.19)$$

Vận tốc trên quỹ đạo tròn $v_0 = \text{const}$ do $L = \text{const}$. Mặt khác từ biểu thức của lực hướng tâm ta có:

$$\frac{\mu v_0^2}{r_0} = \frac{G m_1 m_2}{r_0^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{G m_1 m_2}{2r_0}$$

Từ đó ta thấy đối với chuyển động tròn:

$$E_0 = - \frac{1}{2} \mu v_0^2$$

Trong chuyển động tròn, do hấp dẫn giữa hai hạt, năng lượng cơ học bằng một nửa động năng lấy với dấu trừ còn thế năng gấp hai lần động năng lấy với dấu trừ ($U = -2K$, $E = -K$). Năng lượng trên quỹ đạo bất kỳ E có thể biểu diễn qua năng lượng quỹ đạo tròn E_0 .

Nếu v_p (chữ p biểu thị perigey - điểm cực cận) là vận tốc trên quỹ đạo bất kỳ tiếp xúc với quỹ đạo tròn có thể viết là $v_p = \alpha v_0$ (α - tham số dương đặc trưng cho tỷ số vận tốc tại điểm cực cận của hạt thứ hai khi hạt đó chuyển động theo quỹ đạo conic khác so với vận tốc chuyển động trên quỹ đạo tròn).

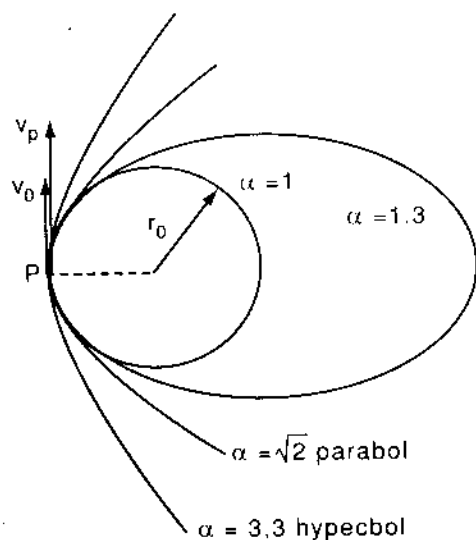
$$E = \frac{1}{2} \mu v_p^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_0}$$

$$E = -E_0(\alpha^2 - 2)$$

$$E = |E_0|(\alpha^2 - 2) \quad (8.20)$$

Hình 8-5 cho thấy các dạng quỹ đạo khi α có các giá trị khác nhau. Vận tốc trên quỹ đạo tròn v_0 chính là vận tốc vũ trụ cấp một (v_I). Điều này có thể thấy rất dễ dàng nếu $m_1 = M$ là khối lượng Trái đất, còn m_2 ($m_2 \ll M$) là khối lượng vệ tinh bay trên quỹ đạo tròn gần bề mặt Trái đất. Bán kính quỹ đạo vệ tinh có thể coi gần đúng bằng bán kính Trái đất $r_0 = R$. Khi đó ta có:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = v_I.$$



Hình 8-5. So sánh vận tốc v_p tại điểm cực cận của các dạng quỹ đạo khác và vận tốc của quỹ đạo tròn v_0 .

Vận tốc vũ trụ cấp một là vận tốc tối thiểu cần truyền cho một vật trên bề mặt trái đất để nó trở thành vệ tinh của trái đất. Do đó giá trị α có nghĩa là so sánh vận tốc hạt ở điểm cực cận với vận tốc vũ trụ cấp một:

* $\alpha = 1$ quỹ đạo là đường tròn.

* $\alpha < \sqrt{2}$ thì $E < 0$: quỹ đạo là đường elip khép kín. Năng lượng tổng cộng là âm hai hạt luôn ở trong trạng thái liên kết.

* $\alpha = \sqrt{2}$ thì $E = 0$: quỹ đạo là đường parabol.

Trường hợp này ứng với hạt thứ 2 có vận tốc vũ trụ cấp hai $v_{II} = v_0\sqrt{2} = v_I\sqrt{2}$, quỹ đạo chuyển từ dạng đường cong kín sang dạng mở. Vận tốc vũ trụ cấp hai còn được gọi là vận tốc thoát ly (vận tốc tối thiểu để hạt thứ hai có thể thoát khỏi lực hút của hạt kia và đi xa ra vô cực).

* $\alpha > \sqrt{2}$ thì $E > 0$: quỹ đạo là đường hypebol mở. Năng lượng tổng cộng là dương, hạt thứ hai có thể rời xa hạt thứ nhất.

Vận tốc vũ trụ cấp III

Đó là vận tốc tối thiểu phải truyền cho vật từ bề mặt Trái đất để nó có thể thoát ra khỏi hệ Mặt trời và đi vào vũ trụ (ký hiệu v_{III}). Đầu tiên ta chọn hệ quy chiếu có gốc trùng với khối tâm Mặt trời, quỹ đạo Trái đất coi như tròn. Vận tốc của Trái đất

chuyển động trên quỹ đạo tròn bán kính $R_0 = 150.10^6$ km xung quanh Mặt trời (khối lượng $M_C = 2.10^{30}$ kg) là:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_C}{R_0}} = 29,8 \text{ km/s}$$

Vận tốc thoát ly khỏi Mặt trời của một chất điểm khối lượng m chuyển động từ khoảng cách R_0 cách tâm Mặt trời (được tính tương tự như cách tính vận tốc vũ trụ cấp II ở trên) bằng:

$$v_0\sqrt{2} = 42,1 \text{ km/s.}$$

Nếu chất điểm đó là con tàu vũ trụ được phóng từ Trái đất thì ta có thể chọn chiều phóng trùng với chiều của vận tốc của Trái đất trên quỹ đạo $\vec{v}_0$ để khi ra khỏi phạm vi hấp dẫn của Trái đất nó có vận tốc:

$$v_0\sqrt{2} - v_0 = 12,3 \text{ km/s.}$$

Bây giờ ta tính v_{III} trong hệ quy chiếu Trái đất. Động năng cần cung cấp cho con tàu khi phóng nó từ bề mặt Trái đất là $\frac{mv_{III}^2}{2}$. Động năng này được dùng để thắng công của lực hấp dẫn của Trái đất và sau khi thoát khỏi ảnh hưởng của lực này, con tàu có vận tốc là 12,3 km/s để thoát ly khỏi Mặt trời. Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$v_{III}^2 = v_{II}^2 + v_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$v_{III} = 16,6 \text{ km/s}$$

Chú ý:

Đối với elip thì tổng hai khoảng cách từ một điểm trên đường elip tới hai tiêu điểm là hằng số: $F_1P + F_2P = \text{const.}$ Phương trình của elip trong hệ tọa độ cực trong ký hiệu chung là:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se} (1 - e \cos \varphi)$$

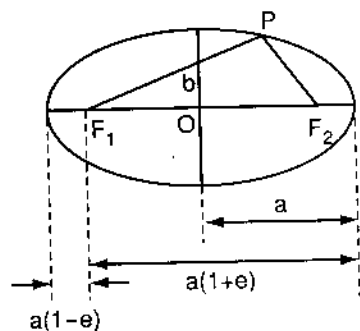
$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$0 < e < 1$: đối với elip (xem hình 8-6).

$e > 1$: đối với hypecbol.

$e = 1$: đối với parabol.

$e = 0$: đối với đường tròn.



Hình 8-6. Các tham số của hình elip.

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2se}{(1 - e^2)} \Rightarrow a = \frac{se}{1 - e^2}$$

8.2. ĐỊNH LUẬT THỨ NHẤT CỦA KEPLER

Từ kết quả trên nếu ta coi một hạt là Mặt trời hạt kia là Trái đất hoặc là một

hành tinh nào đó trong hệ Mặt trời thì có thể mô tả chuyển động của Trái đất hay hành tinh tương đối so với Mặt trời.

Định luật thứ nhất của Kepler phát biểu như sau: Đường cong quỹ đạo của hành tinh là elip, Mặt trời đứng ở một trong hai tiêu điểm.

Phương trình quỹ đạo trong hệ tọa độ cực có dạng (8.10) với hằng số A cho bởi (8.16):

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + \frac{\mu \cdot G \cdot m_1 m_2}{L^2} \quad \text{ở đây } A = \frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu} \cdot \frac{E}{G^2 m_1^2 m_2^2}} \quad (8.21)$$

Chú ý theo cách viết thông thường:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se} (1 - e \cos \varphi) \quad \text{thì} \quad \frac{1}{se} = \frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2} \quad (8.22)$$

s – tham số của elip:

$$-\frac{1}{s} = A$$

Bán trục dài a và ngắn b liên hệ với nhau bằng biểu thức $b = a \sqrt{1 - e^2}$.

Ngoài ra ta còn thấy *năng lượng của chuyển động quỹ đạo hành tinh chỉ phụ thuộc bán trục chính a*. Thật vậy $2a = r_{\min} + r_{\max}$ mà theo (8.11) thì:

$$r_{\min} = \frac{1}{\frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2} + A}; \quad r_{\max} = \frac{1}{\frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2} - A}$$

và:

$$2a = \frac{2 \frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2}}{\left[\frac{\mu \cdot G m_1 m_2}{L^2} \right]^2 - A^2}$$

Sử dụng (8.16) ta được:

$$|E| = \frac{1}{2} \frac{G m_1 m_2}{a} \quad (8.23)$$

8.3. ĐỊNH LUẬT THỨ HAI CỦA KEPLER

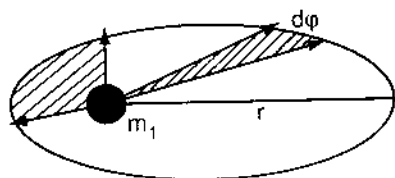
Định luật thứ hai của Kepler: bán kính vectơ kẻ từ tâm mặt trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau sau những khoảng thời gian bằng nhau (xem hình 8-7).

Định luật này nói về sự không đổi của vận tốc diện tích v_s và là hệ quả trực tiếp của định luật bảo toàn mômen động lượng khi hạt chuyển động trong trường xuyên tâm. Thật vậy theo định nghĩa về vận tốc diện tích:

$$v_s = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r \cdot r \cdot d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

vì : $L = \mu r^2 \omega = \text{const}$

nên: $v_s = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{const}$ (8.24)



Hình 8-7. Khái niệm vận tốc diện tích.

8.4. ĐỊNH LUẬT THỨ BA CỦA KEPLER

Định luật thứ ba của Kepler phát biểu như sau: *Tỷ số của bình phương chu kỳ quay của hành tinh xung quanh Mặt trời và lập phương của bán trục lớn quỹ đạo của nó là một hằng số.*

Diện tích của một chu kỳ là:

$$S = v_s \cdot T = \frac{T \cdot L}{2 \cdot \mu}$$

$$\pi ab = \frac{T \cdot L}{2 \cdot \mu} \Rightarrow T = \frac{2\pi ab\mu}{L}$$

Vì :

$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a (1 - e^2) \mu^2}{L^2}$$

Mặt khác:

$$a(1 - e^2) = se = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2} \quad (\text{theo (8.22)})$$

suy ra:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (8.25a)$$

Trường hợp cá biệt khi $m_1 = M \gg m_2$ như trường hợp hành tinh chuyển động xung quanh Mặt trời, có thể bỏ qua khối lượng của hành tinh m_2 mà không phạm phải sai số đáng kể, (8.25a) trở thành:

suy ra:
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (8.25b)$$

8.5. ĐỊNH LÝ VIRIAL

Định lý Virial có nhiều ứng dụng trong thực tế và được phát biểu như sau: *Giá trị trung bình của động năng của hệ các hạt chuyển động trong một vùng không gian giới hạn dưới tác dụng của các lực tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách ($F \sim \frac{C}{r^2}$) bằng một nửa giá trị trung bình của thế năng (lấy theo một khoảng thời gian lớn) với dấu âm:*

$$\langle K \rangle = - \frac{1}{2} \langle U \rangle \quad (8.26)$$

Dấu $\langle \dots \rangle$ biểu thị trung bình theo thời gian.

Để đơn giản trước hết ta chứng minh cho một hạt chuyển động trong một vùng không gian hạn chế sau một thời gian rất lâu. Hàm thế năng của hạt có dạng:

$$U(r) = \frac{C}{r}; \quad C \text{ là hằng số } C < 0; \quad \vec{F} = -\text{grad}U$$

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{r} = M \cdot \dot{\vec{v}}, \text{ nhân vô hướng } \vec{r} \text{ vào hai vế:}$$

$$(\vec{r}, \vec{F}) = M(\vec{r}, \dot{\vec{v}}) = \frac{C}{r} = U(r)$$

Mặt khác: $M \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) = M(\dot{\vec{r}}, \vec{v}) + (M\vec{r}, \dot{\vec{v}}) = Mv^2 + U(r)$

hay: $M \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) = 2K + U$

với: $K = \frac{1}{2} Mv^2$

Do đó:

$$\frac{1}{2} M \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} U(r)$$

$$0 = \left\langle \frac{1}{2} M \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) \right\rangle = \langle K \rangle + \frac{1}{2} \langle U \rangle$$

suy ra: $\langle K \rangle = - \frac{1}{2} \langle U \rangle \text{ (đpcm)}$

Giá trị trung bình của đại lượng $\frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v})$ của hạt sau

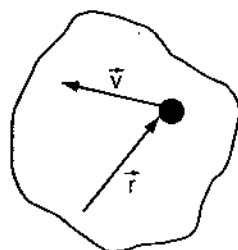
một khoảng thời gian rất lớn (hạt đi qua hầu hết các điểm của vùng không gian hạn chế hình 8-8) sẽ bằng 0.

Ta có thể chứng minh như sau: phép lấy trung bình theo thời gian được viết là:

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) dt$$

Thời gian chuyển động T được coi là rất lớn ($T \rightarrow \infty$):

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) \right\rangle = \frac{1}{T} \left\{ (\vec{r}, \vec{v}) \Big|_T - (\vec{r}, \vec{v}) \Big|_0 \right\}$$



Hình 8-8. Hạt chuyển động trong vùng không gian hạn chế.

Vì chuyển động trong vùng không gian hạn chế nên tích vô hướng của bán kính vectơ và vận tốc hạt là đại lượng bị chặn trên bởi một số α nào đó:

$$(\vec{r}, \vec{v}) \leq \alpha$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r}, \vec{v}) \right\rangle \leq \frac{\text{const}}{T} \Big|_{T \rightarrow \infty} = 0$$

do đó:

$$\langle K \rangle + \frac{1}{2} \langle U \rangle = 0 \Rightarrow \langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

Chứng minh định lý Virial cho hệ hạt chuyển động trong không gian hạn chế.

Ký hiệu $m_1, m_2, \dots, m_N$ là khối lượng các hạt.

$$U_{ij} = \frac{C_{ij}}{r_{ij}} \text{ là thế năng tương tác giữa cặp hai hạt } ij \quad (8.27)$$

Trong đó C_{ij} - hằng số âm.

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j ; \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Thế năng toàn phần của hệ là:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}} \quad (8.28)$$

Dấu ' biểu thị $i \neq j$ và hệ số $1/2$ biểu thị tương tác giữa mỗi cặp hạt chỉ tính có một lần.

Định luật thứ hai của Newton cho hạt i được viết như sau:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \quad (8.29)$$

$$\sum_i m_i (\vec{r}_i, \dot{\vec{v}}_i) = \sum_i \sum_j \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{r}_i \quad (8.30)$$

Ta xét đạo hàm theo thời gian của vế bên trái của phương trình trên:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \dot{\vec{v}}_i)$$

hay:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \dot{\vec{v}}_i)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{r}_i \quad (8.31)$$

Trong vế bên phải của (8.31) có thể đổi chỉ số $i \leftrightarrow j$ và tổng theo i bây giờ có $i \neq j$

bên phải = $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \vec{r}_j$. Phương trình (8.31) trở thành:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{r}_j \quad (8.32)$$

cộng (8.31) và (8.32), chú ý rằng $i \neq j$ và $j \neq i$ là như nhau ta có:

$$2 \left\{ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\forall i: (\vec{r}_i - \vec{r}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = r_{ij}^2$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) - \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{C_{ij}}{r_{ij}} = U$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \frac{1}{2} U$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i, \vec{v}_i) dt = \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{T} \left\{ (\vec{r}_i, \vec{v}_i) \Big|_T - (\vec{r}_i, \vec{v}_i) \Big|_0 \right\} = 0$$

Do chuyển động trong không gian hạn chế $(\vec{r}_i, \vec{v}_i) < \alpha$. Khi $T \rightarrow \infty$ thì tổng trên bằng 0. Ta được:

$$0 = \langle K \rangle + \frac{1}{2} \langle U \rangle$$

$$\text{Hay:} \quad \langle K \rangle = - \frac{1}{2} \langle U \rangle \text{ (đpcm)} \quad (8.33)$$

Định lý Virial có thể áp dụng cho các điện tử trong nguyên tử, cho hệ vật lý gồm nhiều hạt chuyển động trong không gian hạn chế.

Thí dụ: Hãy tính nhiệt độ bên trong Mặt trời.

Thế năng hấp dẫn của Mặt trời khối lượng M_C , bán kính R_C là:

$$U_C = \frac{3GM_C^2}{5R_C}$$

Năng lượng nhiệt trung bình của 1 nguyên tử:

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k_B T \quad (k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})$$

Động năng trung bình của N nguyên tử chất tạo nên mặt trời là:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} N k_B T_{av} \quad (T_{av} - \text{nhiệt độ trung bình của Mặt trời}).$$

Áp dụng định lý Virial ta được:

$$T_{av} = \frac{G M_C \mu_C}{5 R_C k_B}$$

Trong đó $\mu_C = \frac{M_C}{N}$ - khối lượng của một nguyên tử chất tạo nên Mặt trời, R_C - bán kính Mặt trời. Đặt các giá trị $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ kg (khối lượng Mặt trời), $R_C = 7 \cdot 10^8$ m, $\mu_C = 3 \cdot 10^{-27}$ kg (khoảng 2 lần khối lượng proton), ta được $T_{av} \approx 10^7$ K.

8.6. BÀI TOÁN HAI HẠT TRONG MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP KHÁC

Bài toán hai hạt còn liên quan đến nhiều các vấn đề vật lý khác. Thí dụ như bài toán chuyển động của hai khối lượng gắn ở hai đầu lò xo đàn hồi, con lắc kép (hai chất điểm được nối với nhau bằng lò xo đàn hồi và dao động tự do) bài toán nguyên tử Hydro khi điện tử chuyển động trong trường xuyên tâm của hạt nhân nguyên tử (proton), điện tử tương tác Coulomb với lỗ trống trong các chất bán dẫn tạo nên trạng thái liên kết exciton, bài toán điện tử tương tác mạnh với phonon phân cực trong mẫu polaron tương tác mạnh của Feynman... Chúng ta sẽ xem xét một số trường hợp cổ điển trên các ví dụ bài tập.

Thí dụ:

Tìm tần số dao động của phân tử gồm hai nguyên tử khối lượng m_1, m_2 .

Phân tử là cấu hình bền vững được tạo thành do hai nguyên tử tương tác với nhau. Cho rằng tương tác giữa hai nguyên tử gần trạng thái năng lượng thấp nhất được mô tả bằng lực đàn hồi thì thế năng tương tác giữa hai nguyên tử có dạng:

$$U(r) = \frac{C(r - r_0)^2}{2} \quad (8.34)$$

r - khoảng cách giữa hai nguyên tử, r_0 - khoảng cách đo trong trạng thái cân bằng. Lực tác dụng tương hỗ lên mỗi nguyên tử có độ lớn:

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -C(r - r_0) \quad (8.35)$$

Khi phân tử dao động tự do, hai nguyên tử chuyển động còn khối tâm đứng yên. Phương trình chuyển động trong hệ quy chiếu tương đối của nguyên tử nọ đối với nguyên tử kia tương tự như phương trình (8.3) nhưng cần thay lực hấp dẫn bằng lực đàn hồi:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -C(r - r_0) \hat{\vec{r}} \quad (8.36)$$

Nếu phân tử không quay thì hướng của véctơ $\vec{r}$ không đổi $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r}$. Phương trình trên trở thành:

$$\mu \ddot{r} = -C(r - r_0) \quad (8.37)$$

(Còn nếu phân tử quay, phương trình toàn bộ phải như (8.6)). (8.37) là phương trình hạt khối lượng μ dao động điều hoà với tần số:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{\mu}} = \sqrt{\frac{C(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (8.38)$$

Bây giờ ta thử áp dụng cho phân tử HF và HCl. Từ các phép đo phổ người ta thấy tần số dao động cơ bản của HF và HCl là:

$$f_0(\text{HF}) = \frac{\omega_0(\text{HF})}{2\pi} = 1,202 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$f_0(\text{HCl}) = \frac{\omega_0(\text{HCl})}{2\pi} = 0,871 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Sử dụng các số liệu trên ta có thể đánh giá hằng số lực tương tác C_{HF} , C_{HCl} . Ta có:

$$\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{19}; \quad \mu_{\text{HF}} \approx 0,950$$

$$\frac{1}{\mu_{\text{HCl}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{35}; \quad \mu_{\text{HCl}} \approx 0,973$$

Khối lượng rút gọn khác nhau không nhiều vì nó bị quyết định chủ yếu bởi thành phần có khối lượng nhẹ hơn. Tỷ số các hằng số lực cho hai loại phân tử có thể đánh giá từ:

$$\frac{C_{\text{HF}}}{C_{\text{HCl}}} = \frac{(\mu \omega_0^2)_{\text{HF}}}{(\mu \omega_0^2)_{\text{HCl}}} \approx \frac{54 \cdot 10^{28}}{29 \cdot 10^{28}} \approx 1,86$$

Nếu biết hằng số lực của phân tử này khá chính xác có thể đánh giá được hằng số lực của phân tử kia. Thí dụ $C_{\text{HF}} = 9 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ (đánh giá từ năng lượng liên kết) thì $C_{\text{HCl}} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1. Hai ngôi sao trong một hệ sao kép có cùng khối lượng m cách nhau một khoảng $2r$ và chuyển động theo một quỹ đạo tròn xung quanh khối tâm. Một trong hai ngôi sao bị nổ làm một phần khối lượng nhỏ văng đi và phần còn lại có vận tốc giật lùi ngay sau khi nổ là v_1 . Hỏi giá trị của v_1 lớn nhất là bao nhiêu để phần còn lại còn bị liên kết hấp dẫn với ngôi sao kia của hệ sao kép ban đầu (cho rằng khối lượng của phần văng đi rất bé).

Trả lời: $v_{1m} = (2\sqrt{2} - 1)v$.

Giải:

Đầu tiên ta tính vận tốc v một trong hai ngôi sao (xem hình 8-9, v và v_1 là vận tốc đo trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm K, khối tâm C đứng yên trong hệ quy chiếu đó trước khi nổ).

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{m^2}{(2r)^2} = G \frac{m^2}{4r^2}$$

Từ đó, ta có:

$$v^2 = G \frac{m}{4r} \quad (1)$$

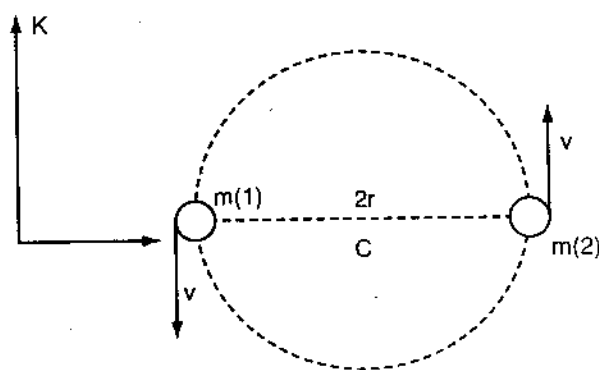
Vận tốc của khối tâm hệ sau khi nổ (cho rằng mảnh to của ngôi sao bị nổ còn lại khối lượng phần văng đi rất bé $\delta m \ll m$):

$$v_c = \frac{mv - (m - \delta m)v_1}{2m - \delta m} \approx \frac{v - v_1}{2}$$

Vận tốc của ngôi sao 2 trong hệ quy chiếu khối tâm C sau khi nổ là:

$$v - \frac{v - v_1}{2} = \frac{v}{2} + \frac{v_1}{2} = \frac{v + v_1}{2} = v'$$

Hệ sẽ không bị phá huỷ liên kết khi động năng mới nhỏ hơn công tách hai ngôi sao đó (khối lượng vẫn xấp xỉ $2m$, vận tốc mới v'):



Hình 8-9.

$$\frac{2mv'^2}{2} \leq \frac{Gm^2}{2} \quad \text{hay} \quad v'^2 \leq \frac{Gm}{2} \quad (2)$$

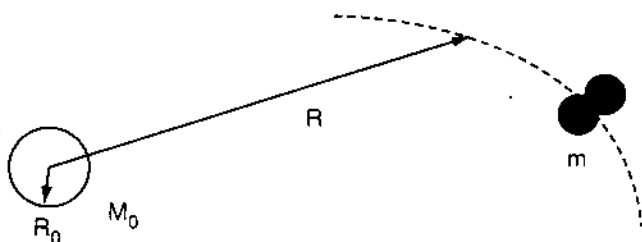
$$v_1 \leq (2\sqrt{2} - 1)v = (2\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{Gm}{4r}}$$

(ở đây ta cho rằng δm không ảnh hưởng tới kết quả)

Lời giải chính xác hơn khi tính đến δm là:

$$\frac{v_1}{v} = 2\left(2 - \frac{\delta m}{m}\right)^{1/2} - 1$$

8.2. Trạm vũ trụ là hai nửa hình cầu sát nhau cùng khối lượng m bán kính r cùng chuyển động theo quỹ đạo tròn xung quanh hành tinh bán kính R_0 khối lượng M_0 (xem hình 8-10). Khoảng cách từ điểm tiếp xúc giữa hai nửa trạm hình cầu tới tâm hành tinh bằng R . Hỏi độ lớn áp lực của nửa trạm này lên nửa trạm kia? Với R bằng bao nhiêu thì sức hút giữa hai nửa trạm không thể giữ chúng cùng chuyển động với nhau. Khối lượng riêng của trạm bằng khối lượng riêng của hành tinh.



Hình 8-10.

Trả lời: $N = \frac{Gm^2}{4r^2} - \frac{GmM(3rR^2 + r^3)}{R(R^2 - r^2)^2}$; $R = R_0 \sqrt[3]{12}$.

8.3. Cho rằng Trái đất là một quả cầu đồng nhất hoàn toàn bị nước phủ kín với khối lượng riêng của nước là $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. Khi Trái đất quay mặt nước có dạng elipxoid tròn xoay phình ra ở xích đạo. Hãy đánh giá độ chênh lệch mực nước ở cực và xích đạo nếu giả thiết mặt biển là mặt đẳng thế năng (mặt có thế năng không đổi). Lực hấp dẫn của các phần tử nước với nhau có thể bỏ qua.

Trả lời: $\frac{D_{xd} - D_c}{R} = \frac{\omega^2 R}{2g} = \frac{1}{298}$ ở đây D_{xd} , D_c là mực nước biển ở xích đạo và ở cực tính từ bề mặt trái đất (trái đất được coi là quả cầu đồng nhất bán kính R) còn ω là vận tốc góc của sự quay trái đất.

Gợi ý: Ở khoảng cách r tính từ tâm trái đất một phần tử nước khối lượng m chịu tác dụng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm $F(r) = -\frac{GMm}{r^2} + \omega^2 r$. Lực tổng cộng đó có thể coi là lực của trường thế với hàm thế năng $U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Coi mặt nước

biến là mặt đẳng thế năng, lập biểu thức cho thế năng tại $R + D_{sd}$ và $R + D_c$ ta sẽ nhận được kết quả trên.

8.4. Ba hạt như nhau đứng ở đỉnh một hình tam giác đều cạnh a được truyền như nhau ba vận tốc ban đầu v_0 hướng từ hạt nọ tới hạt kia theo chiều kim đồng hồ. Hãy tìm khoảng cách xa nhất và gần nhất của các hạt tính từ khối tâm của hệ ba hạt đó?

Trả lời:
$$r_{\max, \min} = \frac{1}{\left(\frac{2GM}{a} - v_0^2\right)} \left\{ \frac{Gm}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{G^2 m^2}{3} + \frac{a^2 v_0^2}{12} \left(v_0^2 - \frac{2Gm}{a}\right)} \right\}$$

8.5. Cân khối lượng trong trạng thái không trọng lượng (kỳ thi Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần thứ 5 tại Việt Nam 4-2004).

Trong con tàu vũ trụ bay trên quỹ đạo vòng quanh trái đất tồn tại trạng thái không trọng lượng cho nên người ta không thể dùng phương pháp thông thường để đo trọng lượng và từ đó rút ra khối lượng của nhà du hành vũ trụ. Trên trạm vũ trụ số 2 và một số con tàu vũ trụ khác có được lắp đặt thiết bị đo khối lượng vật thể. Thiết bị đó gồm một cái ghế được gắn với một đầu của một lò xo. Đầu kia của lò xo được gắn với một điểm cố định của trạm hay con tàu vũ trụ. Trục của lò xo đi qua trọng tâm của con tàu. Độ cứng của lò xo là $k = 605,5 \text{ N/m}$.

a) Khi con tàu ở trên mặt đất và không chuyển động thì ghế (khi không có nhà du hành vũ trụ ngồi ở trên) dao động với chu kỳ $T_0 = 1,28195 \text{ s}$. Hãy tính khối lượng của ghế m_0 .

b) Khi con tàu vũ trụ bay trên quỹ đạo xung quanh trái đất nhà du hành vũ trụ buộc mình vào ghế và đo chu kỳ dao động của ghế T . Nhà du hành vũ trụ đo được $T = 2,33044 \text{ s}$ và tính ra khối lượng của mình. Anh ta nghi ngờ kết quả đó và cố gắng xác định giá trị thực khối lượng của mình. Anh ta lại đo chu kỳ dao động của ghế (không có người ngồi) và nhận được giá trị $T_0 = 1,27395 \text{ s}$. Hỏi giá trị thực của khối lượng nhà du hành vũ trụ?

Trả lời:

$$m = m_0 \frac{1 - \frac{T_0^2}{T^2}}{\frac{T_0^2}{T^2} - \frac{m_0}{M + m_0}} = 61,72 \text{ kg}.$$

Chương 9

DAO ĐỘNG

9.1. DAO ĐỘNG TỬ ĐIỀU HÒA 1 CHIỀU

Dao động tử điều hoà 1 chiều là thí dụ điển hình của chuyển động có chu kỳ và đóng vai trò quan trọng trong vật lý cổ điển cũng như lượng tử. Các hệ vật lý cổ điển tương tự dao động tử 1 chiều có thể là:

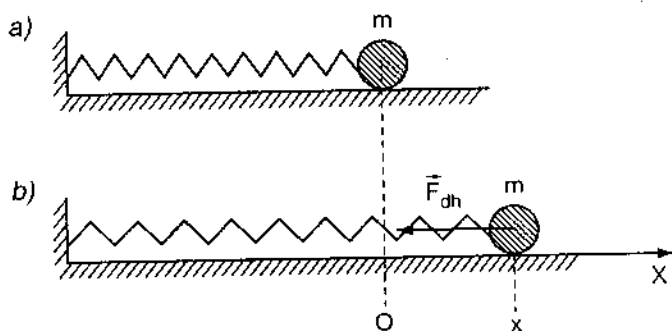
- Dao động bé của con lắc toán học.
- Dao động bé của khối lượng gắn ở một đầu lò xo trên mặt ngang.
- Mạch điện LC tuyến tính.

Tính chất quan trọng của dao động tử một chiều là:

- Tần số không phụ thuộc biên độ.
- Hiệu ứng tổng hợp gây bởi nhiều lực kích thích có thể nhận được bằng cách tổng hợp các hiệu ứng gây ra bởi các lực thành phần. Nói một cách khác là nó có tính chất tuân theo nguyên lý chồng chập.

9.1.1. CHẤT ĐIỂM GẮN Ở ĐẦU LÒ XO ĐÀN HỒI

Xét chất điểm khối lượng m gắn ở đầu lò xo nằm trên mặt phẳng ngang, chất điểm có thể chuyển động dọc theo phương lò xo trên mặt nằm ngang không ma sát. Ban đầu lò xo ở trạng thái tự do (hình 9-1a). Sau đó chất điểm được đưa ra khỏi vị trí cân bằng (bằng cách dùng ngoại lực kéo lò xo) rồi thả cho chất điểm dao động tự do. Vị trí tức thời của chất điểm được đặc trưng bởi toạ độ $x = x(t)$ (hình 9-1b). Độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng x coi là bé, do đó lực đàn hồi tác dụng lên chất điểm tuân theo định luật Hooke:



Hình 9-1. Chất điểm dao động dưới tác dụng của lực đàn hồi.

$$F = -Cx \quad (C - \text{độ cứng của lò xo}) \quad (9.1)$$

Nếu khối lượng lò xo là không đáng kể, có thể bỏ qua được thì phương trình chuyển động của hệ là:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -Cx \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

với $\omega_0^2 = \frac{C}{m}$; ω_0 - tần số dao động.

Lời giải của phương trình này có dạng hàm tuần hoàn:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.3)$$

A, φ là hằng số được gọi là biên độ và pha ban đầu của dao động.

Vận tốc của chất điểm và gia tốc của nó là:

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ a &= \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \quad (9.4)$$

Động năng và giá trị trung bình động năng của dao động tử là:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2\pi/\omega_0} dt \end{aligned}$$

Tích phân lấy theo khoảng thời gian bằng chu kỳ. Sử dụng đẳng thức:

$\cos^2 y = \frac{1}{2} (1 + \cos 2y)$ ta thấy ngay giá trị trung bình của $\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ sau 1 chu kỳ bằng 1/2, như vậy giá trị trung bình của động năng là hằng số:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \quad (9.5)$$

Thế năng của dao động tử là:

$$U = C \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} C A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.6)$$

Giá trị trung bình của bình phương hàm sin trong khoảng thời gian một chu kỳ bằng 1/2.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2}$$

vì $\omega_0^2 = \frac{C}{m}$ do đó giá trị trung bình của thế năng là:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} C A^2 = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2 \quad (9.7)$$

Theo (9.4) và (9.6) giá trị trung bình của động năng và thế năng của dao động tử điều hoà là bằng nhau $\langle K \rangle = \langle U \rangle$. Đó là tính chất của dao động tử điều hoà. Ta chú ý rằng dao động tử phi điều hoà và dao động tử tắt dần không có tính chất trên.

Năng lượng cơ học của dao động tử điều hoà luôn là hằng số và bằng giá trị trung bình của nó trong một chu kỳ:

$$E = U + K = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\langle E \rangle = \langle U \rangle + \langle K \rangle = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \quad (9.8)$$

9.1.2. MẠCH DAO ĐỘNG LC GỒM TỤ ĐIỆN CÓ ĐIỆN DUNG C VÀ CUỘN DÂY CÓ ĐỘ TỰ CẢM L

Xét mạch điện không có điện trở thuần chỉ có tụ điện có điện dung C và cuộn dây có độ tự cảm L được nối với một hiệu điện thế xoay chiều V (xem hình 9-2).

Hiệu điện thế trên cuộn cảm được xác định như sau:

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.9)$$

I – cường độ dòng điện.

Hiệu điện thế trên các bản tụ V_C có dạng:

$$V_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int Idt \quad (9.10)$$

Q là điện tích trên bản tụ (bằng tích phân dòng theo thời gian). Dấu trừ trong (9.10) được chọn với lý do tiện lợi. Tổng các hiệu điện thế bằng 0 trong mạch kín, nên:

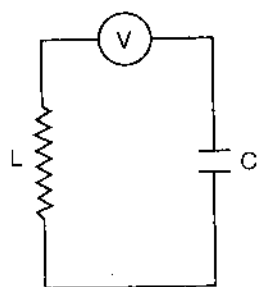
$$V + V_L + V_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt = V$$

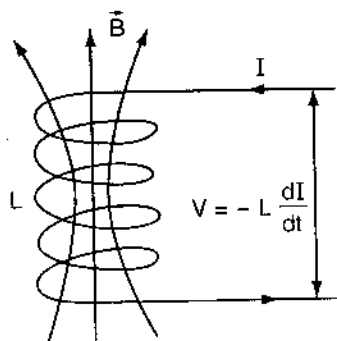
Vi: $\frac{dQ}{dt} = -I; \quad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{dI}{dt}$

nên phương trình trên trở thành:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = -V \quad (9.11)$$



a)



b)

Hình 9-2. a) Khung dao động LC; b) Cuộn cảm với hệ số tự cảm L có dòng I biến thiên chạy qua. Hiệu điện thế trên hai đầu cuộn dây tỷ lệ với tốc độ biến thiên của dòng $V = -L \frac{dI}{dt}$.

Nếu so sánh với phương trình cho dao động từ điều hoà là chất điểm gắn ở đầu lò xo:

$$m\ddot{x} + C_{\text{đàn hồi}}x = F$$

Ta thấy có sự tương đương:

$$Q \leftrightarrow x; \quad L \leftrightarrow m; \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{\text{đàn hồi}}; \quad -V \leftrightarrow F \quad (9.12)$$

Lời giải cho phương trình mạch LC khi $V = 0$ có thể tìm tương tự như cho dao động từ điều hoà $Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$. Nếu ban đầu tụ được nạp điện đến điện tích Q_0 thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$ còn $Q = Q_0 \cos \omega_0 t$. Ngoài ra:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$I = I_0 \sin \omega_0 t \quad (9.13)$$

với:

$$I_0 = Q_0 \omega_0; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Hiệu điện thế trên tụ là:

$$V_C = -\frac{1}{C} \int Idt = \frac{Q_0}{C} \cos \omega_0 t = \frac{I_0}{\omega_0 C} \cos \omega_0 t \quad (9.14)$$

Còn hiệu điện thế trên cuộn cảm thay đổi theo thời gian với quy luật:

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega_0 \cos \omega_0 t \quad (9.15)$$

9.1.3. DAO ĐỘNG TỪ ĐIỀU HOÀ LÀ CON LẮC TOÁN HỌC

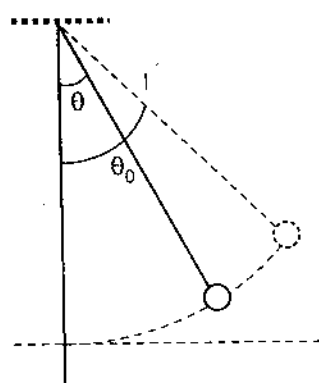
Xét chất điểm gắn ở đầu sợi dây có độ dài l dao động tự do trong mặt phẳng thẳng đứng. Dây được coi là không co giãn và khối lượng không đáng kể, góc lệch của sợi dây so với phương thẳng đứng θ là bé (hình 9-3). Chúng ta phải tìm tần số dao động của con lắc và li độ tức thời $\theta(t)$ của nó. Khi dây lệch một góc θ , khối lượng m có độ cao h so với vị trí cân bằng thấp nhất là:

$$h = l - l \cos \theta$$

Thế năng của con lắc là: $U = mgh$

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) \quad (9.16)$$

Vì vận tốc của con lắc ở độ cao h là $v = l\dot{\theta}$ nên động năng của nó phụ thuộc vào vận tốc góc theo quy luật:



Hình 9-3. Con lắc toán học.

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \quad (9.17)$$

Năng lượng cơ học của con lắc chuyển động trong trường thế là bảo toàn và bằng hằng số E:

$$E = K + U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

Từ đó suy ra:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos\theta + \frac{2(E - mgl)}{ml^2}$$

Nếu đặt:

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2; \quad C = 2 \left(\frac{E}{ml^2} - \frac{g}{l} \right)$$

ta có phương trình:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos\theta + C \quad (9.18)$$

Mặt khác ta có điều kiện ban đầu khi $t = 0$ thì $\theta = \theta_0$, vận tốc ban đầu $v_0 = l\dot{\theta} = 0$.

Chu kỳ dao động T của con lắc được tìm từ phương trình:

$$\frac{d\theta}{dt} = [2\omega_0^2 \cos\theta + C]^{1/2} \text{ hay } dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2}\omega_0 \left[\cos\theta + \frac{C}{2\omega_0^2} \right]^{1/2}} \quad (9.19)$$

Góc lệch lớn nhất xảy ra khi vận tốc con lắc bằng 0 hay khi vận tốc góc $\dot{\theta} = 0$, do đó:

$$\cos\theta_0 = -\frac{C}{2\omega_0^2}$$

Theo (9.19) ta có biểu thức tường minh cho chu kỳ dao động của con lắc T:

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left[\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{1/2}}$$

Sử dụng phép thế sau:

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} = \sin\psi; \quad d\theta = 2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \frac{\cos\psi}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\psi \quad (9.20)$$

ta được:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}} \quad (9.21)$$

Tích phân trong biểu thức (9.21) của T được gọi là tích phân elip toàn phần loại 1:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{với } k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (9.22)$$

Kết quả của tích phân có dạng:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \right]^2 k^{2n} \right\} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}$$

Một số số hạng đầu tiên của tích phân đó là:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right\}$$

Do đó biểu thức gần đúng của chu kỳ dao động của con lắc trở thành:

$$T = 4 \sqrt{\frac{1}{g}} K(k) = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right\} \quad (9.23)$$

Phương trình dao động của con lắc dễ dàng tìm được khi đạo hàm biểu thức năng lượng hoặc (9.18) theo thời gian:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (9.24)$$

Nếu góc dao động là bé ta có thể sử dụng khai triển $\sin \theta$ vào chuỗi Taylor:

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots \quad (9.25)$$

Gần đúng $\sin \theta \approx \theta$ cho ta dao động điều hoà. Khi tính tới số hạng bậc cao ta có dao động từ phi tuyến. Thí dụ khi tính tới θ^3 thì (9.24) có dạng:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0 \quad (9.26)$$

Đó là phương trình dao động từ phi tuyến với lời giải được tìm từ phép thử:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t) + \epsilon \theta_0 \sin(3\omega t) \quad (9.27)$$

(ở đây là một tham số bé $\epsilon \ll 1$)

Nguyên nhân sự có mặt của số hạng $\sin 3\omega t$ có thể thấy được nếu chú ý tới biểu thức

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta). \text{ Để đơn giản, ta giả định khi } t = 0 \text{ thì } \theta = 0 \text{ (góc lệch cực đại}$$

của dao động vẫn là θ_0). Các số hạng trong (9.26) thể hiện qua (9.27) như sau:

$$\ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \sin \omega t - 9\epsilon \theta_0 \omega^2 \sin 3\omega t$$

$$\theta^3 = \theta_0^3 (\sin^3 \omega t + 3\epsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \dots)$$

Bỏ qua các số hạng tỷ lệ $\epsilon^2, \epsilon^3 \dots$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) - 9\epsilon \omega^2 \theta_0 \sin(3\omega t)$$

$$\omega_0^2 \theta = +\omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \varepsilon \theta_0 \sin(3\omega t) \quad (9.28)$$

$$-\frac{1}{6} \omega_0^2 \theta^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \sin(\omega t) + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^3 \sin(3\omega t) - \frac{\omega_0^2}{2} \theta_0^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin(3\omega t)$$

Cộng vế với vế của hệ phương trình (9.28). Vế bên phải sẽ bằng 0, các hệ số đứng trước $\sin(\omega t)$, $\sin(3\omega t)$... cũng phải bằng 0 do lời giải là đúng ở mọi thời điểm t . Điều kiện hệ số bằng 0 ở trước $\sin(\omega t)$ cho ta:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3\omega_0^2}{24} \theta_0^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2 \right)$$

Từ đó suy ra:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad (9.29)$$

Điều kiện bằng 0 của hệ số đứng trước $\sin(3\omega t)$ cho ta:

$$-9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \theta_0^2 = 0$$

Đặt $\omega = \omega_0$ vào biểu thức trên, ta được:

$$\varepsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192} \quad (9.30)$$

Do đó lời giải gần đúng cho phương trình vi phân phi tuyến (9.26) là:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t) + \frac{\theta_0^3}{192} \sin(3\omega t) \quad (9.31)$$

Dao động từ phi điều hoà yếu có đóng góp của số hạng tần số 3ω (hoạ âm bậc 3).

Con lắc vật lý:

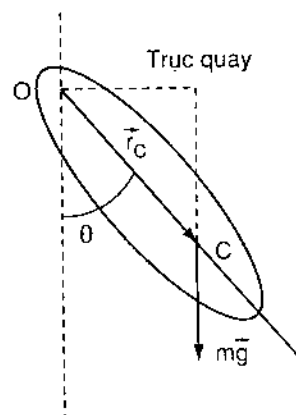
Một thí dụ điển hình của dao động cơ học là dao động của con lắc vật lý (vật rắn dao động xung quanh trục nằm ngang mô tả trên hình 9-4).

Mômen quán tính của con lắc đối với trục quay đi qua O vuông góc với mặt tờ giấy theo định lý Huygens là:

$$I_A = I_C + m r_C^2 \quad (9.32)$$

Phương trình chuyển động quay của con lắc quanh trục đi qua O có dạng:

$$I_A \ddot{\theta} = -m g r_C \sin \theta \quad (9.33)$$



Hình 9-4. Con lắc vật lý dao động bé trong mặt thẳng đứng.

Phía bên phải (9.33) là mômen lực hồi phục còn ở là gia tốc góc. Đặt (9.32) vào (9.33) ta được:

$$(I_C + mr_C^2)\ddot{\theta} = -mgr_C\theta$$

Phương trình trên có dạng phương trình dao động điều hoà:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

với bình phương tần số góc là:

$$\omega^2 = \frac{mgr_C}{I_C + mr_C^2}$$

hay:
$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_C}{I_C + mr_C^2}} \quad (9.34)$$

Tần số góc phụ thuộc khoảng cách giữa điểm treo và khối tâm. Trong trường hợp cá biệt, con lắc sẽ không dao động $\omega = 0$; $r_C = 0$ khi điểm treo trùng với khối tâm C.

Tần số đạt giá trị cực đại $\omega_{\max}$ khi (tìm cực đại của (9.34)):

$$I_C + mr_C^2 - 2mr_C^2 = 0$$

$$r_C = \sqrt{\frac{I_C}{m}} \quad (9.35)$$

Có hai giá trị $r_{C,1}$, $r_{C,2}$ (nói một cách khác là có hai điểm treo) mà con lắc vật lý dao động với cùng một chu kỳ hay cùng một tần số. Thật vậy phương trình (9.34) là phương trình bậc hai cho r_C :

$$r_C^2 - \frac{gT^2 r_C}{4\pi^2} + \frac{I_C}{m} = 0$$

Phương trình có hai nghiệm dương $r_{C,1}$, $r_{C,2}$:

$$r_{C,1,2} = \frac{gT^2}{8\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2 T^4}{64\pi^4} - \frac{I_C}{m}}$$

Cộng hai nghiệm đó ta có biểu thức dùng để xác định gia tốc rơi tự do g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} (r_{C,1} + r_{C,2})$$

9.2. DAO ĐỘNG TẮT DẦN CỦA DAO ĐỘNG TỬ MỘT CHIỀU KHI CÓ LỰC MA SÁT

9.2.1. MA SÁT, THỜI GIAN HỒI PHỤC

Ta xét chất điểm chuyển động một chiều khi chỉ có lực ma sát (F_{ms}). Lực này cản trở chuyển động, có hướng ngược chiều vận tốc và trong trường hợp đơn giản nhất có dạng:

$$f_{ms} = -\gamma \dot{x} \quad (9.36)$$

γ - hệ số dương, còn gọi là hệ số tắt dần.

Nếu chỉ có lực ma sát tác dụng lên chất điểm thì vận tốc chất điểm sẽ giảm theo quy luật hàm mũ. Thật vậy phương trình chuyển động lúc đó là:

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0 \text{ hay } m\dot{v} + \gamma v = 0.$$

Đặt $g = \frac{m}{\tau}$ với τ - gọi là thời gian hồi phục;

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.37)$$

τ - là thời gian đặc trưng khi vận tốc v giảm đi e lần (khi $t = \tau$, $v = \frac{v_0}{e}$) (xem hình 9-5).

Động năng của dao động tử tắt dần khi chỉ có ma sát thôi sẽ suy giảm theo thời gian với quy luật:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} = K_0 e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad (9.38)$$

(9.38) cho thấy thời gian hồi phục của động năng bằng một nửa thời gian hồi phục vận tốc ($\tau/2$).

9.2.2. DAO ĐỘNG TỬ MỘT CHIỀU TẮT DẦN

Khi vừa có ma sát, vừa có lực hồi phục phương trình chuyển động của dao động tử một chiều (khối lượng gắn ở đầu lò xo) có dạng:

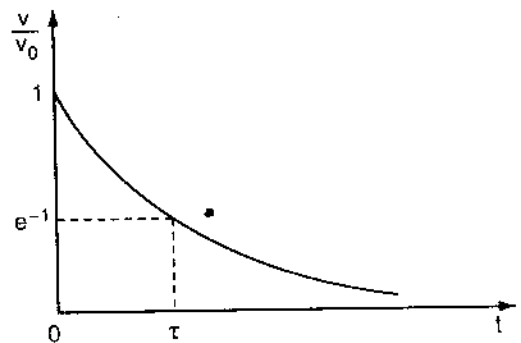
$$m\ddot{x} = -Cx - \gamma \dot{x} \quad \text{hay} \quad \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0 \quad (9.39)$$

$$\text{Với:} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{m} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m} \quad (9.40)$$

Nghiệm của phương trình trên mô tả dao động với biên độ giảm dần theo thời gian có dạng sau:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t \quad (9.41a)$$

Các đại lượng β , ω được tìm bằng cách đặt nghiệm (9.41a) vào phương trình chuyển động (9.39). Ta có:



Hình 9-5. Sự suy giảm của vận tốc dao động theo thời gian.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x_0\beta e^{-\beta t}\sin\omega t + x_0e^{-\beta t}\omega\cos\omega t \\ \ddot{x} &= x_0\beta^2 e^{-\beta t}\sin\omega t - 2\beta e^{-\beta t}\omega\cos\omega t - x_0e^{-\beta t}\omega^2\sin\omega t\end{aligned}$$

Đặt các biểu thức trên vào (9.39) ta được:

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \quad (9.41b)$$

$$\omega = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} \quad (9.41c)$$

9.2.3. CÔNG SUẤT TIÊU TÁN TRONG TRƯỜNG HỢP TẮT DẦN YẾU

Khi dao động là tắt dần yếu biên độ giảm chậm theo thời gian, ta có thể đặt $\omega = \omega_0$. Động năng của dao động từ là:

$$K(t) = m \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(-\frac{x_0}{2\tau} e^{-t/2\tau} \sin\omega_0 t + x_0 e^{-t/2\tau} \cos\omega_0 t \right)^2 \quad (9.42)$$

Giá trị trung bình của động năng trong khoảng thời gian 1 chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega_0} K(t) dt \quad (9.43)$$

Khi tắt dần yếu thì $\omega_0 t \gg 1$, thừa số $e^{-t/2\tau}$ và biên độ $x_0 e^{-t/2\tau}$ không thay đổi nhiều sau một chu kỳ nên có thể đưa ra ngoài dấu tích phân. Ngoài ra:

$$\langle \cos^2\theta \rangle = \langle \sin^2\theta \rangle = 1/2; \quad \langle \cos\theta \cdot \sin\theta \rangle = 0$$

Do đó giá trị trung bình động năng sau một chu kỳ trở thành:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} m x_0^2 e^{-t/\tau} \left\{ \frac{1}{(2\tau)^2} + \omega_0^2 \right\} \quad (9.44)$$

vì $\frac{1}{(2\tau)^2} \ll \omega_0^2$ nên ta có thể bỏ qua số hạng này và được:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} m x_0^2 e^{-t/\tau} \omega_0^2 \quad (9.45)$$

Trung bình của thế năng có giá trị gần đúng là:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2\omega_0 t \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \quad (9.46)$$

Công suất tiêu tán (bằng năng lượng tiêu tán trong một đơn vị thời gian) $\langle P \rangle$ được tính như sau:

$$\langle P \rangle = - \frac{d\langle E \rangle}{dt} = - \frac{d}{dt} (\langle K \rangle + \langle U \rangle) \quad (9.47)$$

$$\langle P \rangle = - \frac{\langle E \rangle}{\tau} \quad (9.48)$$

Không có gì đáng ngạc nhiên khi giá trị trung bình của năng lượng trong 1 chu kỳ phụ thuộc thời gian theo (9.47) hoặc (9.48). Nguyên nhân của điều đó là do ta xét chuyển động của dao động tử trong nhiều chu kỳ, còn lấy trung bình theo thời gian một chu kỳ mà thôi. Năng lượng khi có ma sát chuyển thành nhiệt năng nên giá trị trung bình trong một chu kỳ của năng lượng tiêu tán của dao động tử giảm từ chu kỳ này sang chu kỳ khác tiếp theo.

Độ phẩm chất Q

Để đặc trưng cho hệ dao động, người ta dùng độ phẩm chất Q là tỷ số của năng lượng dự trữ trên năng lượng tiêu tán sau một chu kỳ nhân với 2π .

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T} = \frac{\langle E \rangle \omega}{\langle P \rangle} \quad (9.49)$$

Độ phẩm chất Q là đại lượng không thứ nguyên. Đối với dao động tử tắt dần yếu thì $\omega_0 t \gg 1$ và theo (9.48) thì:

$$Q \approx \omega_0 r \quad (9.50)$$

Một số giá trị điển hình của Q cho các hệ dao động như sau:

- Dây đàn Violon 10^3
- Nguyên tử bị kích thích 10^7
- Hạt nhân bị kích thích $3 \cdot 10^{12}$
- Quả đất (sóng địa chấn) 25 – 1400

9.3. DAO ĐỘNG CUỒNG BỨC CỦA DAO ĐỘNG TỬ

Nếu như ngoài lực ma sát, lực đàn hồi, dao động tử còn chịu tác dụng của ngoại lực phụ thuộc thời gian $F(t)$ thì phương trình chuyển động của nó có dạng:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Cx = F(t) \quad (9.51)$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (9.52)$$

Trong đó: $\tau = \frac{m}{\gamma}$ còn $\omega_0^2 = \frac{C}{m}$ là tần số dao động riêng của hệ khi không có ma sát và ngoại lực $F(t)$ tác dụng. Ta xét trường hợp ngoại lực $F(t)$ thay đổi tuần hoàn theo thời gian dạng hàm sin:

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{F_0 \sin \omega t}{m} = \alpha_0 \sin \omega t \quad (9.53)$$

$$\text{Với } \alpha_0 = \frac{F_0}{m}$$

Chú ý rằng trạng thái dao động của dao động tử cuối cùng sẽ là dao động với tần

số trùng với tần số của lực cưỡng bức nên nếu chọn đặc trưng của dao động là độ dịch chuyển x (cũng có thể chọn là vận tốc v), ta có thể viết:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.54)$$

ω – tần số của lực cưỡng bức;

φ – hiệu số pha giữa lực cưỡng bức và độ dịch chuyển x .

(φ ở đây hoàn toàn khác với pha ban đầu trong dao động điều hoà). φ ứng với hiệu số pha của độ dịch chuyển x và pha của lực trong lúc đó.

$$\dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.55)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Đặt vào phương trình chuyển động ta được:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau} x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \alpha_0 \sin \omega t \quad (9.56)$$

Sử dụng công thức lượng giác:

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

ta thu được:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi] x_0 \sin \omega t + [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi] x_0 \cos \omega t = \alpha_0 \sin \omega t$$

phương trình trên thoả mãn nếu hệ số đứng trước $\cos \omega t$ bằng 0. Từ đó ta được:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.57)$$

mặt khác các hệ số đứng trước $\sin \omega t$ phải bằng nhau hay:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (9.58)$$

Độ dịch chuyển tức thời của dao động tử có dạng:

$$x = \frac{\alpha_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin \left[\omega t + \operatorname{arctg} \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \quad (9.59)$$

Chúng ta khảo sát trường hợp tắt dần là bé ($\omega_0 \tau \gg 1$)

Hai trường hợp đặc biệt đáng quan tâm là:

* Tần số của lực cưỡng bức nhỏ hơn rất nhiều tần số dao động riêng $\omega_0 \gg \omega$, khi đó: $\cos \varphi \rightarrow 1$; $\sin \varphi \rightarrow 0$ hay hiệu số pha là đại lượng bé $\varphi \rightarrow 0$.

$$x_0 \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{m}{C} \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{C} \quad (9.60)$$

Khi đó độ dịch chuyển được quyết định bởi biên độ của lực cưỡng bức và hệ số đàn hồi của lò xo chứ không phải khối lượng dao động tử và lực ma sát.

**** Trường hợp cộng hưởng:**

Xét khi $\omega \rightarrow \omega_0$, $\tan \varphi \rightarrow -\infty$; $\varphi \rightarrow -\pi/2$

$$x_0 = \frac{\alpha_0 \tau}{\omega_0} = \frac{F_0 m}{C \gamma} \quad (9.61)$$

Như vậy nếu hệ số γ đặc trưng cho sự tắt dần của hệ bé thì x_0 , τ sẽ lớn. Cho rằng F_0 là không đổi, ta suy ra tỷ số của độ dịch chuyển khi cộng hưởng và khi tần số ngoại lực $F(t)$ bằng không chính bằng Q - độ phẩm chất của dao động tử:

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0 \tau / \omega_0}{\alpha_0 / \omega_0^2} = \omega_0 \tau = Q \quad (9.62)$$

Giá trị cực đại của độ dịch chuyển x_0 đạt được khi tần số không phải bằng ω_0 mà ở tần số khi mẫu số của biểu thức phụ thuộc của $x_0(\omega)$ bằng 0 (xem (9.58)).

$$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} \quad \text{suy ra} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} \quad (9.63)$$

nếu $\omega_0 \tau \gg 1$ thì tần số cộng hưởng $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$.

Cực đại của độ dịch chuyển x_0 đạt được khi $\varphi = -\pi/2$ (hiệu số pha của độ dịch chuyển và lực). Điều này dễ hiểu vì lúc đó lực và vận tốc cùng pha với nhau:

$$\dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) = x_0 \omega \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\dot{x} = x_0 \omega \sin \omega t$$

$$F = F_0 \sin \omega t$$

***** Trường hợp $\omega \gg \omega_0$ (tần số cưỡng bức lớn so với tần số dao động riêng)**

$$\cos \varphi \rightarrow -1; \quad \sin \varphi \rightarrow 0; \quad \varphi \rightarrow -\pi$$

Biên độ dao động cưỡng bức (xem (9.58)) được đánh giá xấp xỉ là:

$$x_0 \approx \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m \omega^2}$$

Nếu tần số cưỡng bức lớn độ dịch chuyển giảm theo quy luật $\frac{1}{\omega^2}$ và độ lớn của nó phụ thuộc mạnh vào m . Vì $\varphi = -\pi$ nên trong trường hợp này độ dịch chuyển chậm pha so với lực.

Công suất hấp thụ:

Biểu thức cho công suất hấp thụ năng lượng của dao động tử (bằng công thực hiện bởi lực cưỡng bức trong một đơn vị thời gian) có dạng:

$$P = \langle F\dot{x} \rangle = \frac{m\alpha_0^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{1/2}} \langle \sin\omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle \quad (9.64)$$

Biểu thức dưới ký hiệu trung bình thời gian được viết tường minh là:

$$\langle \sin\omega t (\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi) \rangle$$

Đặt giá trị của $\sin\varphi$ vào biểu thức đó, ta được:

$$P = \frac{m\alpha_0^2\omega^2/\tau}{2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]} \quad (9.65)$$

Công suất hấp thụ khi cộng hưởng

$\omega = \omega_0$:

$$P_{\text{res}} = \frac{1}{2} m\alpha_0^2\tau = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m} \tau$$

$$P = P_{\text{res}} \frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]} \quad (9.66)$$

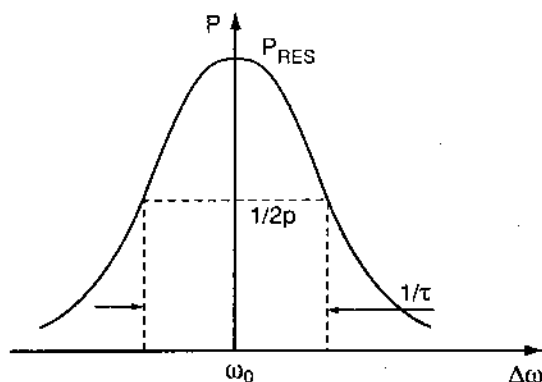
Công suất hấp thụ bởi dao động tử giảm đi một nửa giá trị cộng hưởng $P = P_{\text{res}}/2$ khi tần số ω thay đổi một khoảng $\pm(\Delta\omega)_{1/2}$ (đại lượng này được gọi là bán độ rộng của đường cong hấp thụ). Khi đó:

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\Delta\omega)_{1/2}$$

từ đó:
$$2(\Delta\omega)_{1/2} \approx \frac{\omega}{\tau\omega_0}$$

Ta có đánh giá gần đúng sau:

$$2(\Delta\omega)_{1/2} = \frac{1}{\tau} \quad (9.67)$$



Hình 9-6. Công suất hấp thụ cộng hưởng.

Độ rộng của đường cong hấp thụ khi công suất hấp thụ bằng một nửa công suất hấp thụ cực đại chính bằng $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$. Còn độ phẩm chất được đánh giá là:

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{1/2}} \quad (9.68)$$

Độ phẩm chất bằng tỷ số giữa tần số cộng hưởng trên độ rộng đường cong cộng hưởng ở mức 1/2.

9.4. NGUYÊN LÝ CHỒNG CHẤT

Một trong những tính chất quan trọng của dao động tử điều hoà là nghiệm của phương trình chuyển động có tính chất cộng tính. Nếu $x_1(t)$, $x_2(t)$ (nghiệm của phương trình chuyển động của dao động tử điều hoà trong trường hợp chung) mô tả chuyển động của dao động tử dưới tác dụng của lực cưỡng bức $F_1(t)$, $F_2(t)$ thì tổng $x_1(t) + x_2(t)$ mô tả chuyển động của dao động tử dưới tác dụng của lực cưỡng bức tổng hợp $F_1(t) + F_2(t)$. Đó là nội dung của nguyên lý chồng chất dao động của dao động tử điều hoà. Tính chất đó được suy ra từ phương trình chuyển động của dao động tử điều hoà. Thật vậy, mỗi $x_1(t)$, $x_2(t)$ là nghiệm riêng của phương trình chuyển động của dao động tử điều hoà khi có ma sát và ngoại lực cưỡng bức tác dụng, thí dụ:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_1 = F_1(t)$$

Đặt tổng hai nghiệm riêng vào vế bên phải của phương trình trên ta thấy nó chính là nghiệm trong trường hợp có hai lực cưỡng bức tác dụng đồng thời:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) (x_1 + x_2) = \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_2 = \\ F_1(t) + F_2(t) \end{aligned} \quad (9.69)$$

Tính chất cộng tính này có được vì phương trình chuyển động là tuyến tính (chứa x bậc nhất). Trong trường hợp có số hạng phi điều hoà tỷ lệ với bậc cao hơn của x (x^2 , x^3 ...) nguyên lý đó không đúng nữa.

9.5. TỔNG HỢP HAI DAO ĐỘNG CÓ CHU KỲ KHÁC NHAU CHÚT ÍT, HIỆN TƯỢNG PHÁCH

Xét trường hợp một chất điểm tham gia hai dao động cùng phương nhưng có tần số ω_1 , ω_2 khác nhau chút ít. Biên độ dao động tức thời của các dao động thành phần có dạng sau:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{aligned} \quad (9.70)$$

Trong đó độ sai khác về tần số của hai dao động thành phần là nhỏ:

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$$

Dao động tổng hợp của chất điểm theo nguyên lý chồng chất được mô tả bằng quy luật:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (9.71)$$

Công thức trên có thể biến đổi đến dạng thích hợp hơn nếu thể hiện ω_1, ω_2 qua tần số trung bình ω và hiệu tần số $\Delta\omega$, pha ban đầu trung bình φ và hiệu số pha ban đầu $\Delta\varphi$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \\ \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \varphi_1 = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \\ \varphi_2 = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2} \end{array} \right. \quad (9.72)$$

Đặt (9.72) vào (9.71) ta được:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right] + a_2 \cos\left[\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right] \\ x &= a_1 \cos(\omega t - \varphi) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - a_1 \sin(\omega t - \varphi) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \\ &\quad + a_2 \cos(\omega t - \varphi) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - a_2 \sin(\omega t - \varphi) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ x &= (a_1 + a_2) \cos(\omega t - \varphi) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \\ &\quad + (a_2 - a_1) \sin(\omega t - \varphi) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.73)$$

Theo (9.74) dao động tổng hợp được biểu diễn thành tổng của 2 dao động thành phần biến đổi theo quy luật sau:

$$x = A(t) \sin(\omega t - \varphi) + B(t) \cos(\omega t - \varphi) \quad (9.74a)$$

Biên độ của dao động thành phần $A(t), B(t)$ cũng phụ thuộc vào thời gian:

$$\begin{aligned} A(t) &= (a_2 - a_1) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ B(t) &= (a_1 + a_2) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.74b)$$

Ta thấy dao động tổng hợp là tổng của hai dao động điều hoà có tần số ω , pha ban đầu φ và biên độ phụ thuộc thời gian. Dao động tổng hợp đó được minh hoạ bằng giản đồ trên hình 9-7. Biên độ của dao động tổng hợp có độ lớn là $a(t)$:

$$a^2(t) = A^2(t) + B^2(t)$$

$$a^2(t) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\Delta\omega t - \Delta\varphi) \quad (9.75)$$

Giá trị cực đại và cực tiểu của biên độ dao động tổng hợp theo (9.75) là :

$$a_{\max} = a_1 + a_2 \quad (9.76)$$

$$a_{\min} = a_1 - a_2$$

Biểu thức (9.74) cho thấy dao động tổng hợp là dao động gần điều hoà với tần số góc là $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ và có biên độ $a(t)$ biến thiên tuần hoàn theo thời gian với tần số góc

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ giữa hai giá trị số cực đại ($a_1 + a_2$) và cực tiểu ($a_1 - a_2$).

Chu kỳ biến thiên của biên độ tổng cộng $a(t)$ là:

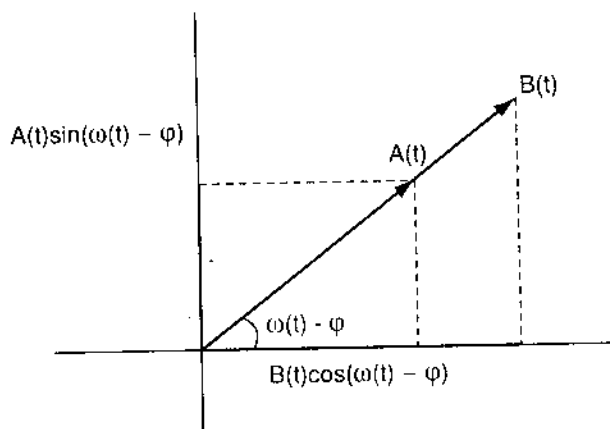
$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \quad (9.77)$$

Do T_1, T_2 khác nhau rất ít nên τ lớn hơn T_1, T_2 nhiều, biên độ cực đại của dao động tổng hợp biến thiên rất chậm theo thời gian: *hiện tượng biên độ cực đại của dao động tổng hợp biến thiên tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ lớn hơn nhiều so với chu kỳ của dao động gọi là hiện tượng phách.*

Trường hợp đặc biệt khi $a_1 = a_2 = a_0$ thì biên độ tức thời có dạng khá đơn giản:

$$x = 2a_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos(\omega t - \varphi) \quad (9.78)$$

Đồ thị của dao động tổng hợp lúc này có dạng đặc trưng là giá trị nhỏ nhất của biên độ tức thời $a(t)$ bằng 0.



Hình 9-7. Hai dao động thành phần của dao động tổng hợp

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1. Khối lượng m_1, m_2 được nối với nhau bằng một lò xo ở trạng thái không có giãn. Người ta truyền cho khối lượng m_1 một vận tốc v_0 theo hướng dọc theo lò xo bằng 1 cú đập. Hỏi vận tốc của các khối lượng đó thay đổi theo thời gian như thế nào nếu tần số dao động tự do của chúng là ω .

Trả lời:

$$v_1 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \omega t \right)$$

$$v_2 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} (1 - \cos \omega t)$$

9.2. Mô hình đơn giản cho hai nguyên tử tương tác có đề cập tới các bậc tự do nội nguyên tử có thể xây dựng như sau: hai dao động tử tuyến tính dao động dọc theo phương của đường nối giữa chúng. Mỗi dao động tử có khối lượng m và là một lưỡng cực điện trong đó điện tích dương e là cố định còn điện tích âm $-e$ dao động với tần số ω_0 . Khoảng cách giữa các điện tích dương là R rất lớn so với sự lệch của các dao động tử khỏi vị trí cân bằng. Hãy tìm tần số dao động của hệ.

Trả lời:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_0^2 \pm \frac{2e^2}{mR^3}}$$

9.3. Nguyên tử oxy trong phân tử khí cacbonic (CO_2) được truyền một vận tốc không lớn v dọc theo hướng tới nguyên tử cacbon. Hãy xác định nguyên tử oxy dịch chuyển tới gần nguyên tử cacbon một khoảng như thế nào. Khối lượng nguyên tử oxy là M còn khối lượng nguyên tử cacbon là m . Độ cứng liên kết giữa các nguyên tử bằng k .

Trả lời:

$$\Delta x = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right); \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}; \quad \omega_2 = \sqrt{k \left(\frac{1}{M} + \frac{2}{m} \right)}.$$

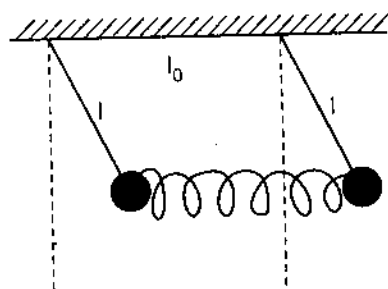
9.4. Con lắc kép gồm hai khối lượng nhỏ m và hai thanh treo độ dài l (không khối lượng) nối với nhau bằng một lò xo có độ cứng k (xem hình 9-8) độ dài lò xo lúc không

co dãn là l_0 . Hãy tìm sự phụ thuộc thời gian của biên độ dao động tức thời và tần số dao động bé của hệ.

Trả lời:

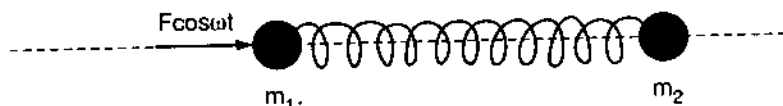
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{mốt đối xứng}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad \text{mốt không đối xứng.}$$



Hình 9-8.

9.5. Hai chất điểm khối lượng m_1, m_2 nối với nhau bằng một lò xo đàn hồi và có thể chuyển động tự do theo một đường thẳng nằm ngang dọc hướng của lò xo. Một lực tuần hoàn $F \cos \omega t$ tác dụng lên chất điểm m_1 theo hướng đường thẳng đó (xem hình 9-9). Hãy tìm sự phụ thuộc vào thời gian của biên độ dịch chuyển của chất điểm m_1 .



Hình 9-9.

Trả lời:

$$x_1 = \frac{k - \omega^2 m_2}{\omega^2 [\omega^2 m_1 m_2 - k(m_1 + m_2)]} F \cos \omega t.$$

Chương 10

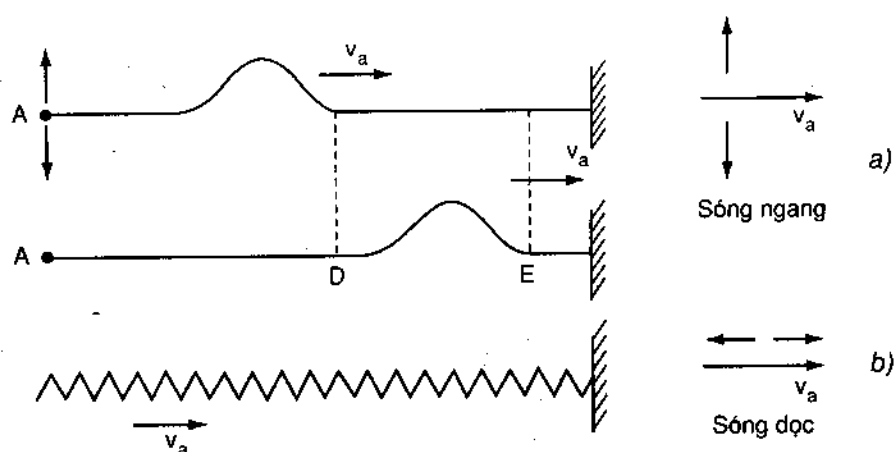
ĐẠI CƯƠNG VỀ SÓNG

10.1. SÓNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH SÓNG

10.1.1. SÓNG LÀ GÌ?

Sự lan truyền một kích động nào đó trong môi trường nào đó gọi là sóng.

Sự lan truyền của kích động âm thanh (thí dụ sự rung động của màng loa) gọi là sóng âm, của kích động điện từ gọi là sóng điện từ (sóng vô tuyến, sóng ánh sáng). Trong phần cơ học, chúng ta chỉ xét sóng truyền trong môi trường đàn hồi gọi là sóng âm.



Hình 10-1. Sự lan truyền kích động, sóng ngang (a) và sóng dọc (b)

Sóng gọi là sóng ngang khi phương dao động của các phần tử môi trường khi sóng truyền tới là vuông góc với phương truyền sóng (xem hình 10-1). Trong sự truyền sóng, chuyển động lan truyền không kèm theo sự vận chuyển vật chất (các điểm môi trường dao động xung quanh vị trí cân bằng còn sóng thì truyền đi).

10.1.2. PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG

Phương trình truyền sóng là biểu thức mô tả mối liên hệ giữa độ dịch chuyển $\xi(\vec{r}, t)$ là hàm của tọa độ $\vec{r}$ và thời gian t (người ta gọi ξ là hàm sóng).

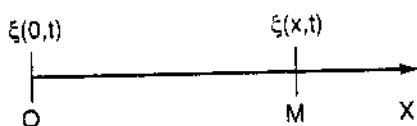
$$\xi(\vec{r}, t) = \xi(x, y, z, t) \quad (10.1)$$

Trước hết ta xét hàm sóng truyền theo phương OX và ξ chỉ là hàm của x, t . Giả sử ở điểm $x = 0$ tại thời điểm t ta có kích động:

$$\xi(0, t) = f(t) \quad (10.2)$$

Kích động này truyền tới điểm M mất thời gian $\tau = \frac{x}{v_a}$, v_a là vận tốc truyền sóng (xem hình 10-2). Kích động ở điểm M cũng giống kích động ở điểm O ở thời điểm $t - \frac{x}{v_a}$:

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_a}\right) \quad (10.3)$$



Hình 10-2. Lan truyền kích động từ điểm O tới M.

(10.3) là phương trình kích động truyền theo chiều dương của trục Ox. Lấy đạo hàm bậc một và bậc hai của hàm sóng theo x và bậc một theo t ta được:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v_a} f'\left(t - \frac{x}{v_a}\right); \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v_a^2} f''\left(t - \frac{x}{v_a}\right) \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f'\left(t - \frac{x}{v_a}\right); \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f''\left(t - \frac{x}{v_a}\right) \quad (10.5)$$

Từ (10.4), (10.5) ta rút ra được phương trình sóng:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (10.6)$$

Phương trình (10.6) gọi là phương trình truyền sóng trong trường hợp 1 chiều, nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{v_a}\right) \quad (10.7)$$

Trong (10.7) f, φ là hai hàm tùy ý. f biểu thị sóng truyền theo chiều dương OX và φ biểu thị sóng truyền theo chiều âm. Điều đó hoàn toàn dễ hiểu, kích động tại một điểm dễ dàng truyền theo hai chiều ngược nhau với cùng một vận tốc. Trong trường hợp tổng quát, sóng truyền trong toàn bộ không gian. Vị trí của chất điểm trong môi trường được đặc trưng bởi 3 tọa độ x, y, z . Khi đó phương trình truyền sóng có dạng:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v_a^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (10.8)$$

Vì toán tử Laplace là $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nên phương trình sóng (10.8) còn được viết gọn lại như sau:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v_a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (10.9)$$

Mọi quá trình sóng đều thỏa mãn phương trình này.

10.1.3. SỰ TRUYỀN SÓNG ĐIỀU HÒA

Ta xét dạng kích động đơn giản nhất là dao động điều hoà. Tại điểm O (gốc toạ độ $x = 0$) có một kích động điều hoà:

$$\xi = a \cos \omega t \quad (10.10)$$

$\xi(0, t)$ là độ dịch chuyển tức thời của chất điểm trong môi trường khỏi vị trí cân bằng tại thời điểm t , a là biên độ, ωt là pha dao động. Độ dịch chuyển tức thời của chất điểm môi trường khỏi vị trí cân bằng tại điểm x và thời điểm t là:

$$\xi(x, t) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_a} \right) = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{v_a T} \right) = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (10.11)$$

$\lambda = v_a T$ được gọi là bước sóng (quãng đường mà sóng đi được sau khoảng thời gian một chu kỳ T của dao động).

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$ được gọi là số sóng. Vectơ sóng $\vec{k}$ là vectơ có độ lớn bằng số sóng và hướng theo hướng sóng truyền. Sử dụng vectơ sóng ta viết lại (10.11) cho hàm sóng:

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx) \quad (10.12)$$

Theo (10.12) khi $x = \lambda$ thì $\xi(x, t) = \xi(x + \lambda, t)$, như vậy bước sóng là khoảng cách gần nhất giữa hai điểm dao động như nhau (cùng pha). Thay $t \rightarrow t + T$ với $T = \frac{2\pi}{\omega}$ thì $\xi(x, t + T) = \xi(x, t)$. Như vậy chu kỳ T là khoảng thời gian ngắn nhất để dao động ở điểm x lặp lại dao động với biên độ như vậy ở thời điểm t .

Vận tốc truyền pha (vận tốc pha) của sóng: để tìm vận tốc truyền pha của dao động ta cố định pha:

$$\omega \left(t - \frac{x}{v_a} \right) = \text{const} \quad (10.13)$$

Lấy đạo hàm theo t của đẳng thức trên ta được:

$$\omega \left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{1}{v_a} \right) = 0; \quad \frac{dx}{dt} = v_a \quad (10.14)$$

Vận tốc truyền pha $\frac{dx}{dt}$ cũng chính là vận tốc truyền sóng v_a , v_a còn gọi là vận tốc pha.

Dễ thấy từ (10.12), (10.13), định luật tán sắc cho sóng âm có dạng:

$$\omega(k) = v_a k \quad (10.15)$$

* *Sóng phẳng và sóng cầu:*

Quy tích của tất cả các điểm mà sóng đã truyền tới ở thời điểm t gọi là mặt đầu sóng. Mặt đầu sóng phân cách vùng không gian sóng đã truyền tới và vùng sóng chưa truyền tới (hình 10-3)

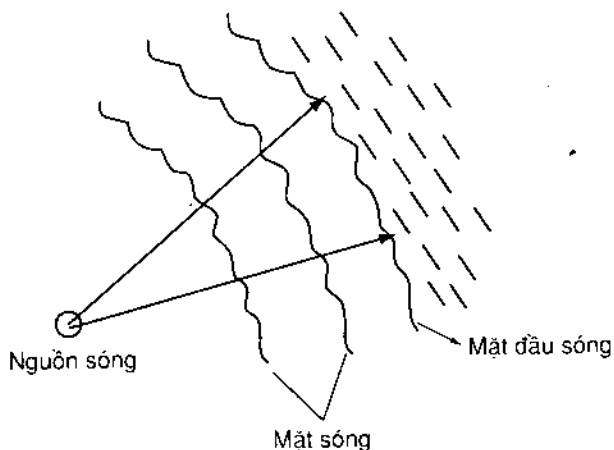
Mặt sóng: quỹ tích của các điểm dao động như nhau (dao động với cùng một pha) được gọi là mặt sóng. Các mặt sóng thì đứng yên còn mặt đầu sóng thì chuyển động. Nếu mặt sóng là mặt phẳng thì ta có sóng phẳng, nếu mặt sóng là cầu ta có sóng cầu.

Hàm sóng được viết dưới dạng hàm thực (10.12). Trong nhiều trường hợp người ta còn có thể dùng hàm phức để mô tả chuyển động sóng:

$$\xi(\vec{r}, t) = ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + i a \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Phần thực của công thức trên chính là (10.12).



Hình 10-3. Sự lan truyền sóng và mặt đầu sóng.

10.2. NĂNG LƯỢNG SÓNG, VÉCTƠ POYNTING UMOV

Khi sóng lan truyền trong môi trường, nó mang theo năng lượng (truyền dao động từ điểm này đến điểm khác của không gian cũng là tải năng lượng từ điểm này đến điểm khác của không gian). Chúng ta sẽ tính năng lượng của sóng đàn hồi chứa trong 1 đơn vị thể tích vô cùng bé ΔV sao cho có thể xem độ biến dạng $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, vận tốc dao động

$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ của mọi điểm trong thể tích ΔV là như nhau. Động năng của khối lượng Δm của môi trường đàn hồi khi cổ sóng đàn hồi đi qua được tính như sau:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (10.16)$$

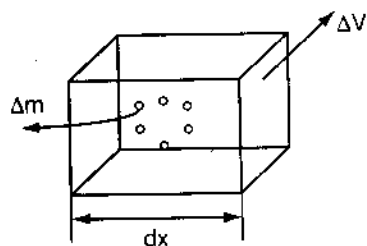
Thế năng biến dạng đàn hồi là:

$$\Delta U = \frac{E \cdot \epsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V \quad (10.17)$$

Trong (10.17) E là suất Young còn $\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ là độ biến dạng tỉ đối.

$$E = \rho v^2 \quad (10.18)$$

Chú ý công thức (10.18) được chứng minh như sau: sau khoảng thời gian dt , sóng



Hình 10-4. Khối lượng Δm có thể tích ΔV của môi trường đàn hồi.

âm lan truyền được $v_a \cdot dt$. Sau khoảng thời gian dt phần tử môi trường dịch chuyển được một khoảng $v \cdot dt$ (xem hình 10-5). Do đó độ biến dạng tỷ đối của thanh:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v \cdot dt}{v_a \cdot dt} = \frac{v}{v_a} \quad (10.19)$$

Suất căng trong thanh T là:

$$T = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{v}{v_a}$$

Vì $T \cdot S = F$ - lực tác dụng trong thanh, do đó:

$$F = E \cdot S \cdot \frac{v}{v_a}$$

F bằng độ biến thiên xung lượng trong một khoảng thời gian dt . Sau dt , chuyển động sóng làm các hạt trong thể tích $v_a \cdot S \cdot dt$ dao động, khối lượng các hạt đó là $\rho \cdot v_a \cdot S \cdot dt$ còn sự thay đổi xung lượng của chúng là $\rho \cdot v \cdot v_a \cdot S \cdot dt = dP$. Từ đó ta có:

$$F = \rho \cdot v \cdot v_a \cdot S = ES \frac{v}{v_a} \quad \text{hay} \quad E = \rho v_a^2 \quad (\text{đpcm})$$

Theo kết quả trên vận tốc sóng âm trong môi trường đàn hồi được xác định bởi $v_a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Biểu thức cho thế năng đàn hồi của thể tích ΔV nay trở thành:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho v_a^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V \quad (10.20)$$

Ta đưa vào khái niệm mật độ năng lượng sóng W. W là năng lượng sóng chứa trong một đơn vị thể tích môi trường truyền sóng:

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\Delta K + \Delta U}{\Delta V}$$

$$W = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 v_a^2 \right] \quad (10.21)$$

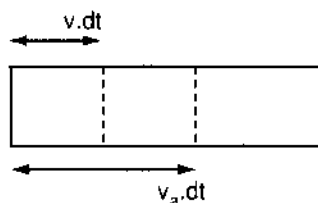
Nếu sóng âm là sóng phẳng điều hoà lan truyền theo chiều dương trục x thì:

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx) \quad (10.22)$$

Khi đó ta có:

$$W = \rho \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad (10.23)$$

Giá trị trung bình của mật độ năng lượng tính cho một chu kỳ là:

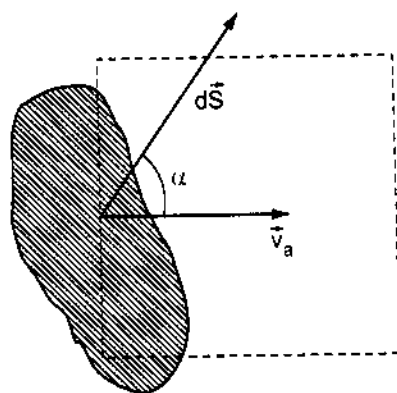


Hình 10-5. So sánh khoảng cách sóng đi được và độ dịch chuyển của phần tử môi trường.

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt$$

$$\Rightarrow \bar{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \quad (10.24)$$

Năng thông của sóng: Năng lượng truyền qua một diện tích bề mặt dS trong một đơn vị thời gian gọi là năng thông của sóng. Năng lượng truyền theo phương vận tốc sóng âm qua dS bằng năng lượng truyền qua diện tích $dS \cos \alpha$ đặt vuông góc với $\vec{v}_a$ (xem hình 10-6):



Hình 10-6. Khái niệm vectơ Poynting - Umov

$$\Delta \Phi = W v_a dS \cos \alpha = W (\vec{v}_a, d\vec{S}) \quad (10.25)$$

Năng thông thay đổi theo thời gian nên ta đưa vào khái niệm mật độ năng thông trung bình đặc trưng bởi vectơ $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \bar{W} \vec{v}_a; \quad \Delta \Phi = (\vec{P}, d\vec{S}) \quad (10.26a)$$

$\vec{P}$ được gọi là vectơ Umov:

$$P = \frac{1}{2} \rho v_a \omega^2 a^2 \quad (10.26b)$$

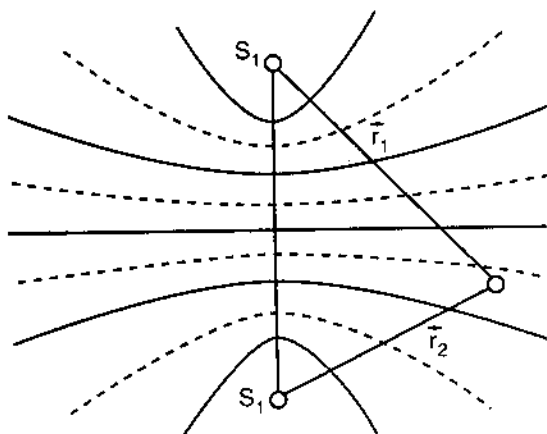
Vectơ $\vec{P}$ cho ta năng lượng mà một đơn vị diện tích đặt trong môi trường nhận được trong một đơn vị thời gian.

10.3. GIAO THOA SÓNG, SÓNG ĐỨNG

10.3.1. GIAO THOA HAI SÓNG KẾT HỢP

Xét trường hợp có hai sóng truyền trong môi trường. Nếu tại mọi điểm mà hiệu số pha của hai sóng đó không thay đổi theo thời gian thì hai sóng đó gọi là sóng kết hợp. Hai sóng kết hợp phải có cùng tần số. Khi tổng hợp hai sóng kết hợp có sự giao thoa.

Xét sự giao thoa của hai sóng do hai nguồn điểm S_1, S_2 kết hợp phát ra tại điểm M ở xa nguồn (hình 10-7). Khi đó có thể coi hai sóng do S_1, S_2 truyền tới điểm M là cùng phương:



Hình 10-7. Giao thoa sóng của hai nguồn điểm kết hợp.

$$\xi_1 = a_1 \cos(\omega t - \phi_1)$$

$$\xi_2 = a_2 \cos(\omega t - \phi_2) \quad (10.27)$$

Dao động của chất điểm môi trường tại M có biên độ tức thời là:

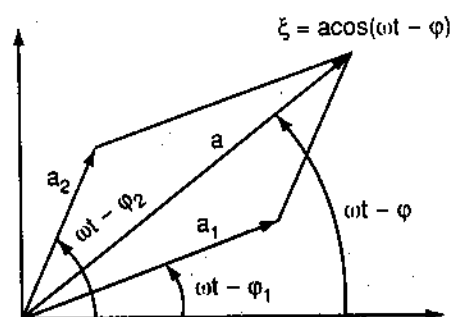
$$\xi = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (10.28a)$$

Trong đó:

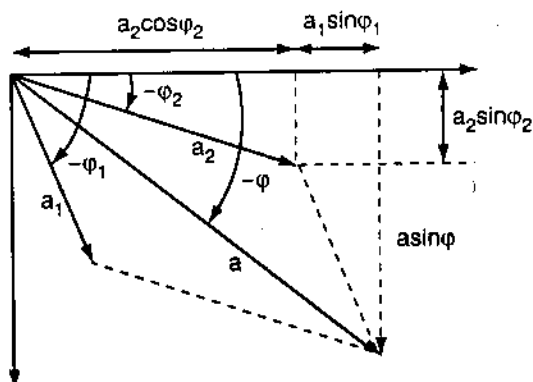
$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10.28b)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \quad (10.28c)$$

Các công thức (10.28a) – (10.28c) cho dao động tổng hợp có thể nhận được bằng phương pháp khá trực quan đó là phương pháp giản đồ véc tơ mô tả trên hình 10-8. Véc tơ a_1, a_2, a có thành phần trên trục OX là các dao động thành phần ξ_1, ξ_2, ξ tương ứng. Góc tạo bởi các véc tơ ấy với trục hoành chính là các pha dao động, trong khi quay góc giữa hai véc tơ a_1, a_2 không đổi và bằng $\varphi_1 - \varphi_2$. Biên độ a của dao động tổng hợp (10.28b) được nhận bằng cách sử dụng định lý côsin. Công thức cho (10.28c) có thể suy ra ngay từ giản đồ mô tả trên hình 10-9.



Hình 10-8. Tổng hợp dao động của điểm M của môi trường có sóng truyền qua bằng phương pháp véc tơ.



Hình 10-9. Giản đồ xác định pha ban đầu của dao động tổng hợp.

Khi hiệu số pha là số nguyên lần 2π (các dao động thành phần cùng pha) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ suy ra $a^2 = (a_1 + a_2)^2$; $a = |a_1 + a_2|$. Biên độ dao động tổng hợp a có giá trị cực đại.

Khi hiệu số pha là số lẻ lần π (các dao động thành phần ngược pha):

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$$

ta suy ra $a = |a_1 - a_2|$. Biên độ dao động tổng hợp là cực tiểu. Mặt khác:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = kr_2 - kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$$

Trong trường hợp biên độ a có giá trị cực đại:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2n\pi \quad (10.29a)$$

$$r_2 - r_1 = n\lambda \quad (10.29b)$$

Hiệu quang đường truyền sóng của hai sóng thành phần bằng số nguyên lần bước sóng. Quỹ tích các điểm có biên độ dao động cực đại là mặt bụng sóng.

Trong trường hợp biên độ a có giá trị cực tiểu:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = (2n + 1)\pi \quad (10.30a)$$

$$r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (10.30b)$$

Hiệu quang đường truyền sóng của hai sóng thành phần bằng số lẻ lần nửa bước sóng. Quỹ tích các điểm có biên độ dao động cực tiểu gọi là mặt nút sóng.

10.3.2. SÓNG ĐỨNG

Trong trường hợp giao thoa của hai sóng phẳng cùng biên độ và cùng tần số nhưng truyền ngược chiều nhau sẽ xuất hiện sóng đứng. Trong trường hợp này hàm sóng của sóng tới và sóng phản xạ có dạng:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx) \quad (10.31)$$

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx).$$

Biên độ dao động tức thời của chất điểm môi trường trong sóng tổng hợp (hàm sóng tổng hợp) được cho bởi:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos kx \cos \omega t = 2a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos \omega t \quad (10.32)$$

Từ (10.32) ta thấy mọi điểm môi trường dao động cùng pha $\varphi = \omega t$ không phụ thuộc vị trí x . Biên độ cực đại của sóng không phụ thuộc thời gian mà chỉ phụ thuộc vị trí x , sóng có tính chất như vậy được gọi là sóng đứng:

$$\xi = \xi_0(x) \cos \omega t \quad (10.33a)$$

$$\xi_0(x) = 2a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (10.33b)$$

Ở các điểm x thoả mãn phương trình:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \pm 1 \quad \text{hay} \quad x = n \frac{\lambda}{2} \quad (10.34)$$

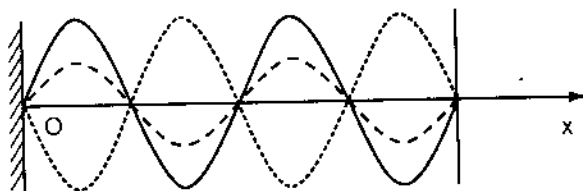
dao động của các điểm đó có biên độ cực đại $\xi_{0\max} = 2a$.

Ở các điểm x thoả mãn phương trình:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 0 \quad \text{hay} \quad x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (10.35)$$

dao động của các điểm đó có biên độ cực tiểu $\xi_0(x) = 0$.

Sóng đứng còn được hình thành khi sóng tới bị phản xạ lần lượt tại hai mặt phẳng cách nhau một khoảng L (xem hình 10-10). Sóng tổng hợp là chồng chập của sóng truyền theo chiều dương trục Ox và sóng phản xạ ngược lại có sự dịch pha là π :



Hình 10-10. Sự tạo thành sóng đứng khi sóng tới bị phản xạ giữa hai thành cứng.

$$\begin{aligned}\xi &= a\cos(\omega t - kx) + a\cos(\omega t + kx + \pi) \\ &= a\cos(\omega t - kx) - a\cos(\omega t + kx) \\ &= 2a \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t\end{aligned}\quad (10.36)$$

Vì hai điểm nút là nút sóng không dao động: $\xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$. Từ (10.36) ta thấy điều kiện biên được thoả mãn khi khoảng L chứa một số nguyên lần bán bước sóng.

$$L = m \frac{\lambda}{2} \quad (m \text{ là số nguyên}) \quad (10.37)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 10

10.1. Hãy giải thích tại sao độ dịch chuyển $A\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ tại điểm $\vec{r}$ và thời điểm t được gọi là sóng phẳng. Phương truyền sóng là phương nào?

Nếu ta có sóng mô tả bởi quy luật $y = 0,5\sin(0,1x - 0,4t)$ (tất cả các đại lượng cho trong hệ đơn vị SI). Hãy xác định:

- Bước sóng
- Chu kỳ
- Vận tốc truyền sóng.

Trả lời: a) 62,8m ; b) 15,7s ; c) 4 m/s.

10.2.

a) Chiết suất (hệ số khúc xạ) của môi trường n được định nghĩa như tỷ số giữa vận tốc ánh sáng trong chân không c và vận tốc pha của sóng v_a trong môi trường có tán sắc $n = c/v_a$. Hãy chứng minh rằng vận tốc nhóm của sóng điện từ $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ trong môi trường tán sắc với chiết suất n được xác định bởi biểu thức:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

ω là tần số góc của sóng điện từ.

b) Một sao pulsar (sao phát ra các xung rất nhọn trong dải rộng tần số radio) phát ra các xung tín hiệu truyền qua khoảng không giữa các vì sao theo đường thẳng trước khi tới trái đất. Các quan sát cho thấy thời gian tới của xung tín hiệu đo ở 400 MHz chậm hơn thời gian tới của cùng vẫn xung đó đo ở 1400 MHz. Chiết xuất của môi trường khoảng không giữa các vì sao được cho bởi $n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$ (số hạng thứ hai rất nhỏ so với 1 trong vùng tần số quan sát). e và m là điện tích và khối lượng điện tử. $e_0 = 9,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ – hằng số điện môi của chân không. N là mật độ điện tử được đánh giá là đồng nhất và có giá trị là $3 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$ trong khoảng không giữa trái đất và sao pulsar. Hãy tính gần đúng khoảng cách từ trái đất đến sao pulsar.

Trả lời: b) $D \approx \frac{2\epsilon_0 mc \Delta t}{Ne^2} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)^{-1} \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ m}$ (khoảng 3000 năm ánh sáng).

10.3. Trong chất khí lan truyền sóng xung kích trong sóng đó áp suất P và mật độ ρ lớn hơn nhiều so với áp suất P_0 và mật độ ρ_0 trong vùng sóng chưa truyền tới. Hãy tìm biểu thức vận tốc truyền sóng từ các dữ liệu trên.

Trả lời: $v = \sqrt{\frac{\rho(P - P_0)}{\rho_0(\rho - \rho_0)}}$

Chương 11

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HỢP

11.1. NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐỐI CỦA EINSTEIN

Nguyên lý tương đối trong cơ học Newton nói rằng các hiện tượng cơ học đều xảy ra như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính, nhưng không nói rõ các hiện tượng vật lý khác có xảy ra như nhau trong các hệ quy chiếu quán tính hay không? Ví dụ các hiện tượng điện từ khi tác động lên các điện tích phụ thuộc cả vào tốc độ của chúng, do đó nảy ra ý kiến là các hiện tượng điện từ sẽ xảy ra khác nhau ở trong hệ quy chiếu quán tính khác nhau. Người ta đã làm các thí nghiệm về tốc độ ánh sáng (tốc độ truyền sóng điện từ) với hy vọng tìm ra ít nhất một hệ quy chiếu quán tính ưu tiên, ở hệ đó tốc độ ánh sáng khác với tốc độ ánh sáng ở các hệ khác. Nhưng những thí nghiệm đó không đạt được kết quả.

Nhiều thí nghiệm khác đã được tiến hành nhưng cũng chưa có một thí nghiệm nào thu được hệ quán tính ưu tiên. Do đó có thể giả thiết rằng các hệ quy chiếu quán tính đều là bình đẳng đối với tất cả các hiện tượng tự nhiên. Nhưng tất nhiên điều đó chỉ là giả thiết vì chưa thể chứng minh rằng tất cả các thí nghiệm sau này cũng sẽ không thu được một hệ quy chiếu quán tính ưu tiên nào. Tuy nhiên chúng ta có cơ sở để khẳng định sự đúng đắn của giả thiết trên vì ngày nay những hệ quả của nó đã được ứng dụng vào kỹ thuật và nhiều hệ quả đã được chứng minh bằng thực nghiệm.

Giả thiết này đã được Einstein phát biểu vào năm 1905 và gọi là *nguyên lý tương đối Einstein*. Nguyên lý tương đối Einstein là nguyên lý về sự bình đẳng của các hệ quy chiếu quán tính và đã được cụ thể hoá bằng hai tiên đề sau:

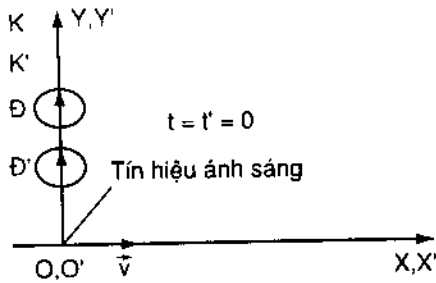
1. Các định luật tự nhiên đều được phát biểu như nhau trong các hệ quy chiếu quán tính, hay nói một cách khác, các hiện tượng tự nhiên đều xảy ra như nhau trong các hệ quy chiếu quán tính. Tiên đề này có thể được phát biểu một cách toán học như sau: Các phương trình mô tả các hiện tượng tự nhiên đều có dạng như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính.

2. Tốc độ ánh sáng trong chân không là một đại lượng không đổi trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính.

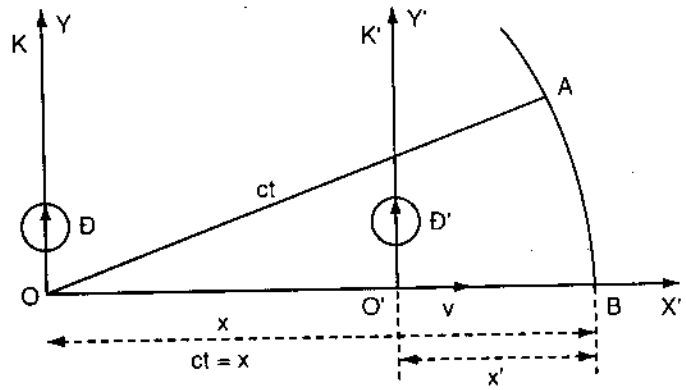
11.2. BIẾN ĐỔI LORENTZ

Biến đổi Lorentz là phép biến đổi các toạ độ không, thời gian từ một hệ quy chiếu quán tính K (được coi là đứng yên) này sang một hệ quy chiếu quán tính K' khác chuyển động đều so với K . Ta xét hai hệ quy chiếu quán tính như vậy và cho rằng tại thời điểm đầu tiên gốc hai hệ trùng nhau, hai đồng hồ trong chúng là D , D' chỉ cùng

thời điểm $t = 0, t' = 0$. Hệ quy chiếu K' được coi là gắn với một tên lửa chuyển động với vận tốc v dọc theo $OX \equiv O'X'$ còn hệ quy chiếu K đứng yên (xem hình 11-1). Cùng ở thời điểm đó từ gốc O (trùng với O') phát ra một xung ánh sáng. Tại thời điểm t (đo theo đồng hồ D trong K và t' đo theo đồng hồ D' trong K') mặt đầu sóng cầu của sóng ánh sáng tới các điểm A, B (hình 11-2).



Hình 11-1. Tín hiệu ánh sáng được phát đi trên tên lửa chuyển động với vận tốc v .



Hình 11-2. Mặt đầu sóng cầu trong hai hệ quy chiếu K, K' .

11.2.1. BIẾN ĐỔI LORENTZ CHO TOẠ ĐỘ

Xét điểm B có toạ độ x trong K và x' trong K' . Khoảng cách từ O tới B đo bởi người quan sát trong K :

$$ct = x \quad (11.1)$$

Khoảng cách từ O' tới B' đo bởi người quan sát trong K' :

$$ct' = x' \quad (11.2)$$

Chúng ta đã sử dụng hai tiên đề của thuyết tương đối để viết (11.1) (11.2). Tiên đề thứ nhất có nghĩa rằng sự truyền ánh sáng trong K, K' đều mô tả bằng quy luật lấy vận tốc ánh sáng nhân với thời gian truyền. Để tìm mối liên hệ giữa x, x' , ta suy luận rằng do hai hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến đối với nhau dọc theo phương OX nên chỉ có các toạ độ x, x', t, t' là thay đổi và giữa chúng phải có một mối liên hệ tuyến tính kiểu:

$$\begin{cases} x = G(x' + vt') \\ x' = G(x - vt) \end{cases} \quad (11.3)$$

$G = 1$ khi $c \rightarrow \infty$ hay $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, lúc đó $t = t'$ và (11.3) chuyển thành biến đổi Galile trong giới hạn cơ học cổ điển $x' = x - vt$.

Đặt (11.1), (11.2) vào (11.3) ta được:

$$G^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{hay} \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.4)$$

Để nhận được sự biến đổi cho t , t' ta thay $x' = G(x - vt)$ vào $x = G(x' + vt')$ và được:

$$Gt + x \frac{1 - G^2}{Gv} = t' \quad (11.5)$$

$$\text{Vi} \quad \frac{1 - G^2}{Gv} = \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)} = -\frac{v}{c^2} G, \quad \text{từ đó suy ra: } t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.6)$$

Tóm lại chúng ta có biến đổi Lorentz sau cho không thời gian từ hệ quy chiếu K sang K' và ngược lại. Biến đổi ngược từ K' sang K có thể nhận được dễ dàng từ biến đổi thuận nhờ phép thay thế $x \leftrightarrow x'$, $t \leftrightarrow t'$, $y \leftrightarrow y'$, $z \leftrightarrow z'$, $v \leftrightarrow -v$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' & y' &= y \\ z &= z' & z' &= z \end{aligned} \quad (11.7) \quad (11.8)$$

Biến đổi Lorentz ngược từ $K' \rightarrow K$ Biến đổi Lorentz từ $K \rightarrow K'$

11.2.2. TÍNH TƯƠNG ĐỐI CỦA KHÔNG GIAN VÀ THỜI GIAN, NGUYÊN LÝ NHÂN QUẢ

Ta xét hệ quy chiếu K' chuyển động theo chiều dương trục OX của hệ quy chiếu K với vận tốc không đổi v . Nếu tại thời điểm t_1 và t_2 nào đó trong hệ K có hai sự kiện xảy ra tương ứng tại các điểm x_1 , x_2 thì theo (11.8) trong hệ K' hai sự kiện trên sẽ xảy ra tại các thời điểm:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.9)$$

và tại các điểm:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Khoảng cách không gian giữa hai sự kiện trong hệ K' là:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.10)$$

Trong trường hợp riêng nếu khoảng cách đó bằng không trong K' , tức là $x'_2 - x'_1 = 0$ thì $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$.

Rõ ràng rằng khoảng cách này trong hệ K nói chung khác không. Từ đó ta thấy khoảng cách không gian giữa các sự kiện phụ thuộc vào sự lựa chọn hệ quy chiếu. Đó là tính chất tương đối của không gian. Tính chất này tương tự như ở trong cơ học cổ điển của Newton.

Theo (11.9) thì khoảng thời gian giữa hai sự kiện trong hệ quy chiếu K' là:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nếu khoảng thời gian đó bằng không trong K' , tức là $t'_2 - t'_1 = 0$ thì:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \quad (11.11)$$

Rõ ràng rằng khoảng thời gian này trong hệ K nói chung khác không. Từ đó ta thấy khoảng thời gian giữa các sự kiện phụ thuộc vào sự lựa chọn hệ quy chiếu. Đó là tính chất tương đối của sự xảy ra đồng thời của các sự kiện hay tính chất tương đối của thời gian. Tính chất này chỉ có trong cơ học tương đối tính.

Sự phù hợp với nguyên lý nhân quả:

Theo nguyên lý nhân quả, nguyên nhân của một hiện tượng nào đó phải xảy ra trước hậu quả của nó. Ta có thể thấy rằng tính chất tương đối của thời gian trong cơ học tương đối tính không mâu thuẫn với nguyên lý nhân quả nghĩa là không thể tìm thấy một hệ quy chiếu nào mà trong đó nguyên nhân của một sự kiện xảy ra sau hậu quả của nó. Thật vậy, giả sử ta có sự kiện (x_2, t_2) là hậu quả của sự kiện nguyên nhân (x_1, t_1) trong hệ K và ta tìm được hệ quy chiếu K' mà hai sự kiện đó xảy ra đồng thời (hệ thức (11.11) là đúng cho trường hợp này). Sự kiện (x_2, t_2) chỉ có thể có nguyên nhân là sự kiện (x_1, t_1) nếu hai sự kiện đó liên hệ với nhau bằng tín hiệu không lớn hơn vận tốc ánh sáng c nhưng theo (11.11) thì:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{c^2}{v} > c$$

nghĩa là hai sự kiện đó chỉ có thể liên hệ với nhau bằng vận tốc lớn hơn vận tốc ánh sáng, điều này thì thuyết tương đối không cho phép.

11.2.3. BIẾN ĐỔI LORENTZ CHO VẬN TỐC

Vận tốc của một chất điểm có tọa độ x' trong K' xác định bởi $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ theo biến đổi

Lorentz (11.8):

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{1 - \frac{v}{c^2} dt}$$

chia cả tử số và mẫu số cho dt ta được:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{dy'}{dt'} = u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} ; \quad \frac{dz'}{dt'} = u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (11.12)$$

Từ (11.12) ta thấy hệ chuyển động dọc theo trục $OX \equiv O'X'$ nhưng thành phần vận tốc theo trục $O'Y', O'Z'$ vẫn thay đổi do khoảng thời gian dt' thay đổi.

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \end{aligned} \quad (11.14)$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

Biến đổi vận tốc từ K sang K' Biến đổi vận tốc từ K' sang K

Nếu tốc độ ánh sáng trong hệ K' là c/n (trong đó n là chiết suất của môi trường) thì tốc độ ánh sáng đo so với hệ phòng thí nghiệm K là:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v \frac{u'_x}{c^2}} \quad \text{suy ra } u_x \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

Nếu vận tốc ánh sáng trong hệ K' là c (vận tốc ánh sáng trong chân không) thì vận tốc của nó trong K theo biến đổi Lorentz cũng là c .

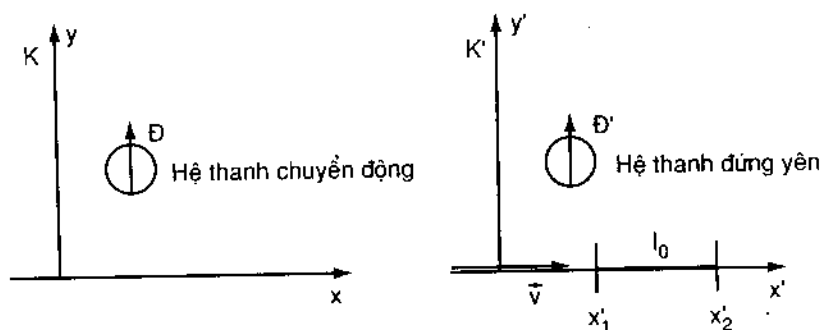
$$u'_x = c \text{ thì } u_x = \frac{c \pm v}{1 \pm \frac{v \cdot c}{c^2}} = c$$

11.3. SỰ CO DỘ DÀI (SỰ CO LORENTZ)

Bây giờ ta xét hệ quả thứ nhất của biến đổi Lorentz. Độ dài của một vật được đo qua các vị trí điểm đầu và điểm cuối tại cùng một thời điểm. Ta xét một thanh gắn với hệ quy chiếu K' chuyển động với vận tốc v so với hệ K (xem hình 11-3). Độ dài thanh trong hệ K' là:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \quad (11.15)$$

Nếu đo độ dài của thanh trong hệ K (chuyển động so với thanh với vận tốc $-v$) tại thời điểm t_0 thì sao?



Hình 11-3. Độ dài thanh khác nhau nếu đo ở hai hệ quy chiếu đứng yên (K) và chuyển động (K') so với thanh.

Sử dụng biến đổi Lorentz (11.8) cho tọa độ từ hệ K sang K' ứng với các phép đo ở thời điểm t_0 thì:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Từ đó suy ra :

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{hay} \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.16)$$

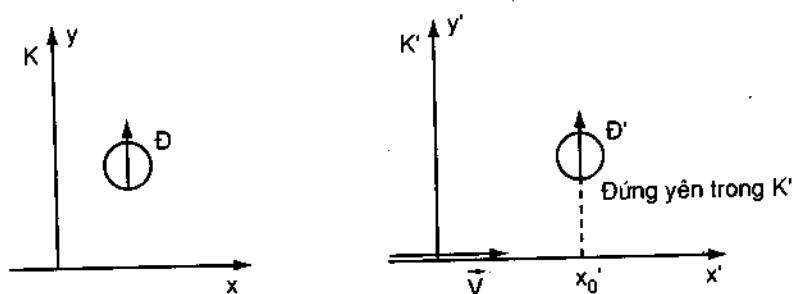
với $l = x_2 - x_1$ độ dài đo trong K. Từ (11.16) ta thấy $l < l_0$ hay độ dài của thanh đo trong hệ quy chiếu chuyển động (hệ K) ngắn hơn so với đo trong hệ quy chiếu đứng yên (hệ K'). Đó gọi là sự co độ dài Lorentz.

11.4. SỰ CHẬM LẠI CỦA THỜI GIAN ĐO BẰNG ĐỒNG HỒ CHUYỂN ĐỘNG

Khoảng thời gian riêng giữa hai sự kiện xảy ra trong hệ K' đo bằng đồng hồ Đ' đặt tại điểm x'_0 :

$$\Delta\tau = t'_2 - t'_1 \quad (11.17)$$

Khoảng thời gian tương ứng đo bởi đồng hồ Đ đặt trong K là $\Delta t = t_2 - t_1$ với t_1, t_2 xác định từ biến đổi Lorentz từ K' sang K:



Hình 11-4. Sự chậm lại của thời gian đo bằng đồng hồ chuyển động trong K'.

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Từ đó:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.18)$$

Theo (11.18) khoảng thời gian riêng của hệ chuyển động $\Delta\tau$ cũng nhỏ hơn khoảng thời gian tương ứng của hệ đứng yên Δt .

11.5. CƠ HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Điện tích là một đại lượng bất biến. Điều này có thể suy ra từ điều kiện trung hoà của hệ nguyên tử gồm hạt nhân và điện tử khi chuyển từ một hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác. Do đó chỉ có thể khối lượng của hạt là phụ thuộc vào tốc độ:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.19)$$

m – khối lượng tương đối tính; m_0 là khối lượng tĩnh hay khối lượng nghỉ của hạt.

Động lượng (hay xung lượng) tương đối tính của hạt có dạng:

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.20)$$

Lực tương đối tính tác dụng lên hạt cũng được xác định từ vận tốc thay đổi xung lượng tương đối tính của nó:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (11.21)$$

Hệ thức giữa năng lượng và khối lượng

Xuất phát từ phương trình chuyển động tương đối tính (11.21), ta nhân vô hướng hai vế phương trình đó với vectơ vận tốc và được:

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\vec{F}, \vec{v})$$

Biến đổi một chút vế trái của phương trình trên ta nhận được ở vế này một biểu thức có ý nghĩa như sự thay đổi năng lượng của hạt trong một đơn vị thời gian:

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\text{hay: } \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (11.22)$$

Bên phải phương trình trên chính là công mà lực tương đối tính thực hiện lên hạt trong một đơn vị thời gian (công suất). Từ đó ta suy ra biểu thức liên hệ giữa năng lượng và khối lượng của hạt:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \quad (11.23)$$

m - khối lượng tương đối tính còn E được gọi là năng lượng toàn phần của hạt.

$E_0 = m_0 c^2$ được gọi là năng lượng tĩnh hay năng lượng riêng của vật thể. Khi $v \ll c$ khai triển vào chuỗi theo bậc bé v^2/c^2 , ta có:

$$E = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (11.24)$$

Số hạng thứ hai trong (11.24) chính là động năng cổ điển. Tốc độ thay đổi của năng lượng (11.22) cho ta định lý về công suất hay định lý động năng đã biết trong trường hợp cổ điển:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v^2}{2} \right) = (\vec{F}, \vec{v})$$

Năng lượng toàn phần của vật được coi là tổng của năng lượng tĩnh và động năng tương đối tính T :

$$E = E_0 + T$$

Động năng tương đối tính là hiệu của năng lượng toàn phần của vật và năng lượng tĩnh của nó:

$$T = E - E_0$$

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (11.25)$$

Nếu tốc độ hạt nhỏ hơn tốc độ ánh sáng rất nhiều, trong giới hạn cơ học cổ điển ta nhận lại biểu thức cho động năng cổ điển đã biết:

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Hệ thức thứ nhất giữa năng lượng và xung lượng được viết là:

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (11.26)$$

Hệ thức này có thể chứng minh như sau: nhân hai vế với đồng nhất thức:

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

với $m_0^2 c^4$ ta được:

$$\frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$$

Thay (11.20), (11.23) vào đẳng thức trên, ta có:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad \text{hay} \quad E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (\text{đpcm})$$

Hệ thức thứ hai giữa năng lượng và xung lượng được suy ra dễ dàng nhờ (11.20) và (11.23):

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (11.27)$$

Hạt có khối lượng nghỉ $m_0 = 0$ và $v = c$ đó chính là photon (lượng tử ánh sáng), khi đó giữa năng lượng và xung lượng của photon có hệ thức:

$$|\vec{P}| = \frac{E}{c} \quad (\text{photon}) \quad (11.28)$$

11.6. ĐỘ HỤT KHỐI LƯỢNG

Hạt nhân nguyên tử: proton, neutron gọi là nucleon liên kết với nhau trong hạt nhân nhờ lực hạt nhân (lực hút). Năng lượng do lực hút này gây ra là đại lượng âm. Gọi năng lượng toàn phần của hạt nhân là E còn ΔE là năng lượng tương tác của proton và neutron (gồm cả thế năng và động năng).

$$E = mc^2 \quad (11.29)$$

Khối lượng hạt nhân trong công thức trên có thể viết như sau:

$$m = m_p + m_n - \Delta m \quad (11.30)$$

Khối lượng của hạt nhân luôn nhỏ hơn tổng khối lượng của proton và neutron một lượng Δm (Δm là độ hụt khối lượng). Độ hụt khối lượng là mức đo liên kết của proton và neutron. ΔE còn được gọi là năng lượng liên kết. Nếu tổng số nucleon là A thì năng lượng liên kết tính cho 1 nucleon là:

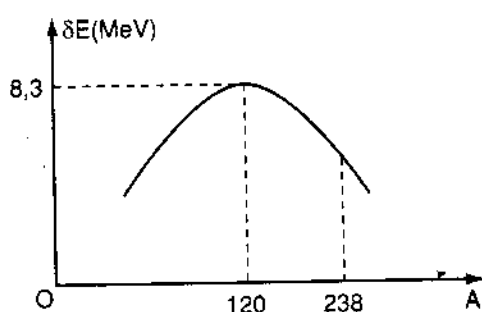
$$\delta E = \frac{\Delta E}{A} = \frac{\Delta m}{A} c^2 \quad (11.31)$$

Sự phụ thuộc δE vào A có dạng như hình 11-5.

Ở cuối bảng tuần hoàn Mendeleev, các hạt nhân với số nucleon $A > 238$ có năng lượng liên kết nhỏ, các hạt nhân này không bền vững.

Thí dụ 1:

Hạt nhân ở cuối bảng tuần hoàn bị tách thành hai hạt nhân có khối lượng gần bằng nhau ở giữa bảng tuần hoàn. Theo hình vẽ, năng lượng liên kết của mỗi hạt nhân này ($\delta E_1, \delta E_2$) tính cho mỗi nucleon lớn hơn năng lượng liên kết đối với hạt nhân trong trạng thái ban đầu. Nói một cách khác các nucleon trong các hạt nhân liên kết chặt chẽ hơn trong hạt nhân ban đầu. Tổng khối lượng tính thu được sau khi phân chia sẽ nhỏ hơn khối lượng tính của hạt nhân ban đầu.



Hình 11-5. Cực đại của năng lượng liên kết tính trên một nucleon.

$$m_1 + m_2 < m$$

Từ đó ta thấy tổng năng lượng toàn phần của hạt nhân sau khi phân chia nhỏ hơn năng lượng của hạt nhân ban đầu:

$$E_1 + E_2 < E$$

Năng lượng dư thừa khi phân chia:

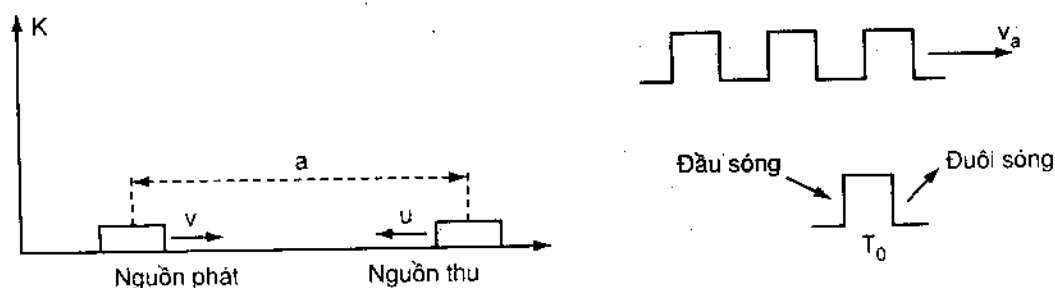
$$E - (E_1 + E_2)$$

biến thành động năng của các hạt sau khi phân chia và bức xạ đó là năng lượng nguyên tử thường được sử dụng trong các lò phản ứng hạt nhân và trong bom nguyên tử. Nếu hai hạt nhân nhẹ nằm ở đầu bảng hệ thống tuần hoàn kết hợp với nhau thì hạt nhân tạo thành nằm gần giữa bảng tuần hoàn và các nucleon sẽ liên kết với nhau mạnh hơn so với liên kết ở các hạt nhân ban đầu. Cũng như trường hợp trên, chúng ta có thể phân tích tương tự và đi đến kết luận là trong quá trình kết hợp hạt nhân nhẹ, năng lượng được toả ra. Năng lượng này được sử dụng trong bom khinh khí.

11.7. HIỆU ỨNG DOPPLER

11.7.1. HIỆU ỨNG DOPPLER CỔ ĐIỂN

Đó là hiệu ứng mà các đặc trưng sóng (tần số, chu kỳ, bước sóng) mà máy thu ghi nhận được phụ thuộc vào trạng thái chuyển động của cả nguồn phát dao động và máy thu. Ta xét trường hợp mà nguồn phát dao động chuyển động với vận tốc v , máy thu chuyển động ngược lại với vận tốc u (hình 11-6). Vận tốc truyền sóng, chu kỳ dao động của nguồn là v_a và T_0 tương ứng khi cả nguồn và máy thu đều đứng yên.



Hình 11-6. Cấu hình mô tả hiệu ứng Doppler.

Vận tốc sóng tương đối so với máy thu là $v_a + u$.

Vận tốc nguồn so với máy thu là $v + u$.

Ở thời điểm t_1 sóng phát ra đầu sóng tới máy thu tại $t'_1 = t_1 + \frac{a}{v_a + u}$.

Ở thời điểm $t_2 = t_1 + T_0$ đuôi sóng đơn lẻ được phát ra, đuôi sóng đến máy thu ở thời điểm $t'_2 = t_1 + T_0 + \frac{a - (v + u)T_0}{v_a + u}$.

Từ đó suy ra chu kỳ của dao động của sóng mà máy thu ghi được là:

$$T = t'_2 - t'_1 = T_0 - \frac{v + u}{v_a + u} T_0 = \frac{v_a - v}{v_a + u} T_0$$

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T} \frac{\left(1 - \frac{v}{v_a}\right)}{\left(1 + \frac{u}{v_a}\right)} \quad \text{hay} \quad f = f_0 \frac{1 + \frac{u}{v_a}}{1 - \frac{v}{v_a}} \quad (11.32)$$

Từ (11.32) ta thấy khi nguồn và máy thu lại gần nhau thì tần số mà máy thu ghi nhận được lớn hơn tần số dao động mà nguồn phát ra $f = \frac{1}{T} > f_0 = \frac{1}{T_0}$.

Ta có thể tổng quát hoá (11.32) cho trường hợp nguồn và máy thu đi ra xa nhau chú ý rằng khi đó dấu của vectơ vận tốc là ngược lại:

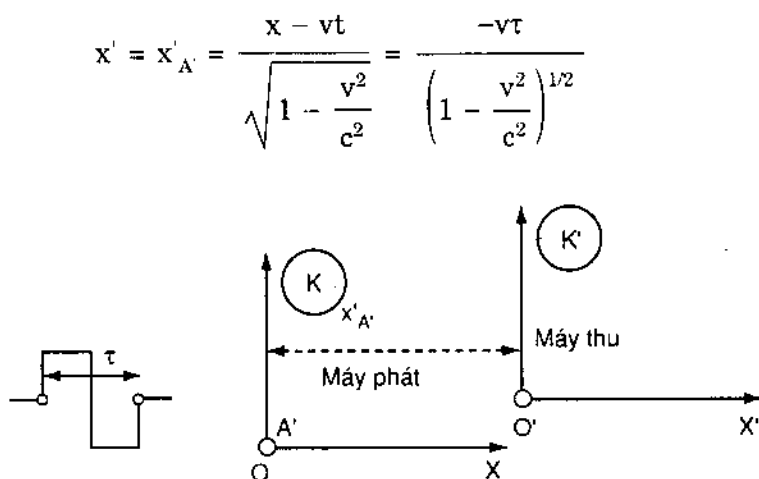
$$f = f_0 \frac{1 \pm \frac{u}{v_a}}{1 \mp \frac{v}{v_a}} \quad (11.33)$$

Dấu phía trên (+) đúng trong trường hợp nguồn thu phát lại gần nhau. Dấu phía dưới (-) đúng khi chúng xa nhau. Dễ thấy rằng bước sóng mà máy thu ghi nhận được không phụ thuộc vào tốc độ máy thu u mà chỉ phụ thuộc vận tốc nguồn v :

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 \mp \frac{v}{v_a}\right) \quad (11.34)$$

11.7.2. HIỆU ỨNG DOPPLER DỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Bây giờ ta xét hiệu ứng Doppler khi hệ quy chiếu K' chuyển động vận tốc v so với K đứng yên và vận tốc này là đáng kể so với vận tốc ánh sáng. Hai tín hiệu ánh sáng liên tiếp phát ra từ nguồn đặt tại K ở điểm $x = 0$ tại thời điểm $t = 0$ và $t = \tau$. Tín hiệu thứ nhất được máy thu đặt ở gốc của K' có toạ độ $x' = 0$ ghi nhận giả thiết tại thời điểm $t' = 0$. Vị trí của điểm A' thuộc K' (chính là điểm gốc của K có toạ độ $x = 0$ trong K) tại thời điểm $t = \tau$ xác định theo biến đổi Lorentz (xem hình 11-7) là:



Hình 11-7. Cấu hình mô tả hiệu ứng Doppler tương đối tính.

Thời điểm ứng với $t = \tau$ trong K' là t' (tín hiệu thứ hai bắt đầu phát ra):

$$t' = \frac{t - v \frac{x}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Thời gian cần để tín hiệu thứ hai trong K' đi hết quãng đường $x'_{A'} = x'$ đến góc tọa độ O' (nơi có máy thu) là:

$$\Delta t' = \frac{|x'|}{c} = \frac{\tau \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Như vậy trong K' khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp nhận tín hiệu tại máy thu đặt ở $x' = 0$ là:

$$\tau' = t' + \Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\tau \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (11.35)$$

Thời gian giữa hai lần nhận tín hiệu trong K' của máy thu chính là thời gian giữa hai nút sóng ánh sáng, như vậy tần số ánh sáng mà máy thu chuyển động nhận được là:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \text{suy ra} \quad f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (11.36)$$

Nếu máy thu đi xa nguồn $\frac{v}{c} > 0 \Rightarrow f' < f$, tần số máy thu nhận được sẽ nhỏ hơn tần số nguồn trong hệ quy chiếu K đứng yên. Nếu máy thu lại gần nguồn đứng yên, ta có kết quả ngược lại $\frac{v}{c} < 0 \Rightarrow f' > f$.

Công thức gần đúng cho tần số mà máy thu ghi nhận được theo tham số bé $\frac{v}{c}$ dễ dàng nhận được từ (11.36):

$$f' = f \left(1 - \frac{v}{2c} + \frac{1}{8} \frac{v^2}{c^2} \dots \right) \left(1 - \frac{v}{2c} + \frac{1}{8} \frac{v^2}{c^2} \dots \right) \quad (11.37)$$

$$f' = f \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

Trong gần đúng bậc nhất theo tham số bé $\frac{v}{c}$ ta có thể lấy $f' = f \left(1 - \frac{v}{c} \right)$. Vì bước sóng phụ thuộc tần số theo công thức $\lambda = \frac{c}{f}$; $\lambda' = \frac{c}{f'}$ các bước sóng trong K và K' phụ thuộc nhau bởi phương trình:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (11.38)$$

Nếu nguồn lại gần máy thu đứng yên thì ta cần đổi dấu vận tốc $v \rightarrow -v$ và (11.38) trở thành $\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

11.1. Hiệu ứng dịch chuyển đỏ: vạch phổ ứng với bước sóng $5000 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$) đo trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm trên trái đất. Cùng vạch phổ đó đo được là $5200 \text{ \AA}$ trong phổ ánh sáng do một thiên hà chuyển động phát ra.

Hỏi: a) Vận tốc chuyển động của thiên hà là bao nhiêu ?

b) Khoảng cách từ trái đất tới thiên hà đó ?

Trả lời: a) $v = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$; b) $8 \cdot 10^{24} \text{ m}$ (hãy sử dụng công thức vận tốc tương đối của thiên hà $v = Hr$, trong đó hằng số thực nghiệm $H = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, còn r là khoảng cách từ trái đất tới thiên hà).

11.2. Chứng minh rằng điện tử tự do không thể hấp thụ photon.

Giải:

Sử dụng định luật bảo toàn xung lượng và năng lượng cho hệ kín gồm điện tử và photon. Giả sử điện tử khi chưa hấp thụ photon đứng yên sau đó có vận tốc là v ($v \neq 0$). Năng lượng photon bị hấp thụ là $h\nu$. Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$1) \quad m_0 c^2 + h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Theo định luật bảo toàn động lượng thì:

$$2) \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Từ hai phương trình trên ta thu được:

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Đơn giản phương trình này ta có kết quả sau:

$$c + \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \sqrt{c^2 - v^2} = c - v ; cv^2 = 2cv$$

Chỉ có hai giá trị của v thoả mãn phương trình này, đó là: $v = c$ hoặc $v = 0$. Điện tử với khối lượng nghỉ hữu hạn không thể chuyển động với vận tốc ánh sáng c , mặt khác theo giả định ban đầu $v \neq 0$, như vậy điện tử tự do không thể hấp thụ hoặc bức xạ photon.

11.3. Công suất hấp thụ bức xạ năng lượng mặt trời bởi khí quyển trái đất vào khoảng $1,4 \text{ kW/m}^2$. Nếu tất cả các năng lượng đó sinh ra do kết quả của phản ứng tạo ra hêli (He) từ hydro (H) trên mặt trời thì cứ mỗi giây có bao nhiêu tấn hydro bị "cháy" trên mặt trời? (sự mất mát năng lượng do phát ra neutrino có thể bỏ qua).

Trả lời: Khoảng $6,25 \cdot 10^8$ tấn mỗi giây.

11.4. Trong những lớp trên của bầu khí quyển trái đất có hạt μ -meson được sinh ra và chuyển động với vận tốc $v = 0,99 c$. Trước khi phân rã nó đi được khoảng cách $5,00 \text{ km}$. Hỏi:

a) Thời gian sống của hạt μ -meson mà chúng ta quan sát được? Thời gian đó bằng bao nhiêu trong hệ quy chiếu riêng gắn với hạt μ -meson?

b) Độ dày của lớp khí quyển mà hạt μ -meson xuyên qua đo trong hệ quy chiếu riêng gắn với chính hạt đó là bao nhiêu?

Trả lời: a) $2,33 \cdot 10^{-6} \text{ s}$; b) $0,7 \text{ km}$.

11.5. Hạt π -meson ($m_\pi = 273 m_e$) phân rã thành μ -meson ($m_\mu = 207 m_e$) và neutrino ($m_\nu = 0$). Hãy tính động năng của μ -meson trong đơn vị MeV (Mega electron volt) và động lượng của nó.

Trả lời: $T = 4,1 \text{ MeV}$; $p_\mu = 29,8 \text{ MeV}$ (đo trong đơn vị $c = 1$).

11.6. Hãy chứng minh rằng áp suất của bức xạ photon (áp suất ánh sáng) được cho bởi biểu thức $P = \frac{W}{3}$. Trong đó W là mật độ năng lượng photon $W = nh\nu$, n là mật độ photon.

Chương 12

CƠ HỌC CHẤT LƯU

12.1. ÁP SUẤT TẠI MỘT ĐIỂM TRONG CHẤT LƯU

Chất lưu bao gồm cả chất lỏng và chất khí. Theo cách hiểu thông thường, chất lưu là chất có thể "chảy được" tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của một lực nhỏ. Chất lưu đóng vai trò cực kỳ quan trọng trong đời sống hàng ngày: con người hít thở dưỡng khí, uống nước, máu tuần hoàn trong cơ thể, v.v... các chất đó đều là chất lưu. Nếu ta đựng chất lưu trong một bình chứa có hình dạng nhất định thì khối chất lưu sẽ có hình dạng của bình chứa. Điều đó có nguyên nhân là trong chất lưu ở trạng thái cân bằng không tồn tại sức căng tiếp tuyến đối với bề mặt của nó.

12.1.1. KHỐI LƯỢNG RIÊNG (MẬT ĐỘ), ÁP SUẤT

Khi nghiên cứu tính chất của vật rắn, chúng ta thường nói về một lượng chất như một khúc gỗ, một quả cầu sắt... Các đại lượng vật lý được dùng để thể hiện các định luật Newton là khối lượng và lực. Thí dụ ta dùng cách nói: lực 25 N tác dụng lên khối lượng 3,6 kg. Đối với chất lưu người ta quan tâm chủ yếu đến các tính chất thay đổi trong thể tích của một lượng chất lưu lớn hơn là quan tâm đến một khối lượng nhỏ. Chính vì vậy mà các đại lượng thường được sử dụng là khối lượng riêng (mật độ) và áp suất thay cho khối lượng và lực.

Để xác định khối lượng riêng ρ tại một thời điểm nào đó của chất lưu ta xét một thể tích ΔV chứa điểm đó và đo khối lượng Δm của chất lưu chứa trong đơn vị thể tích đó. Khối lượng riêng được xác định bằng tỷ số sau:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (12.1)$$

Mật độ chất lưu tại một điểm là giới hạn của (12.1) khi ΔV tiến tới không (đạo hàm của m theo V). Trên thực tế, mẫu chất lưu rất lớn so với kích thước của các nguyên tử chất lưu và trong đại đa số các trường hợp chất lưu là đồng tính trong thể tích của nó nên ta có thể viết:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (12.2)$$

Trong đó: m là khối lượng, V là thể tích của mẫu chất lưu. Đơn vị của khối lượng riêng trong hệ SI là kg/m^3 . Bảng 1 cho ta khối lượng riêng của một số chất và

vật. Khi có áp lực tác dụng, khối lượng riêng của chất khí thay đổi rất nhiều còn của chất lỏng thì không, do đó ta nói khí là chịu nén (nén được) còn chất lỏng thì không chịu nén.

Bảng 12-1. Khối lượng riêng của một số chất

Chất hay đối tượng	Khối lượng riêng, kg/m ³
Khoảng không giữa các vì sao	10 ⁻²⁰
Chân không tốt nhất ở trong phòng thí nghiệm	10 ⁻¹⁷
Không khí ở 20°C và 1 atm	1,21
Không khí ở 20°C và 50 atm	60,25
Nước biển ở 20°C và 1 atm	1,024.10 ³
Băng	0,917.10 ³
Sắt	7,6.10 ³
Thủy ngân	13,6.10 ³
Quả đất (trung bình)	5,5.10 ³
Mặt trời (trung bình)	1,4.10 ³
Sao lùn trắng (lõi)	10 ¹⁰
Sao Nơtron (lõi)	10 ¹⁸

12.1.2. ÁP SUẤT

Áp suất trong lòng một chất lưu tại một vùng nhỏ nào đó được đo bằng cảm biến (sensor) áp suất. Cảm biến áp suất, gồm một pittông có diện tích bề mặt S chuyển động trong một xilanh nhẵn, bên dưới pittông có một lò xo nhạy để xác định cường độ lực nén (xem hình 12-1). Nếu ΔF là lực ép tác dụng lên pittông có diện tích ΔS thì áp suất của chất lỏng lên pittông được xác định bởi:

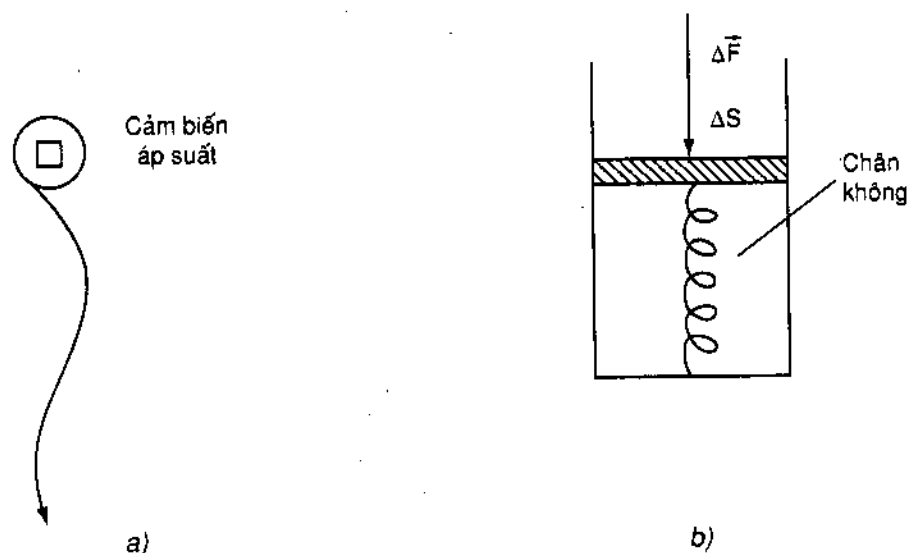
$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (12.3)$$

Áp suất tại một điểm nào đó của chất lỏng là giới hạn của tỷ số trên khi ΔS tiến tới không. Nếu tác dụng của lực nén lên mọi điểm của diện tích ΔS là như nhau thì phương trình trên trở thành:

$$P = \frac{F}{S} \quad (12.4)$$

Áp suất là đại lượng vô hướng. Thí nghiệm trên hình 12-1 cho thấy: Khi ta cố định vị trí của cảm biến tại một điểm nhưng quay nó theo các hướng khác nhau, cảm biến sẽ chỉ cùng một giá trị áp suất. Đơn vị của áp suất trong hệ SI là Newton trên mét vuông (N/m²) còn gọi là Pascal (Paxcan) kí hiệu là Pa:

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} \quad (12.5)$$



Hình 12-1. a) Bình chứa chất lưu và cảm biến; b) Cấu tạo của cảm biến.

Ngoài ra người ta còn sử dụng một số đơn vị đo áp suất khác như át mốt phe (kí hiệu là atm) hoặc torr (chữ đầu của tên nhà bác học E. Torricelli – người sáng chế áp kế thuỷ ngân năm 1674). Trước kia milimét thuỷ ngân (mm Hg) thường được kí hiệu thay cho torr. Mối liên hệ giữa các đơn vị có thể viết như sau:

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} \quad (12.6)$$

Bảng 12-2 cho ta một số áp suất tiêu biểu.

Bảng 12-2: Một số áp suất tiêu biểu

Áp suất	Pa
Tại tâm Mặt trời	$2 \cdot 10^{16}$
Tại tâm Trái đất	$4 \cdot 10^{11}$
Áp suất cao nhất trong phòng thí nghiệm	$1,5 \cdot 10^{10}$
Khí trong bánh xe ô tô (đã trừ áp suất khí quyển)	$2 \cdot 10^5$
Áp suất khí quyển ở mức mặt biển	10^5
Áp suất máu (trung bình)	$1,6 \cdot 10^4$
Áp suất âm to nhất lên màng nhĩ tai (đã trừ đi áp suất khí quyển)	30
Chân không tốt nhất của phòng thí nghiệm	10^{-12}

12.1.3. ÁP SUẤT TẠI MỘT ĐIỂM TRONG CHẤT LƯU

Xét chất lỏng là nước chứa trong một thùng (hình 12-2). Chúng ta biết rằng áp suất càng tăng khi càng đi sâu vào trong lòng chất lỏng. Vì chất lỏng ở trạng thái nghỉ nên áp suất trong trường hợp này được gọi là *áp suất thuỷ tĩnh*. Xét một khối

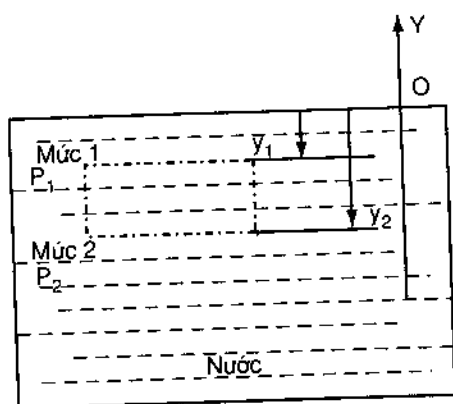
lượng nước chứa trong một thể tích hình trụ tương đương có diện tích đáy là S vuông góc với đường thẳng đứng (trục OY , điểm O ở mặt tiếp giáp không khí – chất lỏng). Do khối lượng nước ở trạng thái tĩnh nên lực tác dụng lên đáy dưới là $F_2 = P_2 S$ (hướng lên trên) bị cân bằng bởi lực tác dụng lên đáy trên $F_1 = P_1 S$ và trọng lực $P = mg$ (đều hướng xuống dưới). Nghĩa là $F_2 = F_1 + mg$.

Nếu khối lượng riêng của chất lỏng là ρ , ta có $m = \rho S(y_1 - y_2)$ và:

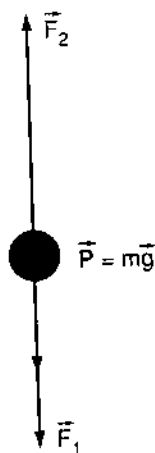
$$P_2 S = P_1 S + \rho g S(y_1 - y_2) \quad (12.7)$$

hay:

$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) \quad (12.8)$$



a)



b)

Hình 12-2.

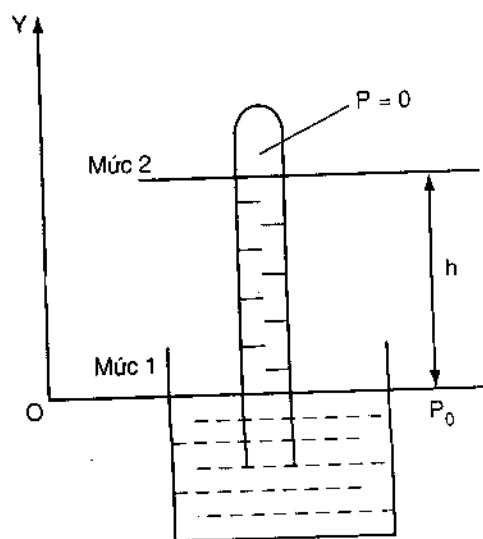
- a) Lượng nước chứa trong thể tích tương đương hình trụ có đáy S , chiều cao $y_1 - y_2$;
b) Giảm đồ lực tác dụng lên lượng nước chứa trong hình trụ tương đương.

Nếu ta cần tính áp suất ở độ sâu h so với mặt thoáng tiếp xúc giữa chất lỏng và không khí thì phải đặt $y_1 = 0$, $P_1 = P_0$ (áp suất khí quyển), $y_2 = -h$, $P_2 = P$. Phương trình (12.8) trở thành:

$$P_2 = P_0 + \rho gh \quad (12.9)$$

Phương trình (12.9) cho thấy áp suất trong lòng chất lỏng chỉ phụ thuộc vào độ sâu chứ không phụ thuộc vào hình dạng bình chứa.

Ta có thể sử dụng (12.9) để xác định áp suất khí quyển P_0 nhờ độ cao của cột thủy ngân (xem hình 12-3). Ta chọn mức thứ nhất là mặt tiếp xúc không khí – thủy ngân ở mức



Hình 12-3. Áp suất khí quyển.

này áp suất là P_0 , mức thứ hai là đỉnh cột thủy ngân có áp suất $P = 0$. Thay $y_1 = 0$, $P_1 = P_0$, $y_2 = h$, $P_2 = 0$, ta được:

$$P_0 = \rho gh \quad (12.10)$$

Độ cao của cột thủy ngân h (được đo bằng mm) về trị số đúng bằng áp suất đo với đơn vị torr trong trường hợp gia tốc rơi tự do $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ và nhiệt độ của thủy ngân là 0°C .

12.1.4. NGUYÊN LÝ PASCAL (PASCAL)

"Trong một chất lưu không chịu nén bất kỳ độ tăng áp suất nào tại một điểm cũng được truyền nguyên vẹn cho toàn khối chất lưu".

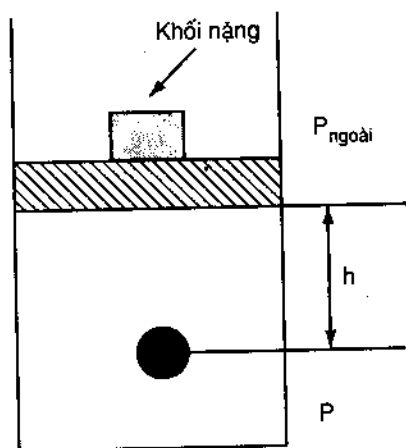
Để minh họa nguyên lý Pascal, ta xét hình 12-4 mô tả thí nghiệm sau: khí quyển, khối nặng và pittông tác dụng lên bề mặt chất lỏng. Gọi áp suất ngoài là $P_{\text{ngoài}}$, áp suất tại điểm bất kỳ trong lòng chất lỏng P được xác định theo (12.9) là:

$$P = P_{\text{ngoài}} + \rho gh \quad (12.11)$$

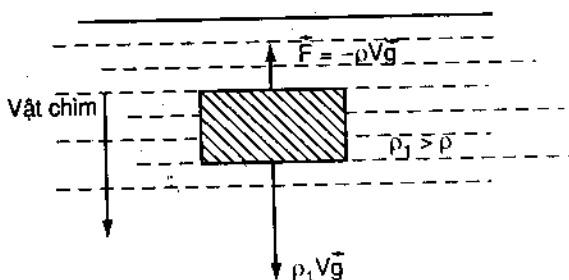
Nếu ta tăng trọng lượng khối nặng – thay đổi $P_{\text{ngoài}}$ một lượng $\Delta P_{\text{ngoài}}$, do độ sâu h tại đó ta xét áp suất là xác định nên:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{ngoài}} \quad (12.12)$$

Sự thay đổi áp suất trong lòng chất lỏng không phụ thuộc h (như nhau cho mọi điểm trong lòng chất lỏng) đúng như nguyên lý Pascal.



Hình 12-4. Thí nghiệm dẫn tới nguyên lý Pascal.



Hình 12-5. Nguyên lý Archimede.

12.1.5. NGUYÊN LÝ ARCHIMEDE (ARCHIMET)

"Tổng hợp lực do một chất lưu cân bằng tác dụng vào một vật đặt trong đó là một lực hướng theo phương thẳng đứng từ dưới lên trên có cường độ bằng trọng lượng phần chất lưu mà vật chiếm chỗ và đặt tại trọng tâm của phần chất lưu bị chiếm chỗ ấy".

Nguyên lý Achimede có thể được suy ra từ phương trình (12.7):

$$F_A = F_2 - F_1 = mg = \rho Vg \quad (12.13)$$

Về bên trái của phương trình trên chính là lực đẩy của môi trường lên khối lượng chất lỏng m chứa trong thể tích $V = S(y_1 - y_2)$, lực đó gọi là lực đẩy Achimede F_A cân bằng với trọng lực. Nếu ta thay lượng chất lỏng khối lượng m bằng một vật khác có cùng hình dạng, thể tích, thì lực đẩy Achimede tác dụng lên vật đó vẫn như vậy. Nếu vật là đồng tính có khối lượng $m_1 = \rho_1 V$ thì nó nổi khi $\rho_1 < \rho$, còn khi $\rho_1 > \rho$ vật chìm do trọng lực lớn hơn lực đẩy Achimede (hình 12-5).

12.2. SỰ CHẢY CỦA CHẤT LƯU LÝ TƯỜNG

12.2.1. CHẤT LƯU LÝ TƯỜNG

Chúng ta sẽ nghiên cứu chất lưu trong trạng thái chuyển động. Chuyển động của chất lưu thực rất phức tạp nên trước hết ta nghiên cứu chuyển động của "chất lưu lý tưởng" – một đối tượng đơn giản hơn và có thể mô tả được bằng toán học khá chính xác. Trong chất lưu lý tưởng phần nọ trượt lên phần kia trong khi chuyển động hoàn toàn không tiêu thụ công. Như vậy trong chất lưu lý tưởng, lực căng bao giờ cũng vuông góc với bề mặt mà nó tác dụng. Ta cụ thể hoá trường hợp chất lưu chuyển động được khảo sát là:

- + Có dòng chảy ổn định (còn gọi là dòng chảy dừng). Vận tốc chất lỏng tại một điểm cố định nào đó không thay đổi cả về độ lớn lẫn phương và chiều theo thời gian (trường hợp ngược lại là trường hợp cuộn xoáy).

- + Dòng chảy của chất lỏng không chịu nén (khối lượng riêng của chất lỏng không thay đổi khi bị nén).

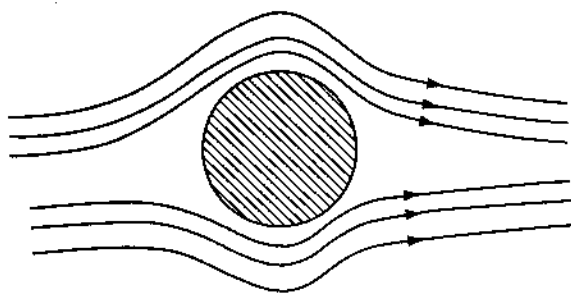
- + Dòng chảy không có nhớt. Hiện tượng nhớt là tương tự của hiện tượng ma sát trong chuyển động của vật rắn. Cả hai hiện tượng đều có một hệ quả là động năng của vật chuyển động biến thành nhiệt năng. Cũng như trường hợp vật trượt với vận tốc không đổi trên mặt nằm ngang không có ma sát, trong chất lỏng không nhớt sẽ không có lực cản do hiện tượng nhớt gây ra.

12.2.2. ĐƯỜNG DÒNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH LIÊN TỤC

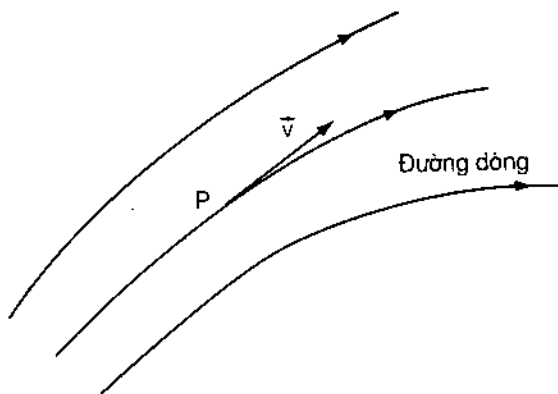
Hình 12-6 mô tả đường dòng của nước chảy ổn định quanh một vật hình trụ quan sát được bằng cách cho các hạt nhỏ được đánh dấu bằng màu vào trong nước. Đối với trường hợp chảy ổn định đường dòng chính là quỹ đạo của một phần tử nước nhỏ mà ta gọi là "hạt nước".

Hình 12-7 vẽ vectơ vận tốc của phần tử nước tại một điểm bất kỳ của đường dòng. Vectơ đó phải có phương tiếp tuyến với đường dòng tại điểm đó, hai đường dòng không cắt nhau (nếu cắt thì tại điểm cắt phần tử nước có hai vận tốc, điều đó là không thể).

Tập hợp các đường dòng tựa lên một đường cong kín gọi là ống dòng (hình 12-8). Vì vectơ vận tốc của hạt chất lưu hướng theo phương tiếp tuyến của đường dòng nên



Hình 12-6. Đường dòng chất lưu chảy quanh vật có thiết diện ngang hình tròn.



Hình 12-7. Đường dòng.

khi chuyển động, các hạt chất lưu không đi ra ngoài, không đi vào trong ống dòng. Theo ý nghĩa đó có thể coi chất lưu chuyển động trong ống dòng như trong những ống thực. Ta thấy ở thiết diện S_1 của ống dòng, phần tử chất lưu chuyển động với vận tốc v_1 , sau một khoảng thời gian Δt phần tử chất lưu đi được quãng đường $v_1 \Delta t$. Như vậy lượng nước qua thiết diện S_1 trong khoảng thời gian Δt là:

$$\Delta V = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

Do chất lưu là không nén được nên sau cùng khoảng thời gian Δt , lượng nước qua thiết diện S_2 (vận tốc dòng chảy đó là v_2) cũng như vậy:

$$\Delta V = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

Hay là

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}$$

(12.14)

Trong hệ đơn vị SI hằng số của phương trình (12.14) có đơn vị là m^3/s được gọi là *lưu lượng*. Còn phương trình được gọi là *phương trình liên tục*. Nếu nhân với khối lượng riêng chất lưu ρ thì hằng số mới $\rho S v$ được gọi là *lưu khối* có đơn vị là kg/s .

12.3. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI (BÉCNULI)

12.3.1. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI (BÉCNULI)

Hình 12-9 mô tả ống dòng của chất lưu lý tưởng ổn định. Sau một khoảng thời gian Δt , thể tích chất lỏng ΔV (gạch chéo trên hình) đi vào đầu bên trái của ống và một lượng chất lỏng như vậy đi ra ở đầu bên phải. Ta ký hiệu y_1, v_1, P_1 lần lượt là độ

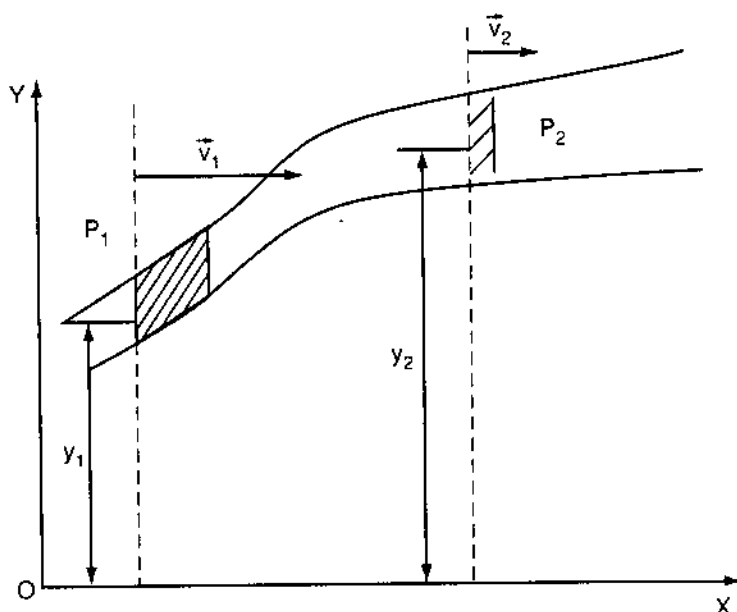
cao, vận tốc và áp suất của khối chất lưu ở đầu bên trái, còn y_2 , v_2 , P_2 là các đại lượng như vậy ở đầu bên phải. Áp dụng định lý động năng cho khối lượng chất lỏng chứa trong thể tích ΔV ta có:

$$A = \Delta K$$

$$\Delta K = \frac{\Delta m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

$$\Delta K = \frac{\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

(12.15)



Hình 12-9. Sự chảy của Δm trong ống dòng.

Trong đó: $\Delta m = \rho \Delta V$

Công mà ngoại lực thực hiện trên khối lượng Δm gồm hai phần:

+ Công của trọng lực khi khối nước thay đổi độ cao từ y_1 đến y_2 (bằng độ thay đổi thế năng của khối lượng nước ở hai vị trí đó):

$$A_p = \Delta m \cdot g(y_1 - y_2)$$

$$A_p = \rho \cdot g \cdot \Delta V \cdot (y_1 - y_2) \quad (12.16)$$

+ Công của ngoại lực $P_1 S_1$ đẩy lượng chất lỏng Δm đi quãng đường $\Delta x_1 = \Delta V / S_1$, lực $P_2 S_2$ cản lượng chất lỏng Δm đi quãng đường $\Delta x_2 = \Delta V / S_2$. Như vậy công tổng cộng của các ngoại lực khác là:

$$A_f = P_1 S_1 \frac{\Delta V}{S_1} - P_2 S_2 \frac{\Delta V}{S_2}$$

$$A_f = (P_1 - P_2) \Delta V$$

Từ đó ta có:

$$A = A_p + A_f = \Delta K$$

$$\rho g(y_1 - y_2) + P_1 - P_2 = \rho(v_2^2 - v_1^2)/2$$

Sau khi sắp xếp lại các số hạng ta được:

$$\rho v_1^2/2 + \rho g y_1 + P_1 = \rho v_2^2/2 + \rho g y_2 + P_2$$

$$\rho v^2/2 + \rho g y + P = \text{const} \quad (12.17)$$

Đó chính là phương trình Bernoulli nổi tiếng. Phương trình này có thể coi là một dạng định luật bảo toàn cơ năng áp dụng cho dòng chảy của chất lưu lý tưởng.

12.3.2. ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BÉCNULI

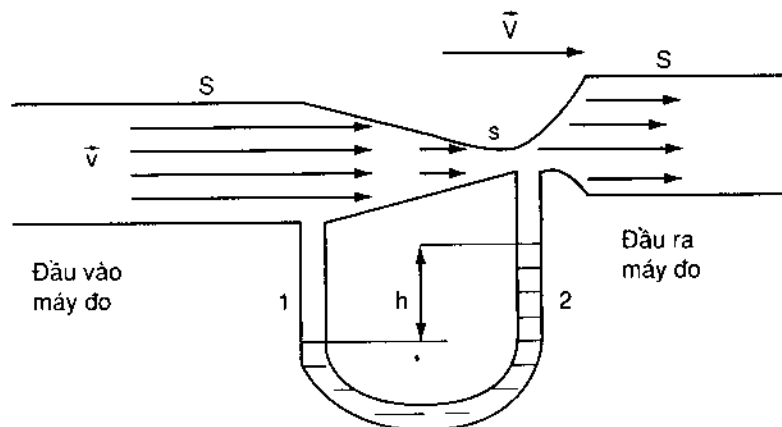
a) *Giải thích một số hiện tượng đơn giản:* khi gió mạnh (gió có vận tốc lớn) thổi ngang cửa sổ thì cửa sổ bị bật tung ra ngoài. Điều đó có nguyên nhân là, khi gió mạnh, áp suất bên ngoài cửa sổ giảm. Sự chênh lệch áp suất giữa trong và ngoài nhà gây ra hiện tượng trên. Ta cũng có thể giải thích hoàn toàn tương tự cho trường hợp tốc mái nhà khi có bão.

b) *Máy đo vận tốc dòng chảy Venturi:*

Phương trình Bernoulli khi độ cao không đổi ($y = \text{const}$) có dạng:

$$P + \rho v^2/2 = \text{const}$$

Nghĩa là chỗ nào áp suất lớn thì vận tốc chất lưu nhỏ và ngược lại. Nhà bác học Venturi đã sử dụng ý tưởng này để chế tạo máy đo dòng chảy (xem hình 12-10).



Hình 12-10. Máy đo vận tốc dòng chảy Venturi.

Máy đo gồm ống có đầu vào, đầu ra có cùng thiết diện S . Giữa đầu vào và đầu ra có một vùng thắt lại với thiết diện ngang là s . Khi chất lưu chảy qua thiết diện này, vận tốc của nó tăng từ v ở đầu vào tới V ở chỗ thiết diện s theo định luật dòng chảy liên tục. Theo phương trình Bernoulli ở chỗ nào vận tốc tăng ở đó áp suất giảm, vì vậy mực chất lỏng phía bên phải dâng lên và hai phía có độ chênh lệch mức chất lỏng là h . Dựa trên phép đo h , ta có thể xác định độ chênh lệch áp suất ΔP và sau đó xác định vận tốc v :

$$v.S = V.s$$

$$\Delta P = \frac{\rho(V^2 - v^2)}{2}$$

$$\Delta P = \frac{\rho v^2(S^2 - s^2)}{2s^2}$$

hay

$$v = \sqrt{\frac{2s^2 \cdot \Delta P}{\rho(S^2 - s^2)}}$$

12.4. SỰ CHẢY CỦA CHẤT LỎNG TRONG ỐNG

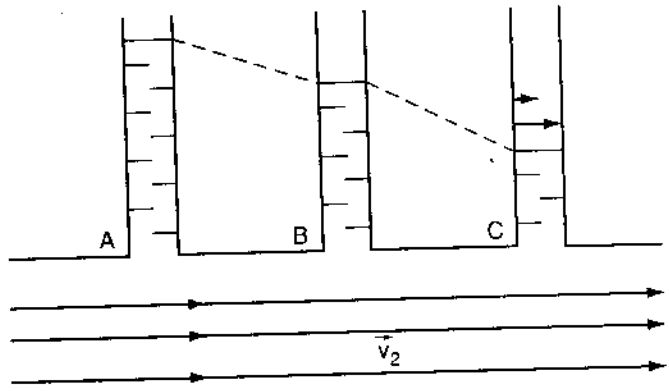
12.4.1. LỰC CẢN TRONG CHẤT LƯU

Trong chất lưu thực, ngoài những lực căng tác dụng theo phương pháp tuyến của bề mặt giới hạn của các phần chất lưu chuyển động, còn có các lực tác dụng theo phương tiếp tuyến của các bề mặt giới hạn đó. Các lực tiếp tuyến này gọi là lực nội ma sát hay độ nhớt. Ta có thể thấy rõ sự tồn tại của độ nhớt qua một số thí dụ sau:

Thí dụ 1:

Chất lưu thực chảy trong ống hình trụ có thiết diện ngang không đổi (hình 12-11).

Tại các điểm A, B, C ở thành ống, ta đặt các áp kế đo áp suất chất lưu tại các điểm đó. Khi chất lưu không chuyển động, ta thấy cột chất lưu trong các áp kế như nhau. Điều đó chứng tỏ áp suất tại các điểm A, B, C là bằng nhau. Khi chất lưu chảy trong ống thì xuôi theo dòng chảy các ống áp kế có mức thấp dần. Điều đó có nghĩa rằng xuôi theo dòng chảy, áp suất giảm dần mặc dù vận tốc chất lưu không đổi (chuyển động vẫn là ổn định).



Hình 12-11. Chất lưu thực (có nhớt) chảy trong ống trụ nằm ngang.

Sự chênh lệch áp suất giữa hai điểm A và B sinh ra một lực F hướng theo chiều dòng chảy của chất lưu. Tuy nhiên, do vận tốc chất lưu không đổi nên ta suy ra trong chất lưu phải tồn tại một lực tiếp tuyến F' trực đối với F để tổng hợp lực tác dụng lên chất lưu bằng không.

Lực F' đó gọi là lực cản nhớt, nó tồn tại ở mặt tiếp xúc giữa chất lưu và thành ống, giữa mặt tiếp xúc của các lớp chất lưu khác nhau giống như lực ma sát tồn tại ở chỗ tiếp xúc giữa hai vật rắn. Lực cản nhớt có khuynh hướng chống lại lực chuyển động tương đối của các lớp chất lưu, do đó làm tiêu hao năng lượng cơ học của dòng chất lưu. Một phần năng lượng cơ học đã biến thành nhiệt năng.

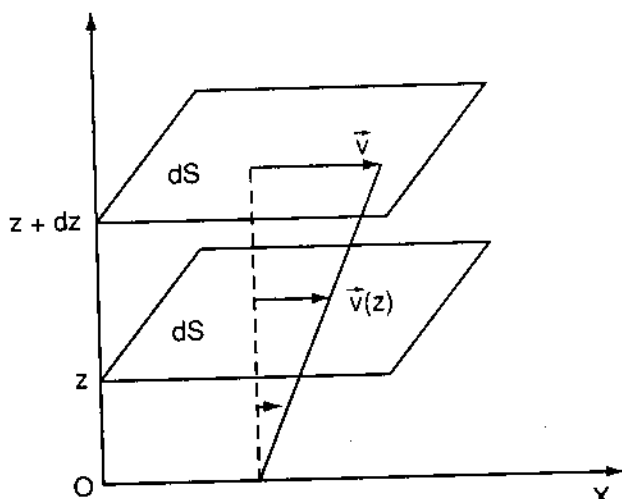
Thí dụ 2:

Khi khảo sát chuyển động của chất lưu ở gần mặt tiếp xúc với thành rắn, ta thấy các hạt chất lưu càng gần thành rắn có xu hướng dính vào thành. Càng xa thành rắn

khả năng đó càng giảm đi. Như vậy có tồn tại một lớp chất lưu ở sát thành rắn không chuyển động tương đối với thành này, lớp đó được gọi là lớp biên. Sự tồn tại của lớp biên này giúp chúng ta giải thích tại sao những hạt bụi nhỏ lại có thể dính vào cánh quạt máy đang quay. Lớp không khí ở sát cánh quạt không chuyển động so với cánh quạt nên không có cách nào để "thổi" chúng đi được mà phải lau.

12.4.2. BIỂU THỨC CHO LỰC CẢN NHỚT

Giả sử có một dòng chất lưu chảy trong một máng phẳng theo chiều dương trục x (xem hình 12-12). Trong dòng chất lưu, ta xét một lớp chất lưu giới hạn giữa hai độ cao z và $z+dz$. Gọi v là vận tốc hạt chất lưu tại một điểm M trong lớp. Vì có lực cản nhớt nên lớp chất lưu cuối cùng sát lòng máng có vận tốc bằng không. Càng lên cao, vận tốc lớp chất lưu càng tăng dần. Vận tốc của hạt chất lưu biến thiên liên tục theo độ cao z từ đáy đến mặt dòng. Nói cách khác v là hàm của độ cao z , $v = v(z)$. Đặc trưng cho sự biến thiên này là gradient của vận tốc $\frac{\partial v}{\partial z}$.



Hình 12-12. Chất lưu có nhớt chảy trong một máng phẳng nằm ngang.

Newton đã chỉ ra rằng lực cản nhớt xuất hiện ở mặt tiếp xúc giữa hai lớp chất lưu tỷ lệ với gradient vận tốc chất lưu ở nơi tiếp xúc và tỷ lệ với diện tích tiếp xúc:

$$dF = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \quad (12.18)$$

Trong (12.18), dS là một diện tích nguyên tố tại một điểm trên bề mặt tiếp xúc giữa hai lớp chất lưu. Hệ số η gọi là hệ số nhớt hay độ nhớt động lực của chất lưu. Đơn vị của độ nhớt trong hệ SI là $N.s/m^2$. Ngoài đơn vị này người ta còn dùng đơn vị khác cho phép đo độ nhớt gọi là poazơ:

$$1 \text{ poazơ} = 0,1 \text{ N.s/m}^2$$

Độ nhớt của chất lỏng giảm khi nhiệt độ tăng và không phụ thuộc vào áp suất, khi áp suất không quá lớn. Chất khí có hệ số nhớt tăng tỷ lệ với căn bậc hai của nhiệt độ tuyệt đối và không phụ thuộc vào áp suất khi chất khí còn tuân theo định luật Bôilơ - Mariot.

Một vật bất kỳ chuyển động trong lòng chất lỏng nhớt sẽ chịu tác dụng của lực nhớt. Trong trường hợp vật là hình cầu bán kính r chuyển động với vận tốc v trong

lòng chất lỏng có độ nhớt η , lực cản đó được tính theo công thức Stocks (Stốc, Gabriel Stokes 1819 - 1903):

$$F_{\text{cản}} = -6\pi\eta r v \tag{12.19}$$

Bảng 12-3 cho ta biết hệ số nhớt của một số chất ở hai nhiệt độ khác nhau 0°C và 15°C.

Bảng 12-3. Hệ số nhớt của một số chất ở hai nhiệt độ 0°C và 15°C

Chất	Hệ số nhớt η (Ns/m ²)	
	0°C	15°C
Glyxerin		
Nước	4,6	1,5
Thuỷ ngân	$1,8.10^{-3}$	$1,1.10^{-3}$
Không khí	$17,1.10^{-6}$	$18,1.10^{-6}$
Oxy	$18,7.10^{-6}$	$19,5.10^{-6}$
Hơi nước	$9,0.10^{-6}$	$9,7.10^{-6}$

12.4.3. SỐ REYNOLD (RÂY-NÔN) VÀ HAI CHẾ ĐỘ CHẢY CỦA CHẤT LƯU

Nghiên cứu sự chảy của chất lưu trong một ống người ta thấy ảnh hưởng của lực cản nhớt còn được thể hiện qua tỷ số không thứ nguyên R_e gọi là số Reynold:

$$R_e = \frac{\rho.v.l}{\eta} \tag{12.20}$$

Trong đó: l – là một độ dài đặc trưng, nó có thể là đường kính của ống, cũng có thể là căn bậc hai của thiết diện ống, v là vận tốc của chất lưu hay của vật chuyển động trong chất lưu.

Số Reynold còn có thể được biểu diễn dưới dạng khác:

$$R_e = \frac{v.l}{\nu}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Đại lượng ν có thứ nguyên là vận tốc nhân với độ dài và được gọi là *độ nhớt động*. Chú ý rằng theo định nghĩa trên, số Reynold không phải là một số được xác định chính xác, ta chỉ đánh giá được cỡ độ lớn của nó mà thôi. Để thấy rõ ý nghĩa của số Reynold, ta đánh giá tỉ số động năng của một khối chất lỏng và công của lực cản nhớt gây ra cho khối chất lỏng đó. Động năng có thể được đánh giá là $K \approx \rho.l^3.v^2/2$ còn công cản có bậc là:

$$A = F.l \approx \eta. \frac{v}{l} .l^2.l = \eta.v.l^2$$

Do đó:
$$\frac{K}{A} \approx \frac{\rho \cdot v^2 l^3}{\eta v l^2} = \frac{\rho v l}{\eta} = R_e$$

Tỷ số K/A tỉ lệ với số Reynold và do đó số Reynold xác định vai trò tương đối giữa quán tính và tính nhớt của chất lưu trong chuyển động của nó. Khi số Reynold lớn, quán tính đóng vai trò chủ yếu. Khi số Reynold nhỏ, tính nhớt của chất lưu đóng vai trò chủ yếu.

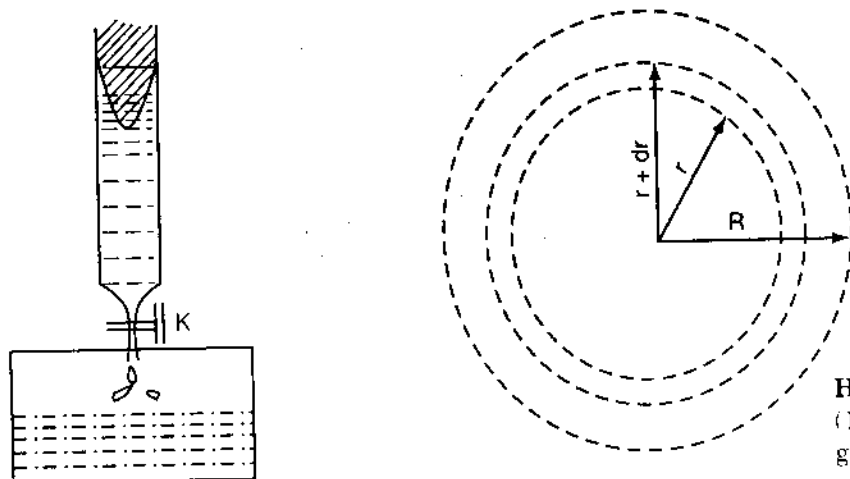
Nghiên cứu chuyển động của chất lưu trong ống ta thấy khi R_e nhỏ, vận tốc tại mọi điểm của dòng đều song song với trục ống, chứng tỏ các lớp mỏng của chất lưu trượt lên nhau mà không trộn lẫn nhau. Chế độ này gọi là *sự chảy thành lớp hay chế độ Poiseuille (Poazo)*.

Khi R_e lớn (dòng chảy với vận tốc lớn, độ nhớt nhỏ) trong dòng xuất hiện những chỗ xoáy mạnh khiến các lớp chất lưu nhanh chóng trộn lẫn với nhau, chế độ này được gọi là *chế độ xoáy*. Nếu đặc trưng cho sự chuyển chế độ chảy bằng một giá trị tới hạn của số Reynold, kí hiệu là R_e^* thì:

- + $R_e < R_e^*$ Dòng chất lưu chảy thành lớp.
- + $R_e > R_e^*$ Dòng chất lưu chảy xoáy.
- + $R_e \approx R_e^*$ Dòng chất lưu chảy không ổn định.

12.5. SỰ CHẢY CỦA CHẤT LỎNG QUA MỘT ỐNG TRÒN, PHƯƠNG TRÌNH POISEUILLE

Xét trường hợp chất lỏng thực có nhớt chảy qua một ống tròn trong chế độ dừng (vận tốc hạt chất lỏng chỉ phụ thuộc vị trí nhưng không phụ thuộc thời gian) và chảy thành lớp. Ta có thể làm một thí nghiệm minh họa như trên hình 12-13a: ống chứa nước sau đó được rót cẩn thận một lớp nước màu lên trên. Sau đó ta mở khoá K sao cho sự chảy vô cùng chậm, ta sẽ thấy phía trên hình thành một vùng nước màu dạng parabol tròn xoay. Sự hình thành vùng nước màu này do có ma sát giữa các lớp nước màu dẫn tới vận tốc các lớp nước cách trục đối xứng của ống một khoảng khác nhau là khác nhau. Sử dụng hệ tọa độ cực như mô tả trên hình 12-13b, xét lớp nước màu



Hình 12-13. Thí nghiệm (1) và cấu hình để dẫn gián công thức Poiseuille.

chứa trong một hình xuyên trụ có bán kính đáy trong là r , bán kính đáy ngoài là $r + dr$, độ cao là h . Lực ma sát nhớt cản trở chuyển động tác dụng lên lớp chất lỏng ở mặt trong hình xuyên trụ nêu trên là:

$$f_1 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rh \quad (12.21)$$

Lực ma sát tác dụng lên lớp chất lỏng ở bề mặt ngoài hình xuyên trụ lại có tác dụng tăng tốc cho lớp chất lỏng:

$$f_2 = -f_1 + df_1 = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi rh + \eta 2\pi h dr \left(r \frac{dv}{dr} \right) \quad (12.22)$$

Ngoài ra chất lỏng trong hình xuyên trụ còn chịu tác dụng của lực sinh ra do chênh lệch áp suất. Lực này cũng tăng tốc cho khối chất lỏng:

$$df_3 = (p_1 - p_2) 2\pi r dr$$

Trong chuyển động dừng, tổng các lực tác dụng lên khối chất lỏng bên trong hình xuyên trụ bằng không:

$$(p_1 - p_2) r dr + \eta h dr \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

Tích phân phương trình này ta được:

$$\frac{1}{2} (p_1 - p_2) r^2 + \eta h r \left(\frac{dv}{dr} \right) = \text{const} \quad (12.23)$$

Phương trình (12.23) là đúng cho mọi khoảng cách r tùy ý kể cả tại $r = 0$. Từ đó suy ra hằng số const trong (12.23) bằng 0 và ta nhận được phương trình sau cho vi phân vận tốc:

$$-dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta h} r dr$$

Tích phân tiếp phương trình này từ 0 đến R và chú ý rằng tại bờ ống, vận tốc dòng chảy bằng không ($r = R, v = 0$) ta được:

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} (R^2 - r^2) \quad (12.24)$$

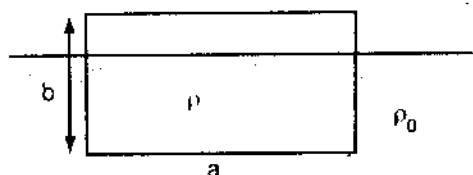
Phương trình (12.24) cho thấy vận tốc chất lỏng chỉ phụ thuộc khoảng cách tới trục đối xứng của ống mà không phụ thuộc vào góc cực và mặt bao của dòng chảy có dạng mặt parabol tròn xoay. Thể tích chất lỏng chảy qua thiết diện ngang của ống (thiết diện vuông góc với trục ống) trong khoảng thời gian t có thể tính dễ dàng bằng cách tích phân từ 0 đến R cho vi phân của lượng nước chảy qua diện tích xuyên $2\pi r dr$ trong khoảng thời gian đó:

$$V = \int_0^R v t 2\pi r dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} R^4 t \quad (12.25)$$

Công thức (12.25) có tên là công thức Poiseuille, nó cho ta thấy lưu lượng chất lỏng chảy qua thiết diện ngang của ống tỉ lệ thuận với bậc 4 của bán kính ống, với độ chênh lệch áp suất giữa hai đầu ống, với thời gian và tỉ lệ nghịch với độ nhớt của chất lỏng chảy qua ống. Sử dụng công thức này, người ta chế tạo ra dụng cụ đo độ nhớt gọi là nhớt kế để đo độ nhớt η của chất lỏng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 12

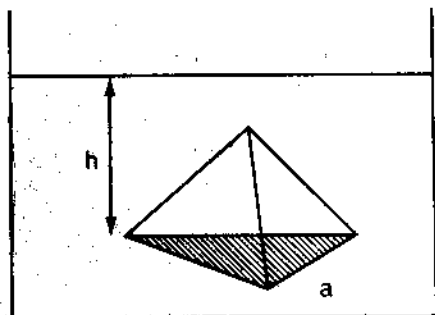
12.1. Một hình hộp chữ nhật làm từ vật liệu có khối lượng riêng (nổi trong chất lỏng có khối lượng riêng ρ_0). Độ cao của hình hộp là b , độ rộng và dài là a (xem hình 12-14). Với tỷ lệ a/b như thế nào thì sự nổi là bền vững?



Hình 12-14.

Trả lời: $\frac{a}{b} > \frac{6\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$

12.2. Mặt bên dưới của một hình chóp đều cạnh a nằm trong chất lỏng khối lượng ρ cách mặt chất lỏng một khoảng h . Hãy xác định lực tác dụng từ chất lỏng lên mặt bên của hình chóp nếu áp suất khí quyển là P (xem hình 12-15).



Hình 12-15.

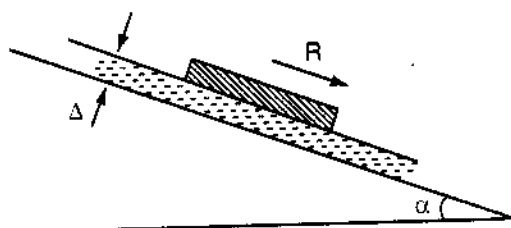
Trả lời:

$$F = 3F_1 = \frac{\rho g a^2}{12} [3\sqrt{3} h - a\sqrt{2}] + \frac{P}{4} a^2 \sqrt{3}$$

12.3. Xác định lưu lượng chất lỏng trên một đơn vị độ rộng dòng chảy nghiêng một góc α so với phương nằm ngang. Độ nhớt chất lỏng là η khối lượng riêng của nó là ρ . Độ rộng dòng chảy là h .

Trả lời: $Q = \rho g \frac{\sin \alpha \cdot h^3}{3\eta}$

12.4. Hãy xác định vận tốc thiết lập của một vật hình trụ khối lượng m bán kính đáy R khi nó trượt theo mặt phẳng nghiêng một góc α so với phương nằm ngang nếu giữa mặt đáy của vật với mặt phẳng nghiêng có một lớp dầu độ dày Δ (xem hình 12-16). Hệ số nhớt của dầu là η .



Hình 12-16.

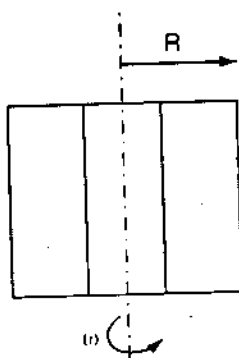
Trả lời: $v = \frac{2mg\Delta^2}{\pi r^2 \eta}$

12.5. Hãy đánh giá áp suất dưới đáy của Marianas Trench (chỗ sâu nhất của đại dương có độ sâu 11,0 km dưới mặt biển). Nếu cho rằng nước biển là không chịu nén thì sai số là bao nhiêu biết rằng khối lượng riêng của nước biển là $\rho_0 = 1025 \text{ kg/m}^3$ với modul khối là $B = 2,1 \text{ GPa}$.

Trả lời: $P = P_0 - B \ln \left(1 - \frac{\rho_0 g z}{B} \right)$

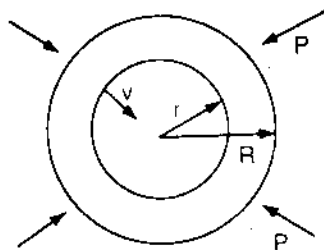
12.6. Bình chứa hình trụ kín bán kính R chứa đầy $3/4$ thể tích của nó chất lỏng khối lượng riêng ρ . Bình và chất lỏng quay xung quanh trục đối xứng của nó với vận tốc góc ω trong trạng thái không trọng lượng (xem hình 12-17). Hỏi áp suất trong chất lỏng phụ thuộc khoảng cách đến thành bình như thế nào?

Trả lời: $P(x) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left[(R - x)^2 - \frac{1}{4} R^2 \right]$



Hình 12-17.

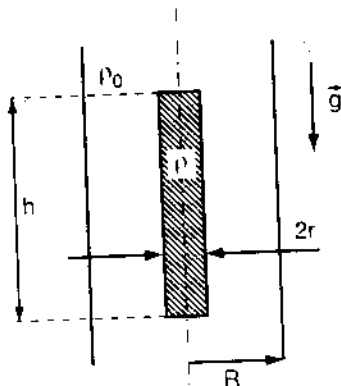
12.7. Trong chất lỏng hình thành một khoảng trống hình cầu bán kính R , áp suất trong chất lỏng là P , khối lượng riêng của chất lỏng là ρ (xem hình 12-8). Hãy xác định vận tốc biên của khoảng trống tại thời điểm khi bán kính của nó giảm tới giá trị r .



Hình 12-18.

Trả lời:
$$v = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P}{\rho} \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right)}$$

12.8. Vật thể hình trụ có độ dài h , bán kính đáy r ($r \ll h$) và khối lượng riêng ρ sẽ chuyển động dọc theo trục một ống hình trụ bán kính đáy R được đặt theo phương thẳng đứng với gia tốc a như thế nào nếu ống hình trụ chứa đầy chất lỏng với khối lượng riêng ρ_0 ? Hiệu áp suất giữa đáy trên và đáy dưới của vật thể đó là bao nhiêu? (xem hình 12-19).



Hình 12-19.

Trả lời:
$$a = \frac{(\rho_0 - \rho)g}{\rho + \rho_0 \frac{r^2}{R^2 - r^2}}$$

$$\Delta p = \frac{\rho \rho_0 R^2 g h}{\rho_0 r^2 + \rho(R^2 - r^2)}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Kittel, W. Knight, M. A. Ruderman, *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Vol. 1, Second Edition, McGraw-Hill, 1973.
- [2] Nguyễn Hữu Xý, Nguyễn Văn Thoả, Trương Quang Nghĩa, *Cơ học*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội 1985.
- [3] D. Halliday, R. Resnik, J. Walker, *Cơ sở Vật lý học*, tập I+II, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.
- [4] Tail L. Chow, *Classical Mechanics*, John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [5] G. Fowles, G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, fifth edition, Saunder College Publishing, Harcourt Brace College Publishers, 1993.
- [6] R. Feynman, *The Feynman Lectures On Physics, Exercises*, Addison-Wesley Publishing Company, 1964-1965.
- [7] G. Kotkine, V. Serbo, *Recueil de problèmes de mÉcanique classique*, Edition Mir - Moscou, 1981.
- [8] W. G. Rees, *Physics by example - 200 problems and solution*, Cambridge University press, 1996.
- [9] O. Ya. Savchenko (Editor), *Physics problems*, the second edition, Physics-mathematic literature publishing company, Moskva-Nauka, 1988.

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương 1. MỞ ĐẦU	5
1.1. Đơn vị, thứ nguyên	9
1.2. Vectơ	16
Chương 2. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM	16
2.1. Chất điểm, hệ quy chiếu	17
2.2. Vectơ vận tốc và vectơ gia tốc	23
Chương 3. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM	23
3.1. Các định luật động lực học cơ bản của Newton	24
3.2. Áp dụng các định luật của Newton để giải các bài toán động lực học	32
Chương 4. HỆ QUY CHIẾU PHI QUÁN TÍNH, LỰC QUÁN TÍNH	32
4.1. Hệ quy chiếu quán tính, phép biến đổi Galilê	34
4.2. Lực quán tính trong hệ quy chiếu chuyển động thẳng có gia tốc	36
4.3. Lực quán tính trong hệ quy chiếu chuyển động quay	44
Chương 5. CÔNG VÀ NĂNG LƯỢNG	44
5.1. Công và công suất	46
5.2. Động năng, định lý động năng	46
5.3. Thế năng	49
5.4. Định luật bảo toàn năng lượng	51
5.5. Sử dụng đường cong thế năng, giới hạn của chuyển động	54
Chương 6. HỆ CHẤT ĐIỂM	54
6.1. Khối tâm của hệ chất điểm	56
6.2. Định luật chuyển động của khối tâm	

6.3. Định luật bảo toàn động lượng của hệ chất điểm cô lập (hệ kín)	57
6.4. Chuyển động của tên lửa (chuyển động phản lực)	59
6.5. Va chạm đàn hồi	61
6.6. Va chạm không đàn hồi, va chạm mềm	64
6.7. Va chạm giữa các vật thật	65
6.8. Mômen động lượng của chất điểm, hệ chất điểm đối với một điểm cố định. Định luật biến thiên và bảo toàn mômen động lượng	66
Chương 7. VẬT RẮN	72
7.1. Bậc tự do, chuyển động của vật rắn	72
7.2. Chuyển động tổng quát của vật rắn	72
7.3. Động năng của vật rắn	74
7.4. Phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định	75
7.5. Tenxơ mômen quán tính của vật rắn	76
7.6. Định lý Huygens (Định lý về các trục quay song song)	79
7.7. Phương trình Euler	80
7.8. Gyroscope (con quay) trong trường trọng lực	84
7.9. Cân bằng của vật rắn	85
Chương 8. BÀI TOÁN HAI HẠT VÀ ỨNG DỤNG	92
8.1. Bài toán hai hạt và các định luật Kepler	92
8.2. Định luật thứ nhất của Kepler	99
8.3. Định luật thứ hai của Kepler	100
8.4. Định luật thứ ba của Kepler	101
8.5. Định lý Virial	101
8.6. Bài toán hai hạt trong một số trường hợp khác	105
Chương 9. DAO ĐỘNG	110
9.1. Dao động tử điều hoà 1 chiều	110
9.2. Dao động tắt dần của dao động tử một chiều khi có lực ma sát	117
9.3. Dao động cưỡng bức của dao động tử	120
9.4. Nguyên lý chồng chất	124
9.5. Tổng hợp hai dao động có chu kỳ khác nhau chút ít, hiện tượng phách	124

Chương 10. ĐẠI CUONG VỀ SÓNG	129
10.1. Sóng và phương trình sóng	129
10.2. Năng lượng sóng, vectơ Poynting-Umov	132
10.3. Giao thoa sóng, sóng đứng	134
Chương 11. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP	139
11.1. Nguyên lý tương đối của Einstein	139
11.2. Biến đổi Lorentz	139
11.3. Sự co độ dài (Sự co Lorentz)	144
11.4. Sự chậm lại của thời gian đo bằng đồng hồ chuyển động	145
11.5. Cơ học tương đối tính	146
11.6. Độ hụt khối lượng	148
11.7. Hiệu ứng Doppler	149
Chương 12. CƠ HỌC CHẤT LƯU	155
12.1. Áp suất tại một điểm trong chất lưu	155
12.2. Sự chảy của chất lưu lý tưởng	160
12.3. Phương trình Bernoulli	161
12.4. Sự chảy của chất lỏng trong ống	164
12.5. Sự chảy của chất lỏng nhớt qua một ống tròn. Phương trình Poiseuille	167
<i>Tài liệu tham khảo</i>	172

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung và sửa bản in :

TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa :

BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :

HUỲNH MINH TUẤN

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC

Mã số: 7B622M5 - DAI

In 1.000 bản, khổ 19 x 27cm. Tại Công ty in Thái Nguyên.

Số in: 1703. Giấy phép xuất bản số: 595/24 – 05.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2005.



**CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEBOCO**
25 HÀN THUYỀN - HÀ NỘI

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

- | | |
|--|---------------------------|
| 1 Đất ngập nước | GS. TS. Lê Văn Khoa |
| 2 Động vật học có xương sống | GS. TS. Lê Vũ Khôi |
| 3 Sinh thái học côn trùng | PGS. TS. Phạm Bình Quyền |
| 5 Cơ sở hoá sinh | PGS. TS. Trịnh Lê Hùng |
| 6 Tài nguyên nước Việt Nam | Nguyễn Thanh Sơn |
| 7 Virut học | PGS. TS. Phạm Văn Ty |
| 8 Vật lý kỹ thuật | Đặng Hùng |
| 9 Vật lý siêu dẫn và ứng dụng | TS. Nguyễn Huy Sinh |
| 10 Dụng cụ bán dẫn và vi mạch | Lê Xuân Thê |
| 11 Mạng máy tính | Ngọc Văn An |
| 12 Vô tuyến điện tử | Ngọc Văn An |
| 13 Giáo trình cơ học | Bạch Thành Công |
| 13 Kinh tế môi trường | PGS. TS. Hoàng Xuân Cơ |
| 14 Tiếng Anh cơ bản cho sinh viên
khoa học tự nhiên | Trần Thị Nga |
| 15 Bộ sách về công nghệ sinh học | |
| <u>Tập một</u> : Sinh học phân tử - Cơ sở
khoa học của công nghệ sinh học | PGS. TS. Nguyễn Như Hiến |
| <u>Tập hai</u> : Công nghệ sinh học tế bào | |
| <u>Tập ba</u> : Công nghệ sinh học enzym
và protein (XB - 2006) | GS. TS. Vũ Văn Vu |
| <u>Tập bốn</u> : Công nghệ sinh học di
truyền (XB - 2006) | PGS. TS. Nguyễn Mộng Hùng |
| <u>Tập năm</u> : Công nghệ sinh học vi sinh
và công nghệ môi trường (XB - 2006) | TS. Phan Tuấn Nghĩa |
| | GS. TS. Lê Đình Lương |
| | PGS. TS. Phạm Văn Ty |

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

* 25 Hàn Thuyền, 187 Giảng Võ, 23 Tràng Tiền - Hà Nội.

* 15 Nguyễn Chí Thanh - TP Đà Nẵng

* 104 Mai Thị Lựu - Quận 1 - TP. Hồ Chí Minh.



8 934980 545393



Giá: 23.000đ