

$$n \approx \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right]$$

$$\approx 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0 - \omega)}{\gamma^2 \omega_0}$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} E \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} E$$

$$E' \approx \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times B' = -\frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial t} B'$$

$$= -\frac{ik}{\mu\sigma} B'_y e_x = \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}} e^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}} B'$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}} B'_0 e^{-\beta z} e^{(i\alpha z - i\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

Bài tập và lời giải của các
Trường Đại học nổi tiếng Hoa Kỳ

Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI ĐIỆN TỪ HỌC

PROBLEMS AND
SOLUTIONS ON
ELECTROMAGNETISM

Biên soạn:
Trường Đại học Khoa học
và Công nghệ Trung Hoa

Chủ biên:
Yung-Kuo Lim



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÀI TẬP & LỜI GIẢI
ĐIỆN TỬ HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

Người dịch:

TS. LÊ HOÀNG MAI
TS. TRẦN THỊ ĐỨC
GS.TSKH. ĐÀO KHẮC AN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Problems and Solutions on Electromagnetism

Compiled by
The Physics Coaching Class
University of Science and Technology of China

Edited by
Lim Yung-kuo
National University of Singapore

© World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
New Jersey, London, Singapore, Hong Kong

First published 1993
Reprinted 1994, 1996, 1998, 2000, 2002, 2003, 2005

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher. Vietnamese translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., Singapore.

Cuốn sách được xuất bản theo hợp đồng chuyển nhượng bản quyền giữa Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản World Scientific. Mọi hình thức sao chép một phần hay toàn bộ cuốn sách dưới dạng in ấn hoặc bản điện tử mà không có sự cho phép bằng văn bản của Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đều là vi phạm pháp luật.

Bản quyền tiếng Việt © Công ty Cổ phần Sách dịch và Từ điển Giáo dục

LỜI NĨI XUẤT BẢN

Bộ sách **Bài tập và lời giải Vật lý** gồm bảy cuốn:

1. Cơ học
2. Cơ học Lượng tử
3. Quang học
4. Nhiệt động lực học & Vật lý thống kê
5. Điện từ học
6. Vật lý Nguyên tử, Hạt nhân và Các hạt cơ bản
7. Vật lý chất rắn, Thuyết tương đối & Các vấn đề liên quan

Đây là tuyển tập gồm 2550 bài tập được lựa chọn kỹ lưỡng từ 3100 đề thi vào đại học và thi tuyển nghiên cứu sinh chuyên ngành vật lý của 7 trường đại học nổi tiếng ở Mỹ (Đại học California ở Berkeley, Đại học Columbia, Đại học Chicago, Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Đại học Bang New York ở Buffalo, Đại học Princeton, Đại học Wisconsin). Trong số này còn có các đề thi trong chương trình CUSPEA và các đề thi do nhà vật lý đoạt giải Nobel người Mỹ gốc Trung Quốc C. C. Ting (CCT) soạn để tuyển chọn sinh viên Trung Quốc đi du học ở Hoa Kỳ. Những đề thi này được xuất bản kèm theo lời giải của hơn 70 nhà vật lý có uy tín của Trung Quốc và 20 nhà vật lý nổi tiếng kiểm tra, hiệu đính. Tất cả các cuốn sách trên đã được tái bản, riêng cuốn Điện từ học đã được tái bản 6 lần.

Điểm đáng lưu ý về bộ sách này là nó bao quát được mọi vấn đề của vật lý học, từ cổ điển đến hiện đại. Bên cạnh những bài tập đơn giản nhằm khắc sâu những khái niệm cơ bản của Vật lý học, không cần những công cụ toán học phức tạp cũng giải được, bộ sách còn có những bài tập khó và hay, đòi hỏi phải có kiến thức và tư duy vật lý sâu sắc với các phương pháp và kỹ thuật toán học phức tạp hơn mới giải được. Có thể nói đây là một tài liệu bổ sung vô giá cho sách giáo khoa và giáo trình đại học ngành vật lý, phục vụ một phạm vi đối tượng rất rộng, từ các giáo viên vật lý phổ thông, giảng viên các trường đại học cho đến học sinh các lớp chuyên lý, sinh viên khoa vật lý và sinh viên các lớp tài năng của các trường đại học khoa học tự nhiên, đặc biệt là cho những ai muốn du học ở Mỹ.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu bộ sách tới độc giả.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một việc tất yếu và quan trọng trong quá trình học Vật lý nhằm củng cố lý thuyết đã học và trau dồi kỹ năng thực hành. Trong cuốn Điện từ học có 440 bài tập và lời giải: tĩnh điện học (108 bài), trường từ tĩnh và trường điện từ chuẩn dừng (119 bài), phân tích mạch điện (90 bài), các sóng điện từ (67 bài) và thuyết tương đối, tương tác hạt - trường (56 bài). Hầu hết các bài chọn đưa vào cuốn sách này đều phù hợp với chương trình vật lý bậc đại học và sau đại học của chuyên ngành Điện từ học. Ngoài ra, một số kết quả nghiên cứu gần đây cũng được đưa vào cuốn sách này, nhằm giúp người học không chỉ nắm bắt lý thuyết cơ bản mà còn có thể vận dụng kiến thức cơ bản một cách sáng tạo vào việc học tập và nghiên cứu.

MỤC LỤC

Lời Nhà xuất bản	iii
Lời nói đầu	v
Mục lục	vii

Phần I: Tĩnh điện học

1. Các định luật cơ bản của tĩnh điện (1001-1023)	2
2. Trường tĩnh điện trong một vật dẫn điện (1024-1042)	25
3. Trường tĩnh điện trong môi trường điện môi (1043-1061)	48
4. Những phương pháp tiêu biểu để giải các bài toán tĩnh điện - Tách biến, phương pháp ảnh, hàm Green và khai triển đa cực (1062-1095)	72
5. Các ứng dụng khác (1096-1108)	121

Phần II: Từ trường tĩnh và trường điện từ chuẩn dừng

1. Từ trường của các dòng điện (2001-2038)	148
2. Cảm ứng điện từ (2039-2063)	195
3. Tác dụng của trường điện từ lên các vật dẫn có dòng điện và các hạt tích điện (2064-2090)	223
4. Các bài tập khác (2091-2119)	264

Phần III: Phân tích mạch điện

1. Phân tích mạch điện cơ bản (3001-3026)	319
2. Các mạch điện và mạch từ (3027-3044)	355
3. Các mạch analog (3045-3057)	371
4. Các mạch số (3058-3065)	383
5. Điện tử hạt nhân (3066-3082)	389
6. Các bài tập khác (3083-3090)	408

Phần IV: Các sóng điện từ

1. Các sóng điện từ phẳng (4001-4009)	424
2. Sự phản xạ và sự khúc xạ của các sóng điện từ trên mặt phân cách giữa hai môi trường (4010-4024)	440
3. Sự lan truyền của các sóng điện từ trong một môi trường (4025-4045)	471
4. Bức xạ điện từ và các hệ bức xạ (4046-4067)	509

Phần V: Thuyết tương đối, tương tác hạt - trường

1. Phép biến đổi Lorentz (5001-5017)	548
2. Điện từ trường của một hạt tích điện (5018-5025)	575
3. Chuyển động của một hạt tích điện trong trường điện từ (5026-5039)	594
4. Sự tán xạ và tán sắc của các sóng điện từ (5040-5056)	625

PHẦN I

TÍNH ĐIỆN HỌC

1. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TĨNH ĐIỆN (1001–1023)

1001

Một phân bố điện tích tĩnh sinh ra một điện trường xuyên tâm

$$\mathbf{E} = A \frac{e^{-br}}{r} \mathbf{e}_r,$$

trong đó A và b là các hằng số.

(a) Hãy xác định mật độ điện tích là bao nhiêu. Vẽ phác đồ thị của nó.

(b) Tính điện tích toàn phần Q .

(MIT)

Lời giải:

(a) Mật độ điện tích được tính theo phương trình Maxwell là

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Vì $\nabla \cdot u\mathbf{v} = \nabla u \cdot \mathbf{v} + u \nabla \cdot \mathbf{v}$, ta có

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = A \left[\nabla(e^{-br}) \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} + e^{-br} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) \right].$$

Sử dụng hàm Dirac $\delta(\mathbf{r})$ với các tính chất sau

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{với } \mathbf{r} \neq 0, \\ &= \infty \quad \text{với } \mathbf{r} = 0, \end{aligned}$$

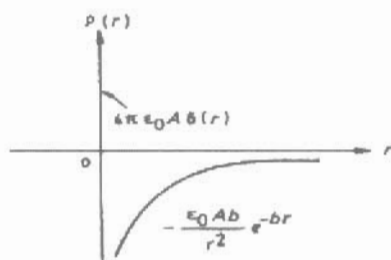
Ta có

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 A \left[-\frac{be^{-br}}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + 4\pi e^{-br} \delta(\mathbf{r}) \right] \\ &= -\frac{\epsilon_0 A b}{r^2} e^{-br} + 4\pi \epsilon_0 A \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Do đó sự phân bố điện tích bao gồm một điện tích dương $4\pi\epsilon_0 A$ ở gốc tọa độ và một phân bố điện tích âm đối xứng cầu trong không gian bao quanh, như được chỉ ra trên hình 1.1.



Hình 1.1

(b) Điện tích toàn phần là

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{\text{toàn không gian}} \rho dV \\
 &= - \int_0^\infty \frac{\epsilon_0 A b e^{-br}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{\text{toàn không gian}} 4\pi \epsilon_0 A \delta(\mathbf{r}) dV \\
 &= 4\pi \epsilon_0 A [e^{-br}]_0^\infty + 4\pi \epsilon_0 A \\
 &= -4\pi \epsilon_0 A + 4\pi \epsilon_0 A = 0.
 \end{aligned}$$

Cũng có thể sử dụng định lý thông lượng Gauss

$$\begin{aligned}
 Q &= \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_0 A e^{-br}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi \epsilon_0 A e^{-br} = 0,
 \end{aligned}$$

ta cũng nhận được kết quả trùng với lời giải trên.

1002

Giả thiết rằng, thay vì định luật Coulomb, bằng thực nghiệm người ta tìm được lực giữa hai điện tích bất kì q_1 và q_2 là

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\alpha r_{12}})}{r_{12}^2} \mathbf{e}_r,$$

trong đó α là một hằng số.

(a) Hãy tìm điện trường $\mathbf{E}$ thích hợp bao quanh một điện tích điểm q .

(b) Chọn một đường bao quanh điện tích điểm này và tính tích phân đường $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb.

(c) Tìm $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ trên một mặt cầu bán kính r_1 có điện tích điểm đặt tại tâm. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb.

(d) Lặp lại (c) với bán kính $r_1 + \Delta$ và tìm $\nabla \cdot \mathbf{E}$ tại một khoảng cách r_1 tính từ điện tích điểm đó. Hãy so sánh với kết quả tương tự suy ra từ định luật Coulomb. Chú ý rằng Δ là một đại lượng nhỏ.

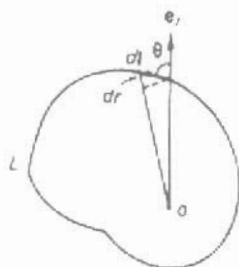
(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Điện trường bao quanh điểm điện tích q là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (1 - \sqrt{\alpha r}) \mathbf{e}_r,$$

ở đây r là khoảng cách giữa một điểm trong không gian với điện tích điểm q và $\mathbf{e}_r$ là vectơ đơn vị có hướng từ q tới điểm không gian đó.



Hình 1.2

(b) Như ta thấy trên hình 1.2, đối với đường khép kín L , ta tìm được

$$d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_r = dl \cos \theta = dr$$

và

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (1 - \sqrt{\alpha r}) dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[- \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right) + 2\sqrt{\alpha} \oint_L d\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Từ định luật Coulomb $\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \mathbf{e}_{r_{12}}$, ta nhận được điện trường của điện tích điểm

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Hiển nhiên, ta có

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Như vậy, kết quả tính theo định luật Coulomb cũng giống như kết quả của bài tập này.

(c) Lấy S là một mặt cầu có bán kính r_1 với điện tích q nằm ở tâm của nó. Định nghĩa yếu tố bề mặt $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_r$, ta có

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} (1 - \sqrt{\alpha r_1}) dS \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha r_1}). \end{aligned}$$

Từ định luật Coulomb và định luật Gauss ta nhận được

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Như vậy, hai kết quả sai khác nhau một lượng $\frac{q}{\epsilon_0} \sqrt{\alpha r_1}$.

(d) Sử dụng kết quả của (c), tích phân mặt tại $r_1 + \Delta$ là

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} (1 - \sqrt{\alpha(r_1 + \Delta)}).$$

Xét thể tích V' được giới hạn bởi hai mặt cầu S_1 và S_2 có bán kính tương ứng là $r = r_1$ và $r = r_1 + \Delta$. Theo định lý divergence của Gauss, ta có

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Vì hướng của vectơ $d\mathbf{S}$ trên S_1 và S_2 đều hướng ra ngoài thể tích V' , trong trường hợp Δ nhỏ, ta có

$$\frac{q}{\epsilon_0} \left[-\sqrt{\alpha(r_1 + \Delta)} + \sqrt{\alpha r_1} \right] = \frac{4\pi}{3} [(r_1 + \Delta)^3 - r_1^3] (\Delta \cdot \mathbf{E})|_{r=r_1}.$$

Khi $\frac{\Delta}{r_1} \ll 1$, ta có thể lấy gần đúng

$$\left(1 + \frac{\Delta}{r_1}\right)^n \approx 1 + n \frac{\Delta}{r_1}.$$

Như vậy ta nhận được

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r = r_1) = -\frac{\sqrt{\alpha} q}{8\pi\epsilon_0 r_1^{5/2}}.$$

Mặt khác, định luật Coulomb có thể cho divergence của điện trường do một điện tích điểm q sinh ra là

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(r).$$

1003

Các điện tích tĩnh được phân bố dọc theo trục x (một chiều) trong vùng $-a \leq x' \leq a$. Mật độ điện tích là:

$$\begin{aligned} \rho(x') & \text{ đối với } |x'| \leq a \\ 0 & \text{ đối với } |x'| > a. \end{aligned}$$

(a) Hãy viết biểu thức thế tĩnh điện $\Phi(x)$ tại một điểm x trên trục tọa độ theo $\rho(x')$.

(b) Tìm khai triển đa cực cho thế năng đó trong vùng $x > a$.

(c) Đối với mỗi cấu hình điện tích đã cho trong hình 1.3, hãy tìm

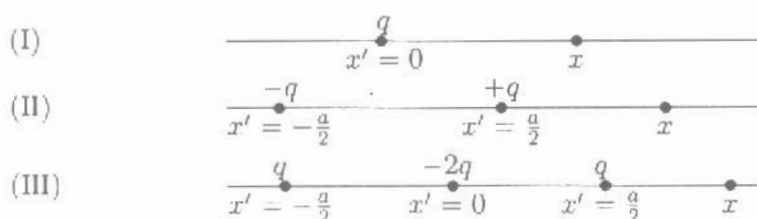
(i) Điện tích toàn phần $Q = \int \rho dx'$,

(ii) Mômen lưỡng cực $P = \int x' \rho dx'$,

(iii) Mômen tứ cực $Q_{xx} = 2 \int x'^2 \rho dx'$,

(iv) Số hạng chính (trong chuỗi lũy thừa của $1/x$) của điện thế Φ tại điểm $x > a$.

(Wisconsin)



Hình 1.3

Lời giải:

(a) Thế tĩnh điện tại một điểm trên trục x là

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx'.$$

(b) Đối với $x > a, a > x' > -a$, ta có:

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{x} + \frac{x'}{x^2} + \frac{x'^2}{x^3} + \dots$$

Do đó khai triển đa cực của $\Phi(x)$ là

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-a}^a \frac{\rho(x')}{x} dx' + \int_{-a}^a \frac{\rho(x')x'}{x^2} dx' + \int_{-a}^a \frac{\rho(x')x'^2}{x^3} dx' + \dots \right].$$

(c) Cấu hình điện tích (I) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = q\delta(x'),$$

nên đối với cấu hình này, ta có

$$(i) \quad Q = q; \quad (ii) \quad P = 0; \quad (iii) \quad Q_{xx} = 0; \quad (iv) \quad \Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Cấu hình điện tích (II) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = -q\delta\left(x' + \frac{a}{2}\right) + q\delta\left(x' - \frac{a}{2}\right),$$

nên đối với cấu hình này

$$(i) \quad Q = 0; \quad (ii) \quad P = qa; \quad (iii) \quad Q_{xx} = 0; \quad (iv) \quad \Phi(x) = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Cầu hình điện tích (III) có thể biểu thị bằng

$$\rho(x') = q\delta\left(x' - \frac{a}{2}\right) + q\delta\left(x' + \frac{a}{2}\right) - 2q\delta(x').$$

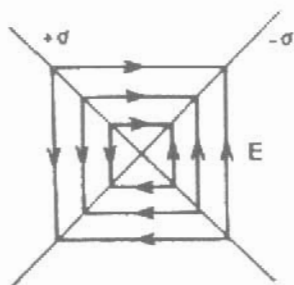
nên đối với cầu hình này

$$(i) \quad Q = 0; \quad (ii) \quad P = 0; \quad (iii) \quad Q_{xx} = qa^2; \quad (iv) \quad \Phi(x) = \frac{qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^3}.$$

1004

Hai tấm có kích thước vô hạn đồng đều có mật độ điện tích $+\sigma$ và $-\sigma$ giao nhau tạo thành góc vuông. Hãy tìm độ lớn và hướng của điện trường ở mọi nơi và vẽ phác các đường sức của điện trường này.

(Wisconsin)



Hình 1.4

Lời giải:

Đầu tiên chúng ta hãy xét tấm có kích thước vô hạn với mật độ điện tích $+\sigma$. Độ lớn của điện trường gây bởi tấm đó tại điểm bất kì trong không gian là

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Hướng của điện trường là vuông góc với bề mặt của tấm tích điện. Đối với hai tấm trực giao với nhau có điện tích $\pm\sigma$, sự chồng chập các điện trường của chúng sẽ cho kết quả sau:

$$E = \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Hướng của $\mathbf{E}$ có thể thấy trên hình 1.4

1005

Định luật Gauss sẽ không có hiệu lực nếu như

- (a) có các đơn cực từ,
- (b) định luật tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách không hoàn toàn đúng,
- (c) tốc độ ánh sáng không phải là một hằng số phổ quát.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

1006

Một điện tích sẽ được giữ ở trạng thái cân bằng bền

- (a) bởi một trường tĩnh điện thuần túy,
- (b) bởi một lực cơ học,
- (c) cả (a) và (b) đều không đúng.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1007

Nếu $\mathbf{P}$ là một vectơ phân cực và $\mathbf{E}$ là điện trường thì khi đó trong phương trình $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$, thì nói chung α là

- (a) vô hướng, (b) vectơ, (c) tenxơ.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1008

(a) Một vành tròn bán kính R mang điện tích toàn phần là $+Q$ phân bố đồng đều. Hãy tính điện trường và điện thế tại tâm của vòng tròn đó.

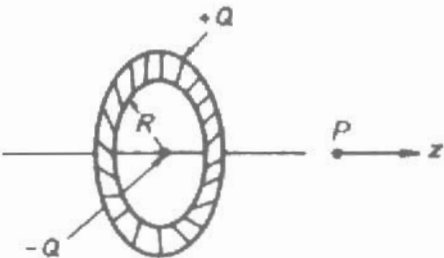
(b) Xét một điện tích $-Q$ chỉ được phép trượt dọc theo trục của vành tròn. Hãy chứng tỏ rằng điện tích đó sẽ thực hiện một chuyển động điều hoà đối với những dịch chuyển nhỏ vuông góc với mặt phẳng của vành tròn.

(Wisconsin)

Lời giải:

Hãy lấy trục z nằm dọc theo trục của vành tròn như trên hình 1.5. Điện trường và điện thế tại tâm của vòng tròn được tính bởi biểu thức sau

$$\mathbf{E} = 0, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$



Hình 1.5

Điện trường tại một điểm P trên trục z là

$$\mathbf{E}(z) = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$$

Khi đó, một điện tích âm $-Q$ tại điểm P chịu tác dụng của một lực là

$$\mathbf{F}(z) = -\frac{Q^2z}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$$

Vì $z \ll R$, suy ra $F(z) \propto z$, do đó $-Q$ sẽ thực hiện một dao động điều hoà.

1009

Một lượng điện tích q được trải đều trên một lớp bề mặt của một đĩa có bán kính là a .

(a) Dùng các phương pháp sơ cấp dựa trên phân bố đối xứng theo góc phương vị của điện tích để tìm điện thế tại một điểm bất kì trên trục đối xứng.

(b) Dựa vào câu (a) hãy tìm biểu thức của điện thế tại một điểm bất kì $\mathbf{r}$ ($|\mathbf{r}| > a$) như một khai triển theo các hàm điều hoà góc.

(Wisconsin)

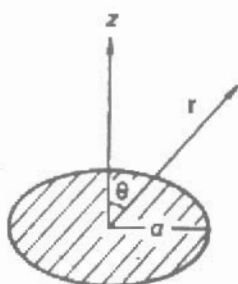
Lời giải:

(a) Lấy các trục tọa độ như trên hình 1.6 và xét một hình vành khuyên được tạo bởi 2 đường tròn có bán kính là ρ và $\rho + d\rho$ ở trên đĩa. Điện thế tại điểm $(0, 0, z)$ do hình vành khuyên sinh ra được tính bởi

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Lấy tích phân, ta sẽ nhận được điện thế do toàn bộ đĩa sinh ra

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_0^a \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).\end{aligned}$$



Hình 1.6

(b) Tại một điểm có $|\mathbf{r}| > a$, áp dụng phương trình Laplac $\nabla^2\varphi = 0$ với nghiệm

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Vì $\varphi \rightarrow 0$ đối với $r \rightarrow \infty$, nên ta có $a_n = 0$. Tại nửa không gian trên, $z > 0$, điện thế ở trên trục là $\varphi = \varphi(r, 0)$. Vì $P_n(1) = 1$, ta có

$$\varphi(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}}.$$

Tại nửa không gian dưới, $z < 0$, điện thế ở trên trục là $\varphi = \varphi(r, \pi)$. Vì $P_n(-1) = (-1)^n$ nên ta có

$$\varphi(r, \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n}{r^{n+1}}.$$

Sử dụng kết quả của (a) và chú ý rằng đối với một điểm trên trục $|r| = z$, trong trường hợp $z > 0$ ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\sqrt{a^2 + r^2} - r) \\ &= \frac{qr}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Tuy nhiên, vì

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^n + \dots, \end{aligned}$$

phương trình trên trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} = \frac{qr}{2\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^n.$$

So sánh hệ số của các lũy thừa của r ta có

$$b_{2n-1} = 0, \quad b_{2n-2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} a^{2n}.$$

Do đó, điện thế tại một điểm bất kì r của nửa không gian $z > 0$ được cho bởi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \times \left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1} P_{2n-2}(\cos\theta), \quad (z > 0).$$

Theo cách tương tự đối với nửa không gian $z < 0$, vì $(-1)^{2n-2} = 1$, ta có

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \times \left(\frac{a}{r}\right)^{2n-1} P_{2n-2}(\cos\theta), \quad (z < 0).$$

Như vậy, ta nhận được biểu thức như nhau của điện thế tại mọi điểm của không gian, đó là một chuỗi theo đa thức Legendre.

1010

Một đĩa cách điện mỏng nhưng khối lượng lớn có mật độ điện tích mặt σ và bán kính R . Có một điện tích điểm $+Q$ ở trên trục đối xứng của đĩa. Tính lực tác dụng trên điện tích đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Tham khảo bài tập 1009 và hình 1.6. Giả sử Q nằm tại điểm $(0, 0, z)$ trên trục đối xứng của đĩa. Điện trường do đĩa sinh ra tại điểm này là

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right),$$

Suy ra lực tác dụng lên điện tích điểm này là

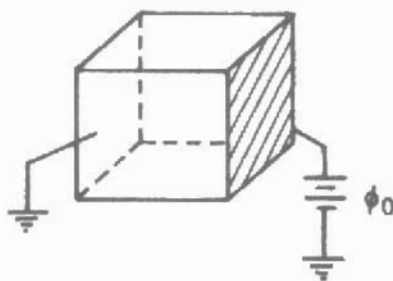
$$F = QE = \frac{\sigma Q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

Do tính đối xứng, lực này có hướng dọc theo trục của đĩa.

1011

Khối lập phương trên hình 1.7 có 5 mặt nối đất. Mặt thứ 6 cách điện với các mặt khác có điện thế ϕ_0 . Tính điện thế tại tâm của khối lập phương.

(MIT)



Hình 1.7

Lời giải:

Điện thế ϕ_c tại tâm của khối lập phương có thể được biểu diễn như một hàm tuyến tính của các điện thế của cả 6 mặt, nghĩa là

$$\phi_c = \sum_i C_i \phi_i,$$

trong đó C_i là các hằng số. Vì cả 6 mặt của khối lập phương đều có vị trí hình học như nhau đối với tâm của khối đó nên các C_i phải có giá trị giống nhau, gọi là C . Như vậy

$$\phi_c = C \sum_i \phi_i.$$

Nếu từng mặt trong số 6 mặt đó có điện thế ϕ_0 thì hiển nhiên thế năng tại tâm cũng là ϕ_0 . Do đó $C = \frac{1}{6}$. Nhưng vì chỉ có một mặt có điện thế là ϕ_0 trong khi các mặt khác có điện thế bằng 0, do đó điện thế tại tâm là $\phi_0/6$.

1012

Một quả cầu có bán kính R chứa một điện tích Q , phân bố đồng đều khắp thể tích của hình cầu. Hãy xác định điện trường ở bên ngoài và bên trong của mặt cầu?

(Wisconsin)

Lời giải:

Mật độ điện tích khối của quả cầu là

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Lấy mặt Gauss là một mặt cầu có bán kính r đồng tâm với quả cầu tích điện. Do đối xứng nên độ lớn của điện trường ở tất cả các điểm của bề mặt đó là như nhau và hướng theo bán kính ra ngoài. Theo định luật Gauss ta có

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

Từ đó, có thể nhận được ngay các biểu thức sau

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} & (r \geq R), \\ \mathbf{E} &= \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} & (r \leq R). \end{aligned}$$

1013

Xét một thể tích hình cầu tích điện đều có bán kính R với điện tích toàn phần Q . Tìm điện trường và điện thế tĩnh điện tại tất cả các điểm trong không gian.

(Wisconsin)

Lời giải:

Dùng kết quả của bài tập 1012, ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & (r \leq R) \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, & (r \geq R) \end{aligned}$$

và mối quan hệ giữa cường độ điện trường tĩnh điện và điện thế sẽ là

$$\varphi(p) = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

Từ đó, ta nhận được

$$\begin{aligned}\varphi_1(r) &= \int_r^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^R \frac{Qrdr}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \int_R^\infty \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (r \leq R), \\ \varphi_2(r) &= \int_r^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R).\end{aligned}$$

1014

Đối với một quả cầu tích điện đều có bán kính R và mật độ điện tích ρ ,

(a) dùng định luật Gauss để tìm dạng của vectơ điện trường $\mathbf{E}$ ở cả bên trong và bên ngoài quả cầu.

(b) từ $\mathbf{E}$ hãy tìm điện thế ϕ khi sử dụng điều kiện $\phi \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow \infty$.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Tương tự như bài tập 1013.

(b) Sử dụng kết quả của bài tập 1013, ta có

$$\begin{aligned}\text{với } r > R, \quad \phi &= \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r}, \\ \text{với } r < R, \quad \phi &= \frac{\rho R^3}{6\epsilon_0} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right).\end{aligned}$$

1015

Trong trạng thái cân bằng, một lớp vỏ dẫn điện hình cầu, bán kính trong a , bán kính ngoài b , có một điện tích q được giữ cố định ở tâm và một mật độ điện tích σ phân bố đều ở mặt ngoài. Hãy tìm điện trường cho tất cả các giá trị r và điện tích ở mặt trong của lớp dẫn điện đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Sự cân bằng tĩnh điện đòi hỏi rằng toàn bộ điện tích trên bề mặt bên trong của lớp dẫn điện phải bằng $-q$. Sau đó sử dụng định luật Gauss, ta nhận được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{đối với } r < a,$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{đối với } a < r < b,$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi b^2 \sigma}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\sigma b^2}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{đối với } r > b.$$

1016

Một quả cầu dẫn điện rắn bán kính r_1 có một điện tích $+Q$. Quả cầu này được bao bọc bởi một quả cầu dẫn điện rỗng có bán kính trong r_2 và bán kính ngoài r_3 . Hãy sử dụng định lý Gauss để tìm những biểu thức cho các trường hợp sau:

(a) Điện trường bên ngoài của quả cầu ngoài.

(b) Điện trường giữa các quả cầu.

(c) Lập một biểu thức cho điện thế của quả cầu bên trong. Không cần thiết phải lấy tích phân.

(Wisconsin)

Lời giải:

Do sự cân bằng tĩnh điện, bề mặt trong của quả cầu dẫn điện rỗng mang một tổng điện tích là $-Q$, trong khi mặt ngoài của nó có tổng điện tích là $+Q$. Sử dụng định luật Gauss

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{tổng}}}{\epsilon_0},$$

trong đó $Q_{\text{tổng}}$ là tổng đại số của tất cả các điện tích được bao bọc bởi mặt kín s , ta nhận được

$$(a) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > r_3)$$

$$(b) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r_2 < r < r_3)$$

(c) Sử dụng biểu thức đối với điện thế $\varphi(p) = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, ta tìm được điện thế của quả cầu bên trong là

$$\varphi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{r_3}^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

1017

Bên trong của một vỏ kim loại hình cầu đã nối đất (bán kính trong là R_1 và bán kính ngoài là R_2) chứa đầy điện tích không gian phân bố đều với mật độ điện tích ρ . Hãy tìm năng lượng tĩnh điện của hệ. Tìm điện thế tại tâm của vỏ cầu kim loại đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Xét một mặt cầu đồng tâm có bán kính r ($r < R_1$). Sử dụng định luật Gauss ta nhận được

$$\mathbf{E} = \frac{r}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r.$$

Khi vỏ cầu này được nối đất, $\varphi(R_1) = 0$, $E = 0$ ($r > R_2$). Do đó,

$$\varphi(r) = \int_r^{R_1} E dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R_1^2 - r^2).$$

Điện thế tại tâm là

$$\varphi(0) = \frac{1}{6\epsilon_0} \rho R_1^2.$$

Năng lượng tĩnh điện là

$$W = \int \frac{1}{2} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^{R_1} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R_1^2 - r^2) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\rho^2 R_1^5}{45\epsilon_0}.$$

1018

Một mặt cầu kim loại bán kính a được bao bọc bởi một mặt cầu kim loại đồng tâm có bán kính trong là b , với $b > a$. Không gian giữa hai mặt cầu chứa đầy một vật liệu có độ dẫn điện σ thay đổi theo cường độ điện trường E theo

hệ thức $\sigma = KE$, trong đó K là một hằng số. Một hiệu điện thế V được duy trì giữa hai mặt cầu. Dòng điện giữa các mặt cầu là bao nhiêu?

(Wisconsin)

Lời giải:

Vì cường độ dòng điện là

$$I = j \cdot S = \sigma E \cdot S = KE^2 \cdot S = KE^2 \cdot 4\pi r^2,$$

suy ra điện trường là

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{I}{4\pi K}}$$

và điện thế là

$$V = - \int_b^a E \cdot dr = - \int_b^a \sqrt{\frac{I}{4\pi K}} \frac{1}{r} dr = \sqrt{\frac{I}{4\pi K}} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Do đó cường độ dòng điện giữa các mặt cầu được tính bởi

$$I = 4\pi K V^2 / \ln(b/a).$$

1019

Một bong bóng xà phòng cách điện có bán kính 1 cm có điện thế là 100 V. Nếu nó vỡ ra thành một giọt có bán kính 1 mm thì năng lượng tĩnh điện của nó thay đổi như thế nào?

(Wisconsin)

Lời giải:

Nếu bong bóng xà phòng mang một điện tích Q thì điện thế của nó là

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Đối với $r = r_1 = 1$ cm, $V = V_1 = 100$ V, ta có $Q = 4\pi\epsilon_0 r_1 V_1$. Khi bán kính thay đổi từ r_1 tới $r_2 = 1$ mm sự thay đổi của năng lượng tĩnh điện là

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_1} = 2\pi\epsilon_0 (r_1 V_1)^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= 2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (10^{-12} \times 100)^2 \times \left(\frac{1}{10^{-3}} - \frac{1}{10^{-2}} \right) \\ &= 5 \times 10^{-8} \text{ J}. \end{aligned}$$

1020

Một điện tích tĩnh được phân bố trên một vỏ hình cầu có bán kính trong R_1 và bán kính ngoài R_2 . Mật độ điện tích trong lớp vỏ cầu này là $\rho = a + br$, với r là khoảng cách tính từ tâm và bằng 0 ở mọi nơi khác.

(a) Hãy tìm biểu thức của cường độ điện trường ở mọi nơi theo r .

(b) Hãy tìm biểu thức của điện thế và mật độ năng lượng đối với $r < R_1$. Lấy điện thế bằng 0 tại $r \rightarrow \infty$.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Nhớ rằng ρ là một hàm số chỉ của bán kính r , nên ta có thể lấy một mặt cầu đồng tâm có bán kính r làm mặt Gauss phù hợp với yêu cầu đối xứng. Sử dụng định luật Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r) dr,$$

ta có thể nhận được các kết quả sau:

(a) Cường độ điện trường.

Đối với $r < R_1$, $E_1 = 0$.

Đối với $R_1 < r < R_2$, sử dụng hệ thức $4\pi r^2 E_2 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r (a + br') r'^2 dr'$ ta tìm được

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3}(r^3 - R_1^3) + \frac{b}{4}(r^4 - R_1^4) \right] r.$$

Đối với $R_2 > r$, từ $4\pi r^2 E_3 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} (a + br') r'^2 dr'$ ta tìm được

$$E_3 = \frac{1}{\epsilon_0 r^3} \left[\frac{a}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{b}{4}(R_2^4 - R_1^4) \right] r.$$

(b) Điện thế và mật độ năng lượng đối với $r < R_1$.

Lưu ý rằng $\varphi(\infty) = 0$ thì điện thế là

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_r^{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} + \int_{R_2}^\infty \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{a}{3}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{b}{4}(R_2^3 - R_1^3) \right]. \end{aligned}$$

Cũng như vậy, vì $E_1 = 0$ ($r < R_1$) nên mật độ năng lượng đối với $r < R_1$ là

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 = 0.$$

1021

Một điện tích Q được phân bố đều trên một mặt cầu có bán kính r . Hãy chứng minh rằng lực tác dụng lên một phần tử tích điện nhỏ dq có chiều hướng theo bán kính ra ngoài và có độ lớn bằng

$$dF = \frac{1}{2} E dq,$$

trong đó $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ là điện trường tại mặt cầu.

(Wisconsin)

Lời giải:

Mật độ điện tích mặt được cho bởi công thức

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Trên hình 1.8, ta xét một điểm P nằm bên trong mặt cầu gần với một phần tử có diện tích ds . Điện tích dq trên phần tử diện tích này sẽ sinh ra một điện trường tại điểm P gần giống như một điện trường được sinh ra do một tấm kim loại vô hạn tích điện đều, nghĩa là

$$\mathbf{E}_{1P} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n},$$

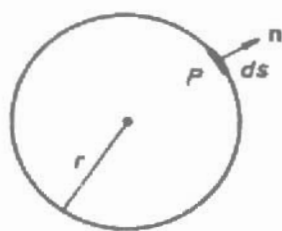
trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với ds và có hướng đi ra phía ngoài.

Điện trường bằng 0 ở bên trong quả cầu. Do đó nếu gọi $\mathbf{E}_{2P}$ là điện trường tại P sinh ra bởi tất cả các điện tích trên mặt cầu, ngoại trừ phần tử ds , ta phải có phương trình sau

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{1P} + \mathbf{E}_{2P} = 0.$$

Do đó,

$$\mathbf{E}_{2P} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}.$$



Hình 1.8

Vì P ở gần với ds , nên E_{2P} có thể coi như cường độ điện trường tại ds do các điện tích trên mặt cầu sinh ra. Do đó lực tương tác lên dq là

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}_{2P} = \frac{1}{2}Edq\mathbf{n},$$

trong đó $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ là cường độ điện trường ở mặt cầu.

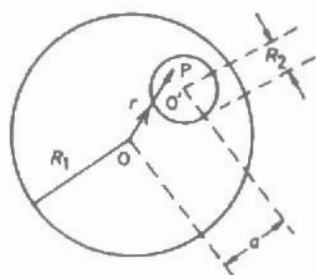
1022

Một quả cầu bán kính R_1 có mật độ điện tích đều ρ trong thể tích của nó ngoại trừ một vùng rỗng hình cầu bán kính R_2 nằm cách tâm một khoảng cách c .

(a) Tìm điện trường E tại tâm của quả cầu rỗng.

(b) Tìm điện thế ϕ tại điểm đó.

(UC, Berkeley)



Hình 1.9

Lời giải:

(a) Xét một điểm P bất kì của vùng rỗng (xem hình 1.9) và đặt

$$OP = \mathbf{r}, \quad Q'P = \mathbf{r}', \quad OO' = \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}.$$

Nếu không có vùng rỗng ở bên trong quả cầu thì điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}.$$

Nếu chỉ vùng cầu rỗng có mật độ điện tích ρ thì điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}'.$$

Do đó theo định lý chồng chập, điện trường tại P sẽ là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}.$$

Như vậy điện trường bên trong vùng rỗng là đều. Điều này tất nhiên bao gồm cả tâm của vùng rỗng.

(b) Giả thiết rằng điện thế ở vô cực bằng 0. Xét một hình cầu bất kì bán kính R với mật độ điện tích đồng đều ρ . Ta có thể tìm được điện trường bên trong và bên ngoài quả cầu đó như sau

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & r < R, \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}, & r > R. \end{cases}$$

Khi đó điện thế tại một điểm bất kì bên trong quả cầu sẽ là

$$\phi = \left(\int_r^R + \int_R^\infty \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2), \quad (1)$$

trong đó r là khoảng cách giữa điểm bất kì này và tâm của quả cầu.

Bây giờ hãy xét bài tập cụ thể. Nếu điện tích được phân bố đều trong toàn quả cầu bán kính R_1 , gọi ϕ_1 là điện thế tại tâm O' của vùng rỗng. Nếu phân bố điện tích đó được thay thế bởi một quả cầu nhỏ bán kính R_2 có mật độ điện tích đồng đều ρ trong vùng rỗng, gọi điện thế tại O' là ϕ_2 . Sử dụng biểu thức (1) và định lý chồng chập ta nhận được

$$\begin{aligned} \phi_{O'} &= \phi_1 - \phi_2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R_1^2 - a^2) - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R_2^2 - 0) \\ &= \frac{\rho}{6\varepsilon_0} [3(R_1^2 - R_2^2) - a^2]. \end{aligned}$$

1023

Một lớp lưỡng cực lý tưởng có mômen trên một đơn vị diện tích trên bề mặt S là τ . Điện thế do lớp lưỡng cực này gây ra tại điểm P là

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS,$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vectơ từ phần tử bề mặt tới điểm P .

(a) Xét một lớp lưỡng cực có bề rộng vô hạn nằm trong mặt phẳng $x-y$ có mật độ mômen đồng đều $\tau = \tau \mathbf{e}_z$. Xác định rằng hoặc ϕ hoặc một đạo hàm nào đó của nó không liên tục ngang qua lớp đó và tìm độ gián đoạn.

(b) Xét một điện tích điểm dương q nằm tại tâm của một mặt cầu bán kính a . Trên mặt này có một lớp lưỡng cực đồng đều τ và một mật độ điện tích mặt đồng đều σ . Tìm τ và σ sao cho điện thế bên trong mặt cầu sẽ chỉ bằng điện thế của điện tích q , trong khi điện thế bên ngoài sẽ bằng 0 (có thể sử dụng bất cứ điều gì bạn biết về điện thế của một điện tích bề mặt).

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Do đối xứng, điện thế tại điểm P chỉ phụ thuộc vào tọa độ z . Ta chọn các tọa độ trụ (R, θ, z) sao cho P ở trên trục z . Khi đó điện thế tại điểm P là

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau z}{r^3} dS.$$

Vì $r^2 = R^2 + z^2$, $dS = 2\pi R dR$, ta nhận được

$$\phi_P = \frac{2\pi\tau z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{R dR}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}} = \begin{cases} \frac{\tau}{2\epsilon_0}, & z > 0, \\ -\frac{\tau}{2\epsilon_0}, & z < 0. \end{cases}$$

Do đó điện thế là gián đoạn qua mặt phẳng $x-y$ (với $z = 0$). Độ gián đoạn được cho bởi

$$\Delta\phi = \frac{\tau}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\tau}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\tau}{\epsilon_0}.$$

(b) Đã biết rằng $\phi = 0$ đối với $r > a$. Bởi vậy $\mathbf{E} = 0$ với $r > a$. Sử dụng định luật Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

ta thấy rằng $\sigma \cdot 4\pi a^2 + q = 0$. Do đó

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2}.$$

Nếu điện thế tại vô cực bằng 0 thì điện thế ở bên ngoài mặt cầu sẽ bằng 0 ở khắp mọi nơi. Nhưng điện thế bên trong mặt cầu là $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Đối với $r = a$, $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$, sao cho độ gián đoạn tại mặt cầu là

$$\Delta\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Khi đó ta có $\frac{\tau}{\epsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$, và nhận được

$$\tau = -\frac{q}{4\pi a} \mathbf{e}_r.$$

2. TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN TRONG MỘT VẬT DẪN ĐIỆN (1024–1042)

1024

Một điện tích Q được nạp cho một tụ điện có điện dung C_1 . Một đầu của tụ điện được nối đất và đầu kia được cách điện, không nối với bất cứ một vật gì khác. Người ta tăng thêm khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện và điện dung trở thành C_2 ($C_2 < C_1$). Khi đó điều gì sẽ xảy ra đối với điện thế trên bản cực không nối đất? Xác định điện thế V_2 qua điện thế V_1 .

(Wisconsin)

Lời giải:

Trong quá trình tăng khoảng cách giữa hai bản cực, điện tích trên bản cực cách điện được giữ không đổi. Vì $Q = CV$ nên điện thế của điện cực cách điện tăng khi C giảm. Nếu V_1 và V_2 là điện thế tương ứng của bản cực cách điện trước và sau khi tách ra thì ta có

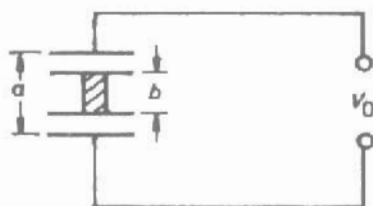
$$V_2 = \frac{C_1}{C_2} V_1.$$

1025

Hình 1.10 cho thấy hai tụ điện được mắc nối tiếp, phần giữa cứng có chiều dài b có thể chuyển động theo phương thẳng đứng. Điện tích của từng bản cực

tụ điện là A . Hãy chứng minh rằng điện dung của tổ hợp nối tiếp này không phụ thuộc vào vị trí của phần giữa đó và có giá trị là $C = \frac{A\epsilon_0}{a-b}$. Nếu hiệu điện thế giữa các bản cực ngoài được giữ không đổi là V_0 thì năng lượng tích trong các tụ điện sẽ thay đổi như thế nào khi phần cứng ở giữa bị bỏ đi?

(Wisconsin)



Hình 1.10

Lời giải:

Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện trên và d_2 là khoảng cách giữa hai bản cực của tụ điện dưới. Từ hình 1.10 ta thấy

$$d_1 + d_2 = a - b,$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d_2}.$$

Đối với hai tụ điện mắc nối tiếp, điện dung của bộ là

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{A\epsilon_0}{d_1 + d_2} = \frac{A\epsilon_0}{a - b}.$$

Vì C không phụ thuộc vào d_1 và d_2 , nên tổng điện dung của bộ không phụ thuộc vào vị trí của phần giữa. Tổng năng lượng trữ trong bộ tụ điện là

$$W = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{A\epsilon_0 V_0^2}{2(a - b)}.$$

Năng lượng được tích trữ nếu phần giữa bị bỏ đi là

$$W' = \frac{A\epsilon_0 V_0^2}{2a},$$

và ta có

$$W - W' = \frac{A\epsilon_0 V_0^2}{2(a - b)} \frac{b}{a}.$$

1026

Một tụ điện phẳng được tích điện đến điện thế V và sau đó được ngắt khỏi mạch nạp điện. Tính công thực hiện để làm thay đổi khoảng cách giữa các bản cực một cách chậm chạp từ d đến $d' \neq d$. (Các bản cực là hình tròn có bán kính $r \gg d$).

(Wisconsin)

Lời giải:

Bỏ qua hiệu ứng mép, điện dung của tụ điện phẳng là $C = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$ và năng lượng tích trữ là $W = \frac{1}{2} CV^2$. Vì các điện tích trên bản cực, $Q = \pm CV$, không thay đổi khi thay đổi khoảng cách giữa các bản cực nên ta có

$$V' = \frac{C}{C'} V.$$

Năng lượng tích trữ khi các bản cực ở khoảng cách d' là

$$W' = \frac{1}{2} C' \left(\frac{C}{C'} V \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C^2}{C'} V^2.$$

Như vậy độ biến thiên của năng lượng tích trữ trong tụ điện là

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2} CV^2 \left(\frac{C}{C'} - 1 \right) = \frac{1}{2} CV^2 \left(\frac{d'}{d} - 1 \right).$$

Do đó công sinh ra khi thay đổi khoảng cách giữa các bản cực từ d đến d' sẽ là

$$\frac{\epsilon_0 \pi r^2 (d' - d) V^2}{2d^2}.$$

1027

Một tụ điện phẳng có diện tích bản cực là $0,2 \text{ m}^2$ và khoảng cách giữa các bản cực là 1 cm được tích điện đến 1000 V và sau đó được ngắt khỏi ắc quy. Tính công cần thiết để đưa các bản cực ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách ban đầu giữa các bản tụ điện. Hiệu điện thế cuối cùng trên tụ điện sẽ là bao nhiêu?

$$(\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))$$

(Wisconsin)

Lời giải:

Khi các bản cực đã bị đưa ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách cũ thì điện dung của tụ điện là $C' = \frac{C}{2}$ trong đó $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ là điện dung trước khi khoảng cách giữa các bản cực tăng lên. Nếu một tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế U thì điện tích của tụ điện là $Q = CU$. Khi độ lớn của điện tích Q không thay đổi trong cả quá trình thì độ biến thiên của năng lượng tích trữ trong tụ điện sẽ là

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 \\ &= \frac{\epsilon_0 AU^2}{2d} = \frac{8,9 \times 10^{-12} \times 0,2 \times (10^3)^2}{2 \times 0,01} \\ &= 8,9 \times 10^{-5} \text{ J}.\end{aligned}$$

ΔW cũng chính là công cần thiết để đưa các bản cực ra xa nhau một khoảng cách gấp đôi khoảng cách cũ giữa các bản cực. Vì điện tích Q được giữ không đổi, hiệu điện thế cuối cùng là

$$CU = C'U', \text{ hay } U' = 2U = 2000 \text{ V}.$$

1028

Cho hai điện cực phẳng song song, khoảng cách giữa hai điện cực là d có điện thế 0 và V_0 , tìm mật độ dòng điện nếu điện cực có điện thế thấp hơn được cung cấp không hạn chế các electron từ trạng thái đứng yên. Bỏ qua sự va chạm.

(Wisconsin; UC Berkeley)

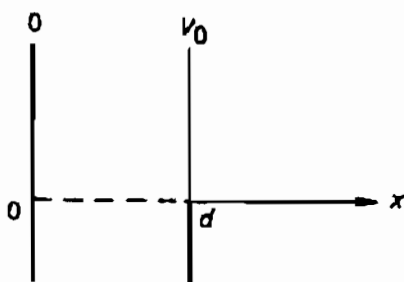
Lời giải:

Chọn trục x vuông góc với các bản cực như trên hình 1.11. Cả điện tích và mật độ dòng điện đều là hàm của x . Ở trạng thái dừng

$$\frac{dj(x)}{dx} = 0.$$

Do đó $j = -j_0 \mathbf{e}_x$, ở đây j_0 là một hằng số. Gọi $v(x)$ là tốc độ của các electron. Khi đó mật độ điện tích là

$$\rho(x) = -\frac{j_0}{v(x)}.$$



Hình 1.11

Điện thế thỏa mãn phương trình Poisson

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = \frac{j_0}{\epsilon_0 v(x)}.$$

Sử dụng hệ thức năng lượng $\frac{1}{2}mv^2(x) = eV$, ta nhận được

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{j_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}}.$$

Để giải phương trình vi phân này, ta đặt $u = \frac{dV}{dx}$. Khi đó ta có

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dV} \frac{dV}{dx} = u \frac{du}{dV},$$

Và phương trình trên trở thành

$$u du = AV^{-\frac{1}{2}} dV,$$

trong đó $A = \frac{j_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$. Lưu ý rằng $\frac{dV}{dx} = 0$ tại $x = 0$, khi các electron nằm yên tại đó. Lấy tích phân phương trình trên ta có

$$\frac{1}{2}u^2 = 2AV^{\frac{1}{2}},$$

hay

$$V^{-\frac{1}{4}} dV = 2A^{\frac{1}{2}} dx.$$

Vì $V = 0$ tại $x = 0$ và $V = V_0$ tại $x = d$, tích phân phương trình trên, ta được

$$\frac{4}{3}V_0^{\frac{3}{4}} = 2A^{\frac{1}{2}}d = 2\left(\frac{j_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{\frac{1}{2}}d.$$

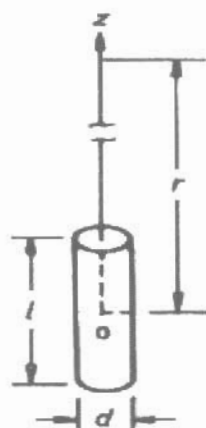
Cuối cùng, từ phương trình trên, ta nhận được

$$\mathbf{j} = -j_0 \mathbf{e}_x = -\frac{4\epsilon_0 V_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} \mathbf{e}_x.$$

1029

Như có thể thấy trên hình 1.12, một thanh dẫn điện hình trụ có đường kính d và chiều dài l ($l \gg d$) được tích điện đều trong chân không sao cho điện trường ở gần bề mặt nó và cách xa các đầu của nó là E_0 . Điện trường tại $r \gg l$ trên trục của hình trụ là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)



Hình 1.12

Lời giải:

Chọn tọa độ với trục z dọc theo trục của hình trụ và gốc tọa độ tại tâm của thanh hình trụ đó. Lưu ý rằng $l \gg d$ và sử dụng định lý Gauss, chúng ta có thể tìm được điện trường ở gần mặt hình trụ và xa các đầu của nó là

$$E_0 = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 d} \mathbf{e}_\rho,$$

ở đây λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của hình trụ và $\mathbf{e}_\rho$ là vectơ đơn vị theo hướng bán kính. Đối với $r \gg l$ ta có thể coi thanh dẫn điện như một

điện tích điểm với $Q = \lambda l$. Như vậy cường độ điện trường tại một điểm ở xa nằm trên trục của thanh hình trụ có thể tính gần đúng bằng

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 dl}{4r^2}.$$

Hướng của E là dọc theo trục và hướng ra xa thanh hình trụ.

1030

Một dây cáp đồng trục có cáp dẫn điện bên trong đường kính 0,5 cm và cáp dẫn điện bên ngoài đường kính 1,5 cm, khoảng cách giữa hai cáp dẫn chứa đầy không khí. Khi cáp dẫn bên trong có điện thế +8000 V đối với cáp dẫn bên ngoài nối đất

(a) điện tích trên 1 m trong cáp dẫn bên trong là bao nhiêu? và

(b) cường độ điện trường tại $r = 1$ cm là bao nhiêu?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Coi mật độ điện tích dài của dây dẫn bên trong là λ . Do tính đối xứng ta thấy rằng cường độ điện trường tại một điểm cách trục của cáp một khoảng cách r ở giữa hai vật dẫn có hướng theo bán kính và độ lớn của nó được tính bởi định lý Gauss là

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Khi đó hiệu điện thế giữa cáp dẫn bên trong và cáp dẫn bên ngoài là

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a).$$

Với $a = 1,5$ cm, $b = 0,5$ cm, ta có

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi \times 8,9 \times 10^{-12} \times 8000}{\ln(1,5/0,5)} \\ &= 4,05 \times 10^{-7} \text{ C/m}.\end{aligned}$$

(b) Điểm $r = 1$ cm ở bên ngoài của cáp. Định luật Gauss chỉ ra rằng cường độ điện trường tại đó bằng 0.

1031

Một tụ điện trụ có bản bên trong bán kính r_1 và bản bên ngoài bán kính r_2 . Bản bên ngoài được nối đất và bản bên trong được tích điện sao cho nó có điện thế dương V_0 . Qua V_0 , r_1 , và r_2 , hãy tính:

(a) điện trường tại r ($r_1 < r < r_2$).

(b) điện thế tại r .

(c) Nếu một điện tích âm nhỏ Q ban đầu nằm tại r được đẩy đến r_1 , thì điện tích ở bản bên trong thay đổi như thế nào?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Từ bài tập 1030, ta có

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V_0}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (r_1 < r < r_2).$$

(b)

$$V(r) = V_0 - \int_{r_1}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{V_0 \ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

(c) Giả sử sự thay đổi của điện tích của bản bên trong là $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ với $Q_1 = CV_0$. Khi điện tích âm Q chuyển động từ r tới r_1 thì công thực hiện bởi lực tĩnh điện là $Q(V_0 - V)$. Công này bằng độ giảm của năng lượng tĩnh điện trong tụ điện

$$\frac{Q_1^2}{2C} - \frac{Q_2^2}{2C} = Q(V_0 - V).$$

Vì Q là một đại lượng nhỏ, ta lấy gần đúng

$$Q_1 + Q_2 \approx 2Q_1.$$

Do đó

$$\frac{2Q_1}{2C} \Delta Q = Q(V_0 - V),$$

hay

$$\Delta Q = \frac{Q}{V_0} (V_0 - V) = \frac{Q \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

1032

Một ống kim loại hình trụ rỗng rất dài có bán kính trong r_0 và bán kính ngoài $r_0 + \Delta r$ ($\Delta r \ll r_0$) được tích đầy điện tích không gian một cách đồng đều với mật độ ρ_0 . Hãy xác định điện trường đối với $r < r_0$, $r > r_0 + \Delta r$ và $r_0 + \Delta r > r > r_0$? Mật độ điện tích mặt trên bề mặt trong và ngoài của ống hình trụ là bao nhiêu? Điện tích tổng cộng trên mặt hình trụ được giả thiết là bằng 0. Điện trường và điện tích bề mặt là bao nhiêu nếu ống hình trụ được nối đất?

(Wisconsin)

Lời giải:

Dùng các tọa độ trụ (r, φ, z) có trục z dọc theo trục của ống. Dùng định luật Gauss tính được cường độ điện trường như sau

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_r \quad \text{đối với } r < r_0,$$

$$\mathbf{E}_2(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2r\epsilon_0} \mathbf{e}_r \quad \text{đối với } r > r_0 + \Delta r,$$

$$\mathbf{E}_3(r) = 0, \quad \text{đối với } r_0 < r < r_0 + \Delta r.$$

Mật độ điện tích mặt σ trên một vật dẫn liên hệ với cường độ điện trường E tại bề mặt bởi công thức $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ với E có hướng đi ra và vuông góc với vật dẫn điện. Như vậy mật độ điện tích mặt tương ứng tại $r = r_0$ và $r = r_0 + \Delta r$ là

$$\sigma(r_0) = -\epsilon_0 E_1(r_0) = -\frac{\rho_0 r_0}{2},$$

$$\sigma(r_0 + \Delta r) = \epsilon_0 E_2(r_0 + \Delta r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2(r_0 + \Delta r)}.$$

Nếu ống hình trụ được nối đất thì khi đó sẽ có

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{đối với } r > r_0 + \Delta r,$$

$$\sigma(r_0 + \Delta r) = 0 \quad \text{đối với } r = r_0 + \Delta r,$$

E và σ trong các vùng khác vẫn giữ nguyên như cũ.

1033

Một tụ điện chứa đầy không khí được chế tạo từ hai ống kim loại hình trụ đồng tâm. Ống hình trụ bên ngoài có bán kính 1 cm.

(a) Hãy xác định bán kính của ống trụ bên để giữa hai ống trụ có hiệu điện thế cực đại trước khi lớp điện môi bằng không khí bị đánh thủng?

(b) Hãy xác định bán kính của ống bên trong để năng lượng tích trữ trong tụ điện là cực đại trước khi lớp điện môi bị đánh thủng?

(c) Hãy tính hiệu điện thế cực đại trong trường hợp (a) và (b) đối với điện trường đánh thủng trong không khí là 3×10^6 V/m.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi E_b là điện trường đánh thủng trong không khí và R_1 và R_2 là bán kính tương ứng của ống trụ bên trong và bên ngoài. Gọi τ là điện tích trên một đơn vị chiều dài trong từng ống và sử dụng định lý Gauss ta nhận được cường độ điện trường trong tụ điện và hiệu điện thế giữa hai ống lần lượt là

$$\mathbf{E}_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r, \quad V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Vì điện trường gần với ống dẫn bên trong là mạnh nhất, ta có

$$E_b = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R_1}.$$

Do đó, ta có

$$V_b = E_b R_1 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$\frac{dV_b}{dR_1} = E_b \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + R_1 \frac{R_1}{R_2} \left(-\frac{R_2}{R_1^2} \right) \right] = E_b \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right).$$

Để nhận được hiệu điện thế cực đại, R_1 phải có giá trị sao cho $\frac{dV_b}{dR_1} = 0$, nghĩa là $\ln \frac{R_2}{R_1} = 1$ hay $R_1 = \frac{R_2}{e}$. Khi đó hiệu điện thế cực đại sẽ là

$$V_{\max} = \frac{R_2}{e} E_b.$$

(b) Năng lượng trữ trên một đơn vị chiều dài của tụ điện là

$$W = \frac{1}{2} \tau V = \pi \epsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

và

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dR_1} &= \pi \epsilon_0 E_b^2 \left[2R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + R_1^2 \frac{R_1}{R_2} \left(-\frac{R_2}{R_1^2} \right) \right] \\ &= \pi \epsilon_0 E_b^2 R_1 \left(2 \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right).\end{aligned}$$

Để tích trữ năng lượng cực đại, chúng ta cần có $\frac{dW}{dR_1} = 0$, nghĩa là, $2 \ln \frac{R_2}{R_1} = 1$ hoặc $R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}}$. Trong trường hợp này hiệu điện thế là

$$V = \frac{1}{2\sqrt{e}} R_2 E_b.$$

(c) Đối với (a),

$$V_{\max} = \frac{R_2}{e} E_b = \frac{0,01}{e} \times 3 \times 10^6 = 1,1 \times 10^4 \text{ V}.$$

Đối với (b),

$$V_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{e}} R_2 E_b = \frac{0,01 \times 3 \times 10^6}{2\sqrt{e}} = 9,2 \times 10^3 \text{ V}.$$

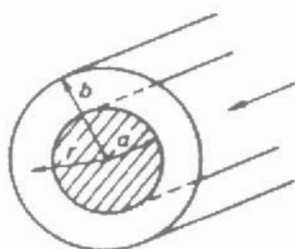
1034

Trên hình 1.13, ta thấy một dây cáp đồng trục rất dài bao gồm một ống hình trụ bên trong bán kính a , độ dẫn điện σ và một ống hình trụ bên ngoài đồng trục có bán kính b . Vỏ ngoài có độ dẫn điện vô hạn. Khoảng không gian giữa các ống hình trụ là chân không. Một mật độ dòng điện đồng đều không đổi j có hướng dọc theo trục tọa độ z (trùng với trục của cáp) được duy trì trong ống hình trụ bên trong. Dòng điện hồi tiếp chảy đồng đều trên vỏ ngoài. Hãy tính mật độ điện tích mặt trên ống hình trụ bên trong như một hàm của tọa độ z với gốc tọa độ $z = 0$ được chọn trên mặt phẳng nằm giữa hai đầu của dây cáp.

(Princeton)

Lời giải:

Giả thiết chiều dài của dây cáp là $2l$ và các ống hình trụ bên trong và bên ngoài được nối với nhau tại bề mặt cuối $z = -l$. (Bề mặt $z = l$ có thể nối với nguồn pin). Vỏ hình trụ bên ngoài là một dây dẫn lý tưởng mà điện thế của



Hình 1.13

nó là như nhau ở khắp mọi nơi và được lấy bằng 0. Ống hình trụ bên trong có mật độ dòng điện $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, nghĩa là $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{j}{\sigma} \mathbf{e}_z$, sao cho mặt cắt của nó $z = \text{constant}$ là một mặt đẳng thế với điện thế

$$V(z) = -\frac{j}{\sigma}(z + l).$$

Trong toạ độ trụ, cường độ điện trường tại một điểm (r, φ, z) bên trong dây cáp có thể được biểu thị như sau

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = E_r(r, z)\mathbf{e}_r + E_z(r, z)\mathbf{e}_z.$$

Vì dòng điện không thay đổi theo trục z nên $E_z(r, z)$ cũng không phụ thuộc vào z . Chọn làm mặt Gauss là một mặt trụ bán kính r , chiều dài dz với trục z cũng là trục của nó. Lưu ý rằng thông lượng điện qua hai mặt cuối của nó có độ lớn như nhau và có hướng sao cho sự đóng góp của chúng triệt tiêu lẫn nhau. Khi đó định luật Gauss trở thành

$$E_r(r, z) \cdot 2\pi r dz = \lambda(z) dz / \epsilon_0,$$

trong đó $\lambda(z)$ là diện tích trên một đơn vị chiều dài của ống hình trụ bên trong. Suy ra

$$E_r(r, z) = \frac{\lambda(z)}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Do đó ta nhận được hiệu điện thế giữa dây dẫn bên trong và bên ngoài như sau

$$V(z) = \int_a^b E_r(r, z) dr = \frac{\lambda(z)}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Vì $V(z) = -\frac{j}{\sigma}(z + l)$ nên phương trình trên có dạng

$$\lambda(z) = \frac{2\pi \epsilon_0 V(z)}{\ln(b/a)} = -\frac{2\pi \epsilon_0 j(z + l)}{\sigma \ln(b/a)}.$$

Khi đó mật độ điện tích mặt tại z là

$$\sigma_s(z) = \frac{\lambda(z)}{2\pi a} = -\frac{\varepsilon_0 J(z+l)}{a\sigma \ln(b/a)}.$$

Chọn gốc tọa độ tại bề mặt cuối với $z = -l$, ta có

$$\sigma_s(z) = -\frac{\varepsilon_0 J z}{a\sigma \ln(b/a)}.$$

1035

Một vật dẫn kích thước hữu hạn có độ dẫn đồng đều σ và mật độ điện tích khối đồng đều ρ . Hãy mô tả chi tiết sự biến đổi tiếp theo của hệ này trong hai trường hợp:

- (a) Vật dẫn là một hình cầu,
- (b) Vật dẫn không phải là hình cầu,

Điều gì sẽ xảy ra đối với năng lượng của hệ trong hai trường hợp trên?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Lấy hằng số điện môi của vật dẫn là ε . Từ các phương trình $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$, $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ và $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, ta nhận được

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho, \quad \text{hay} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}, \quad \text{và} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}.$$

- (a) Nếu vật dẫn là hình cầu, tính đối xứng cầu đòi hỏi $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r$. Do đó

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, t) &= \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{3\varepsilon} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} + \mathbf{E}(0, t) = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{3\varepsilon} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho_0 \mathbf{r}}{3\varepsilon} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng $\mathbf{E}(0, t) = 0$ đối với trường hợp đối xứng. Hiển nhiên là khi $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{E} = 0$, $\rho = 0$, và $\mathbf{J} = 0$ bên trong vật dẫn. Như vậy điện tích được phân bố đồng đều trên mặt cầu sau một thời gian đủ lớn.

(b) Nếu vật dẫn không phải là hình cầu thì lời giải phức tạp hơn. Tuy nhiên ta vẫn có

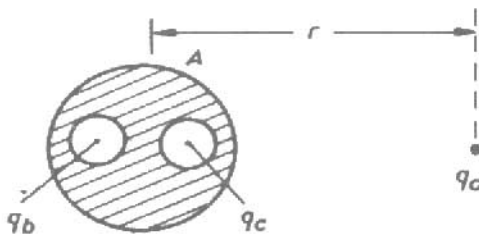
$$|\mathbf{E}| \propto e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}, |\mathbf{J}| \propto e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}, \rho \propto e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}.$$

Điều này có nghĩa là $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ và ρ bên trong vật dẫn mỗi đại lượng đều suy giảm theo hàm số mũ tới 0 với hằng số thời gian $\frac{\epsilon}{\sigma}$. Kết quả là điện tích sẽ chỉ được phân bố trên bề mặt của vật dẫn. Còn sự thay đổi năng lượng, đầu tiên chúng ta hãy xét trường hợp (a). Điện trường bên ngoài vật dẫn luôn luôn như nhau trong khi điện trường bên trong vật dẫn sẽ thay đổi từ một giá trị hữu hạn đến 0. Kết quả thực chất là năng lượng điện giảm đi một lượng đúng bằng lượng mất đi do sự chuyển đổi của năng lượng điện thành nhiệt. Trong trường hợp (b) điện trường bên ngoài vật dẫn sẽ phụ thuộc vào θ và φ nhưng kết quả định tính vẫn như thế, nói một cách khác là năng lượng điện giảm theo thời gian chuyển đổi thành nhiệt. Một cách ngắn gọn, sự phân bố điện tích trên bề mặt cuối cùng sao cho năng lượng điện của hệ trở thành nhỏ nhất. Nói một cách khác, vật dẫn sẽ trở thành một khối đẳng thế.

1036

Một vật dẫn điện hình cầu A có chứa hai lỗ hình cầu như trên hình 1.14. Tổng điện tích trên vật dẫn bằng 0. Tuy nhiên, có một điện tích điểm $+q_b$ tại tâm của một lỗ và $+q_c$ tại tâm của lỗ kia. Tại một khoảng cách r ở xa là một điện tích khác $+q_d$. Hãy xác định lực tác dụng lên A , q_b , q_c , và q_d ? Những câu trả lời nào, nếu có, chỉ là gần đúng và phụ thuộc vào r có giá trị rất lớn? Bình luận về sự đồng đều của phân bố điện tích trên các thành lỗ rỗng và trên A nếu r không lớn.

(Wisconsin)



Hình 1.14

Lời giải:

Các điện tích bên ngoài một lỗ rỗng không ảnh hưởng đến trường ở bên trong nó vì có sự che chắn tĩnh điện của vật dẫn. Vì đối xứng cầu, các lực tác dụng trên các điện tích điểm q_b và q_c tại tâm của các lỗ rỗng bằng 0. Do cân bằng tĩnh điện chúng ta thấy rằng bề mặt của hai lỗ rỗng hình cầu mang một tổng điện tích $-(q_b + q_c)$ và vì quả cầu A không tích điện ngay từ đầu nên mặt cầu của nó phải chứa các điện tích cảm ứng $q_b + q_c$. Khi r rất lớn, ta có thể tính gần đúng tương tác giữa quả cầu A và điện tích điểm q_d bằng một lực tĩnh điện giữa các điện tích điểm $q_b + q_c$ tại tâm và q_d , cụ thể là:

$$F = \frac{q_d(q_b + q_c)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Tuy nhiên, phương trình này không đúng đối với r không đủ lớn. Sự phân bố điện tích trên bề mặt của từng lỗ rỗng luôn luôn đồng đều và không phụ thuộc vào độ lớn của r . Mặc dù vậy, do ảnh hưởng của q_d , sự phân bố điện tích trên bề mặt quả cầu A sẽ không đồng đều và sự không đồng đều này sẽ trở thành càng lớn khi r giảm.

1037

Một tụ điện cầu gồm hai mặt cầu dẫn điện đồng tâm có bán kính a và b ($a > b$). Mặt cầu bên ngoài được nối đất và một điện tích Q được đặt vào mặt cầu bên trong. Sau đó vật dẫn bên ngoài co lại từ bán kính a thành bán kính a' . Tìm công thực hiện bởi lực điện.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Cả hai điện trường tại $r < b$ và $r > a$ đều bằng 0. Tại $b < r < a$ điện trường là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Do đó năng lượng điện trường là

$$W = \int_b^a \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

Khi mặt cầu bên ngoài co lại từ $r = a$ tới $r = a'$, công do lực điện thực hiện đúng bằng với độ giảm của năng lượng điện trường.

$$W_a - W_{a'} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right) = \frac{Q^2(a - a')}{8\pi\epsilon_0 aa'}.$$

1038

Một mặt cầu kim loại mỏng bán kính b có điện tích Q .

(a) Điện dung của nó là bao nhiêu?

(b) Mật độ năng lượng của điện trường tại một khoảng cách r tính từ tâm của cầu là bao nhiêu?

(c) Tổng năng lượng của điện trường là bao nhiêu?

(d) Tính công đã thực hiện khi tích điện cho mặt cầu bằng cách mang các điện tích vô cùng nhỏ từ vô cực đến.

(e) Điện thế V được thiết lập giữa các mặt cầu kim loại mỏng đồng tâm bên trong (bán kính a) và bên ngoài (bán kính b). Bán kính của mặt cầu bên trong là bao nhiêu để cho điện trường gần bề mặt của nó là nhỏ nhất?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toa độ cầu (r, θ, φ) . Điện trường bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Cho điện thế tại vô cực bằng 0, khi đó điện thế tại r là

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{Q}{V(b)} = 4\pi\epsilon_0 b.$$

$$(b) w_e(r) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

$$(c) W_e = \frac{1}{2} V(b) Q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 b}.$$

Cũng có thể tính từ mật độ năng lượng điện trường $w_e(r)$

$$W_e = \int_{r>b} w_e(r') dV' = \int_b^\infty \frac{Q^2}{2 \times 16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r'^4} \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b}.$$

(d) Công đã thực hiện khi tích điện cho quả cầu bằng cách mang các điện tích vô cùng nhỏ từ vô cực đến là

$$W = \int_0^Q V(Q') dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{4\pi \epsilon_0} \frac{dQ'}{b} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b} = W_e$$

đúng như mong đợi.

(e) Giả thiết rằng mặt cầu bên trong mang một điện tích Q . Đối với $a < r < b$ cường độ điện trường là

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Hiệu điện thế giữa các mặt cầu đồng tâm là

$$V = \int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Biểu thị theo V , ta có

$$Q = \frac{4\pi \epsilon_0 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

và

$$E(r) = \frac{4\pi \epsilon_0 V}{4\pi \epsilon_0 r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{V}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}.$$

Đặc biệt, ta có

$$E(a) = \frac{V}{a^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{Vb}{ab - a^2}.$$

Từ $\frac{dE(a)}{da} = 0$ ta thấy rằng $E(a)$ là cực tiểu tại $a = \frac{b}{2}$, và giá trị cực tiểu đó là

$$E_{\min}(a) = \frac{4V}{b}.$$

1039

Một quả cầu dẫn điện có tổng điện tích Q bị cắt làm đôi. Phải dùng một lực như thế nào để giữ các nửa này với nhau?

(MIT)

Lời giải:

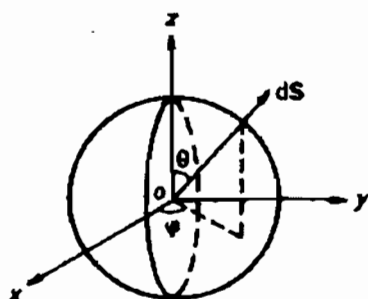
Điện tích được phân bố hoàn toàn trên bề mặt quả cầu với mật độ điện tích mặt là $\sigma = Q/4\pi R^2$ với R là bán kính của quả cầu. Chúng ta đã biết trong bài tập 1021 là lực tác dụng lên một yếu tố diện tích dS của mặt cầu dẫn điện được tính như sau

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS.$$

Dùng hệ tọa độ như trên hình 1.15. Mặt phẳng cắt đôi quả cầu được lấy là mặt phẳng xoz . Lực đẩy giữa hai nửa quả cầu vuông góc với mặt cắt do đó lực tổng hợp tác dụng lên nửa bên phải hướng theo trục y . Độ lớn của lực tổng hợp này là

$$\begin{aligned} F &= \int dF \sin \theta \sin \varphi = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi \sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

Đây cũng chính là lực cần thiết để giữ hai nửa quả cầu với nhau.



Hình 1.15

1040

Một hạt có điện tích q được dịch chuyển từ vô cực đến tâm của một vỏ cầu rỗng dẫn điện bán kính R , chiều dày t , qua một lỗ rất nhỏ trên vỏ cầu. Tính công thực hiện trong dịch chuyển đó?

(Princeton)

Lời giải:

Công thực hiện bởi một ngoại lực đúng bằng độ tăng năng lượng điện trường của toàn hệ. Cường độ điện trường tại một điểm cách điện tích điểm q một khoảng cách r là $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Khi q ở tại vô cực, năng lượng điện của toàn hệ là

$$W = \int_{\infty}^{\frac{\epsilon_0}{2}} E^2 dV,$$

Lấy tích phân theo toàn bộ không gian vì khi khoảng cách giữa vỏ cầu và q là vô hạn thì trường do q sinh ra tại vỏ cầu dẫn điện có thể lấy bằng 0. Sau khi q được dịch chuyển đến tâm vỏ quả cầu dẫn điện, vì vỏ không ảnh hưởng đến trường bên trong nên cường độ điện trường tại một điểm bên trong vỏ vẫn là $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, r là khoảng cách từ điểm đó đến q . Tại một điểm bên ngoài vỏ, định luật Gauss chỉ ra rằng cường độ điện trường vẫn còn là $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Do đó năng lượng điện của hệ có giá trị giống như W nhưng trừ đi phần đóng góp của vỏ, mà bên trong chiều dày của nó điện trường bằng 0. Như vậy có một sự giảm năng lượng:

$$\begin{aligned} -\Delta W &= \int_R^{R+t} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+t} \right), \end{aligned}$$

giá trị này bằng công âm thực hiện bởi ngoại lực.

1041

Một tụ điện được chế tạo bởi ba vỏ cầu mỏng, dẫn điện, đồng tâm bán kính a, b và d ($a < b < d$). Vỏ cầu trong và vỏ cầu ngoài được nối với nhau bằng một dây dẫn cách điện mảnh chạy qua một lỗ rất nhỏ trong vỏ cầu giữa. Bỏ qua hiệu ứng của lỗ,

(a) hãy tìm điện dung của hệ,

(b) hãy cho biết một điện tích tổng cộng Q_B bất kì đặt trên vỏ cầu giữa sẽ tự phân bố nó như thế nào trên hai bề mặt của vỏ cầu đó.

(Columbia)

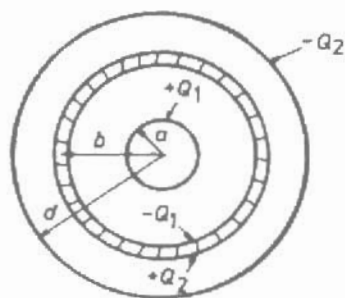
Lời giải:

(a) Giả thiết rằng điện tích của vỏ cầu bên trong là Q_1 và điện tích của vỏ cầu bên ngoài là $-Q_2$. Khi đó các điện tích trên bề mặt trong và ngoài của vỏ cầu giữa là $-Q_1$ và $+Q_2$ ($Q_1, Q_2 > 0$) như minh hoạ trên hình 1.16. Các cường độ điện trường là

$$E = \frac{Q_1 r}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (a < r < b),$$

$$E = \frac{Q_2 r}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (b < r < d),$$

$$E = 0, \quad (r < a, r > d).$$



Hình 1.16

Điện thế tại điểm P là

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

với $\varphi(\infty) = 0$. Như vậy ta có

$$\varphi(d) = 0, \quad \varphi(b) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right).$$

Vì vỏ cầu bên trong và bên ngoài nối với nhau nên điện thế của chúng phải bằng nhau. Do đó

$$\varphi(a) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) = 0,$$

Như vậy

$$Q_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = -Q_2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right).$$

Hiệu điện thế giữa các vỏ cầu là

$$V_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = -\varphi(b),$$

$$V_{db} = \varphi(d) - \varphi(b) = -\varphi(b).$$

Như vậy điện dung giữa vỏ cầu bên trong và bề mặt trong của vỏ cầu giữa là

$$C_{ab} = \frac{Q_1}{V_{ab}} = -\frac{Q_1}{\varphi(b)},$$

Và điện dung giữa mặt ngoài của vỏ cầu giữa và vỏ cầu ngoài là

$$C_{bd} = \frac{Q_2}{V_{bd}} = \frac{Q_2}{\varphi(b)}.$$

Điện dung của toàn hệ có thể coi như C_{ab} và C_{bd} mắc nối tiếp nhau, cụ thể là

$$C = \left(\frac{1}{C_{ab}} + \frac{1}{C_{bd}} \right)^{-1} = \frac{1}{\varphi(b)} \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right)^{-1} = \frac{4\pi\epsilon_0 ad}{d-a}.$$

(b) Điện tích thực Q_B tại vỏ cầu giữa phải bằng $Q_2 - Q_1$, sao cho

$$Q_1 = -\frac{a(d-b)}{b(d-a)} Q_B, \quad Q_2 = \frac{d(b-a)}{b(d-a)} Q_B.$$

Điều này có nghĩa là mặt trong của vỏ cầu giữa sẽ có tổng điện tích là $\frac{a(d-b)}{b(d-a)} Q_B$, trong khi mặt ngoài của nó có một tổng điện tích là $\frac{d(b-a)}{b(d-a)} Q_B$.

1042

Một ống hình trụ được tách thành hai nửa song song với trục của nó. Hai nửa đó được giữ ở điện thế V_0 và 0 như trên hình 1.17(a). Không có một điện tích thực nào trong hệ.

(a) Hãy tính sự phân bố điện thế trong toàn bộ không gian.

(b) Hãy tính điện trường đối với $r \gg a$.

(c) Hãy tính điện trường đối với $r \ll a$.

(d) Phác hoạ các đường sức điện trường trong toàn bộ không gian.

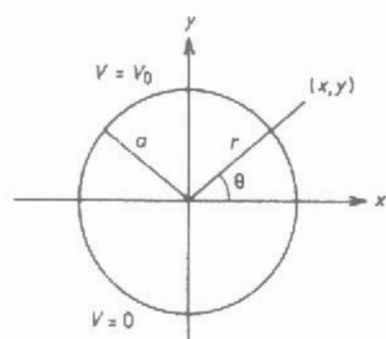
(MIT)

Lời giải:

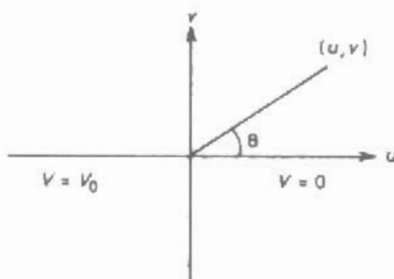
(a) Hãy dùng ánh xạ bảo giác để ánh xạ phần trong của hình tròn $|z| = a$ lên nửa mặt phẳng trên w bằng phép biến đổi (H. 1.17(b))

$$w = i \left(\frac{z - a}{z + a} \right).$$

Mặt trên và mặt dưới của vòng tròn đã được phác thảo lên trên trục âm và trục dương (trục u) của mặt phẳng w một cách tương ứng.



(a) Mặt phẳng z



(b) Mặt phẳng w

Hình 1.17

Bài tập bây giờ được quy về tìm một hàm số V điều hoà trong nửa trên của mặt phẳng w và lấy các giá trị 0 đối với $u > 0$ và V_0 đối với $u < 0$. Sử dụng hàm $V = A\theta + B$ mà A, B là các hằng số thực, vì $\theta = \text{Im} \{ \ln w \}$ là hàm điều hoà. Điều kiện biên cho $B = 0, A = V_0/\pi$. Do đó

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_0}{\pi} \text{Im} \left\{ \ln \left[i \frac{z - a}{z + a} \right] \right\} \\ &= \frac{V_0}{\pi} \text{Im} \left\{ \ln \left[i \frac{r \cos \theta - a + ir \sin \theta}{r \cos \theta + a + ir \sin \theta} \right] \right\} \\ &= \frac{V_0}{\pi} \text{Im} \left\{ \ln \left[i \frac{r^2 - a^2 + 2iar \sin \theta}{(r \cos \theta + a)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \right] \right\} \\ &= \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \right]. \end{aligned}$$

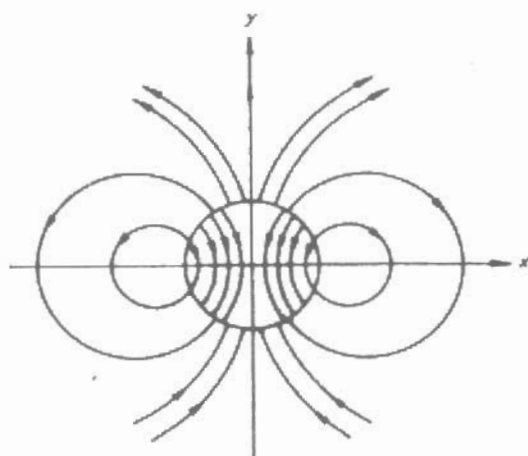
(b) Đối với $r \gg a$, ta có

$$V \approx \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2a \sin \theta}{r} \right] = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0 a \sin \theta}{\pi r},$$

và do đó

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2V_0 a \sin \theta}{\pi r^2},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{2V_0 a}{\pi r^2} \cos \theta.$$



Hình 1.18

(c) Đối với $r \ll a$, ta có

$$V \approx \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2r \sin \theta}{a} \right] = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0 r \sin \theta}{\pi a},$$

và do đó

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2V_0 \sin \theta}{\pi a},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{2V_0}{\pi a} \cos \theta.$$

(d) Các đường sức điện trường được biểu diễn trên hình 1.18.

3. TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN TRONG MÔI TRƯỜNG ĐIỆN MÔI (1043–1061)

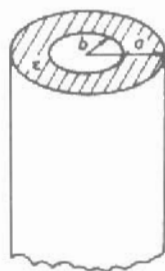
1043

Không gian giữa hai ống hình trụ kim loại mỏng, dài chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi ϵ . Các ống hình trụ có bán kính a và b như được chỉ ra trên hình 1.19.

(a) Hãy xác định điện tích trên một đơn vị chiều dài ở trên các ống hình trụ khi hiệu điện thế giữa ống ngoài và ống trong là V .

(b) Điện trường giữa các ống hình trụ là bao nhiêu?

(Wisconsin)



Hình 1.19

Lời giải:

Đây là một tụ điện trụ đồng trục có điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

Vì ống hình trụ bên ngoài có điện thế cao hơn, từ $Q = CV$ ta tính được điện tích trên một đơn vị chiều dài của các ống hình trụ bên trong và bên ngoài là

$$\lambda_i = \frac{2\pi\epsilon V}{\ln(\frac{a}{b})}, \quad \lambda_o = \frac{2\pi\epsilon V}{\ln(\frac{a}{b})}.$$

Khi đó theo định luật Gauss, cường độ điện trường ở bên trong tụ điện là

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r = -\frac{V}{r \ln(\frac{a}{b})} \mathbf{e}_r.$$

1044

Hãy tính điện trở giữa vật dẫn ở tâm có bán kính a và vật dẫn đồng trục bán kính b đối với một ống hình trụ có chiều dài $l \gg b$ chứa đầy một chất điện môi có hằng số điện môi ϵ và độ dẫn điện σ . Đồng thời tính điện dung giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài.

(Wisconsin)

Lời giải:

Gọi V là hiệu điện thế giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài, ta có thể biểu diễn cường độ điện trường giữa hai vật dẫn như sau

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V}{r \ln(\frac{b}{a})} \mathbf{e}_r.$$

Theo định luật Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, dòng điện giữa hai vật dẫn là

$$I = 2\pi r l J = \frac{2\pi \sigma l V}{\ln(\frac{b}{a})}.$$

Do đó, điện trở giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài là

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{2\pi l \sigma}.$$

Vì điện trường bằng 0 bên trong một vật dẫn, ta tìm được mật độ điện tích mặt ω của vật dẫn bên trong từ hệ thức biên $E = \frac{\omega}{\epsilon}$, nghĩa là

$$\omega = \epsilon \frac{V}{a \ln(\frac{b}{a})}.$$

Như vậy vật dẫn bên trong mang một tổng điện tích $Q = 2\pi a l \omega$. Do đó điện dung giữa hai vật dẫn là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln(\frac{b}{a})}.$$

1045

Hai vật dẫn được nhúng vào trong một vật liệu có độ dẫn $10^{-3} \Omega/\text{m}$ và hằng số điện môi $\epsilon = 80\epsilon_0$. Điện trở giữa hai vật dẫn đo được là $10^5 \Omega$. Hãy tìm biểu thức của điện dung giữa hai vật dẫn và tính giá trị của nó.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Giả thiết rằng hai vật dẫn chứa các điện tích tự do Q và $-Q$. Xét một mặt kín bao quanh vật dẫn có điện tích Q (nhưng không bao quanh vật dẫn kia). Sử dụng định luật Ohm và định luật Gauss ta có

$$I = \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q}{\epsilon}.$$

Nếu hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là V , ta có $V = IR = \frac{\sigma Q}{\epsilon} R$, suy ra

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon}{\sigma R}.$$

Giá trị bằng số của điện dung này là

$$C = \frac{80 \times 8,85 \times 10^{-12}}{10^{-4} \times 10^5} = 7,08 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

1046

Xét một tụ điện trụ đồng trục dài có một vật dẫn bên trong bán kính a , một vật dẫn bên ngoài bán kính b và một chất điện môi có hằng số điện môi $K(r)$ thay đổi theo bán kính trụ r . Tụ điện được tích điện tới hiệu điện thế V . Hãy xác định sự phụ thuộc bán kính của $K(r)$ sao cho mật độ năng lượng trong tụ điện không đổi (với điều kiện này chất điện môi không có ứng suất bên trong). Hãy tính điện trường $E(r)$ trong những điều kiện này.

(Wisconsin)

Lời giải:

Gọi λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của vật dẫn bên trong. Định luật Gauss cho ta

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r},$$

vì D nằm dọc theo hướng bán kính do tính đối xứng. Mật độ năng lượng tại r là

$$U(r) = \frac{1}{2}ED = \frac{D^2}{2\epsilon_0 K(r)} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2 K(r)}.$$

Nếu mật độ năng lượng này không phụ thuộc vào r , ta phải có $r^2 K(r) = \text{hằng số} = k$, nghĩa là $K(r) = kr^{-2}$.

Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là

$$\begin{aligned} V &= - \int_a^b E dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k} \int_a^b \frac{1}{r} dr \\ &= - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 k} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Do đó

$$\lambda = - \frac{4\pi\epsilon_0 k V}{b^2 - a^2},$$

và từ đây tính được điện trường

$$E(r) = - \frac{2rV}{b^2 - a^2}.$$

1047

Tìm thế năng của một điện tích điểm trong chân không ở cách xa một môi trường điện môi bán vô hạn có hằng số điện môi K một khoảng cách x .

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, φ, z) với bề mặt của môi trường bán vô hạn là mặt phẳng $z = 0$ và trục z đi qua điện tích điểm q nằm tại $z = x$. Gọi $\sigma_p(r)$ là mật độ điện tích mặt biên của môi trường điện môi, tức mặt phẳng $z = 0$, giả thiết rằng môi trường không chứa điện tích tự do. Thành phần vuông góc của cường độ điện tại điểm $(r, \varphi, 0)$ ở ngay phía trên của mặt phân cách ($z = 0_+$) là

$$E_{z1}(r) = - \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_p(r)}{2\epsilon_0}$$

Tuy nhiên, ở ngay phía dưới của mặt phân cách ($z = 0_-$) thành phần vuông góc của điện trường là

$$E_{z2}(r) = - \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_p(r)}{2\epsilon_0}$$

Điều kiện biên của điện cảm tại $z = 0$ là

$$\epsilon_0 E_{z1}(r) = \epsilon_0 K E_{z2}(r).$$

Do đó

$$\sigma_p(r) = \frac{(1-K)qx}{2\pi(1+K)(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

Điện trường tại điểm $(0, 0, x)$, nơi đặt điện tích điểm q , được sinh ra do phân bố của các điện tích liên kết, chỉ có thành phần vuông góc do đối xứng. Giá trị của nó là

$$E = \int \frac{\sigma_p(r)xdS}{4\pi\epsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{(1-K)qx^2}{4\pi(1+K)\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+x^2)^3} = \frac{(1-K)q}{16\pi(1+K)\epsilon_0 x^2},$$

ở đó yếu tố bề mặt dS được lấy là $2\pi r dr$. Do đó lực tác dụng lên điện tích điểm q là

$$F = qE = \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\epsilon_0 x^2}.$$

Thế năng W của điện tích điểm q bằng công do ngoại lực làm dịch chuyển q từ vô cực đến vị trí x , nghĩa là

$$W = - \int_\infty^x F dx' = - \int_\infty^x \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\epsilon_0 x'^2} dx' = \frac{(1-K)q^2}{16\pi(1+K)\epsilon_0 x}.$$

1048

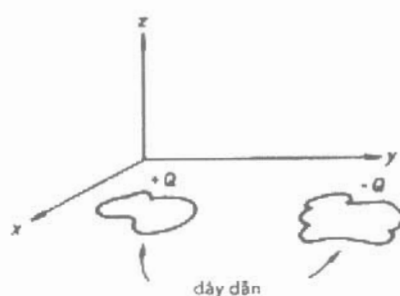
Điện dung tương hỗ của hai sợi dây kim loại mảnh nằm trên mặt phẳng $z = 0$ là C . Bây giờ hãy tưởng tượng rằng nửa không gian $z < 0$ được lấp đầy một chất điện môi có hằng số điện môi ϵ . Điện dung mới sẽ là bao nhiêu?

(MIT)

Lời giải:

Như ta thấy trên hình 1.20, trước khi chứa đầy vật liệu điện môi, một trong hai dây dẫn mảnh mang điện tích $+Q$, trong khi dây dẫn kia mang điện tích $-Q$. Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là V và điện dung của hệ là $C = Q/V$. Cường độ điện trường trong không gian là E . Sau khi nửa không gian $z < 0$ được chứa đầy chất điện môi, gọi E' là cường độ điện trường trong không gian. Điện trường này có mối liên hệ với điện trường ban đầu bởi phương trình $E' = KE$, trong đó K là một hằng số được xác định dưới đây.

Ta xét một hình trụ thẳng, cắt ngang qua mặt $z = 0$, đồng thời mặt cắt tại $z = 0$ chỉ chứa điện tích bao quanh sợi dây mang điện tích $+Q$ và bản thân sợi dây đó. Bề mặt đầu trên S_1 của hình trụ này ở trong không gian $z > 0$ và bề mặt đầu dưới S_2 ở trong không gian $z < 0$. Ta sẽ áp dụng định luật Gauss đối với hình trụ này. Sự đóng góp của phần mặt trụ có thể bỏ qua nếu ta lấy hình trụ đủ ngắn. Như vậy trước khi cho chất điện môi vào ta có



Hình 1.20

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (1)$$

và sau khi cho chất điện môi vào

$$\oint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_{s_1} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon \int_{s_2} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (2)$$

Lưu ý rằng các vectơ diện tích $\mathbf{S}_1$ và $\mathbf{S}_2$ bằng nhau về độ lớn và ngược hướng nhau. Trong phương trình (1) hai chỉ số 1 và 2 có thể hoán đổi cho nhau nên sự đóng góp của hai thành phần này phải bằng nhau. Do đó ta có

$$\int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}.$$

Phương trình (2) có thể viết lại như sau

$$K \left(\varepsilon_0 \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right) = Q,$$

hay

$$\frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon)K}{2\varepsilon_0} Q = Q,$$

Suy ra

$$K = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon}, \quad \mathbf{E}' = \frac{2\varepsilon_0 \mathbf{E}}{\varepsilon + \varepsilon_0}.$$

Để tính hiệu điện thế giữa hai vật dẫn, ta có thể chọn một đường L bất kì của tích phân từ vật dẫn này đến vật dẫn kia. Trước khi chứa đầy chất điện môi, hiệu điện thế là

$$V = - \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

Trong khi đó, sau khi chứa chất điện môi, hiệu điện thế đó trở thành

$$V' = - \int_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -K \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = KV.$$

Do đó điện dung sau khi đưa chất điện môi vào là

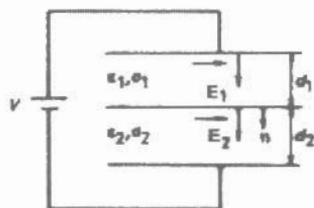
$$C' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{KV} = \frac{\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0} C.$$

1049

Một tụ điện phẳng (có các bản cực dẫn điện hoàn hảo) với khoảng cách giữa các bản tụ điện là d và chứa đầy hai lớp vật liệu (1) và (2). Lớp thứ nhất có hằng số điện môi ϵ_1 , độ dẫn điện σ_1 , lớp thứ hai có hằng số điện môi ϵ_2 , độ dẫn điện σ_2 và chiều dày tương ứng của các lớp điện môi đó là d_1 và d_2 . Tụ điện được nạp điện đến hiệu điện thế V (xem H. 1.21). Bỏ qua các hiệu ứng rìa.

- Xác định điện trường trong vật liệu (1) và (2).
- Xác định dòng chạy qua tụ điện.
- Xác định mật độ điện tích mặt toàn phần trên mặt phân cách giữa (1) và (2) là bao nhiêu?
- Xác định mật độ điện tích mặt tự do trên mặt phân cách giữa (1) và (2) là bao nhiêu?

(CUSPEA)



Hình 1.21

Lời giải:

(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, điện trường E_1 và E_2 trong vật liệu (1) và (2) là điện trường đều và hướng của chúng vuông góc với các bản cực. Như vậy ta có

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2. \quad (1)$$

Vì dòng điện chạy qua vật liệu (1) và (2) phải bằng nhau, ta có

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2. \quad (2)$$

Kết hợp phương trình (1) và (2), ta được

$$E_1 = \frac{V \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}, \quad E_2 = \frac{V \sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}.$$

(b) Mật độ dòng điện chạy qua tụ điện là

$$J = \sigma_1 E_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}.$$

Hướng của nó vuông góc với các bản cực.

(c) Bằng cách sử dụng điều kiện biên (xem hình 1.21)

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \sigma_t / \epsilon_0,$$

ta tìm được mật độ điện tích mặt toàn phần trên mặt phân cách giữa vật liệu (1) và (2) là

$$\sigma_t = \epsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0 (\sigma_1 - \sigma_2) V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}.$$

(d) Từ điều kiện biên

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \mathbf{n} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) = \sigma_f,$$

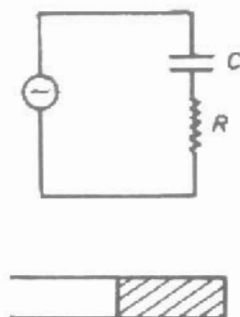
ta tìm được mật độ điện tích mặt tự do trên mặt phân cách là

$$\sigma_f = \frac{(\sigma_1 \epsilon_2 - \sigma_2 \epsilon_1) V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}.$$

1050

Trong hình 1.22, một tụ điện không khí với các bản cực phẳng, song song có điện dung C và một điện trở R mắc nối tiếp với một nguồn điện xoay chiều có tần số ω . Điện áp trên R là V_R . Bây giờ một nửa của tụ điện chứa đầy một vật liệu điện môi có hằng số điện môi ϵ nhưng phần còn lại của mạch điện giữ không thay đổi. Điện áp trên R bây giờ là $2V_R$. Bỏ qua hiệu ứng rìa. Hãy tính hằng số điện môi ϵ qua R, C và ω .

(Columbia)



Hình 1.22

Lời giải:

Khi một nửa của tụ điện chứa đầy vật liệu điện môi, nó trở thành hai tụ điện mắc song song, điện dung của hệ lúc này trở thành

$$C' = \frac{C}{2} + \frac{\epsilon C}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) C.$$

Điện áp trên R là VR/Z , trong đó V là hiệu điện thế của nguồn xoay chiều và Z là tổng trở của mạch điện. Do đó

$$\left| \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C'}} \right| = 2 \left| \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|,$$

với $j = \sqrt{-1}$. Suy ra

$$4R^2 + \frac{16}{\omega^2 C^2 (1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0})^2} = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}.$$

Giải phương trình này ta nhận được giá trị của hằng số điện môi

$$\epsilon = \left(\frac{4}{\sqrt{1 - 3R^2 C^2 \omega^2}} - 1 \right) \epsilon_0.$$

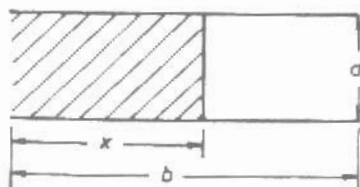
1051

Một tụ điện được chế tạo bởi hai bản cực phẳng song song có chiều dày a và chiều dài b cách nhau một khoảng cách d ($d \ll a, b$) như trên hình 1.23. Tụ điện có một thanh điện môi có hằng số điện môi tương đối là K giữa hai bản cực.

(a) Tụ điện được nối với một ắc quy có suất điện động V . Thanh điện môi được kéo một phần ra khỏi các bản cực sao cho chỉ có một chiều dài x còn ở lại giữa các bản cực. Hãy tính lực tác dụng lên thanh điện môi, lực này có hướng kéo ngược thanh điện môi trở về phía giữa các bản cực.

(b) Với thanh điện môi hoàn toàn ở bên trong, các bản cực tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế V và sau đó nguồn ắc quy được ngắt ra. Một lần nữa, thanh điện môi lại được kéo ra sao cho chỉ có chiều dài x còn lại bên trong các bản cực. Hãy tính lực tác dụng lên thanh điện môi, lực này có hướng kéo thanh trở lại phía trong các bản cực. Bỏ qua hiệu ứng rìa trong cả hai phần (a) và (b).

(Columbia)



Hình 1.23

Lời giải:

Coi tụ điện trong hình 1.23 như hai tụ điện mắc song song, chúng ta nhận được điện dung toàn phần là

$$C = \epsilon_0 \frac{Kxa}{d} + \epsilon_0 \frac{(b-x)a}{d} = \frac{\epsilon_0(K-1)ax}{d} + \frac{\epsilon_0 ba}{d} = \frac{\epsilon_0[(K-1)x + b]a}{d}$$

Xét sự tích điện của tụ điện. Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$VdQ = d\left(\frac{1}{2}V^2C\right) - Fdx.$$

(a) Khi $V =$ hằng số, $Q = CV$, ta có

$$VdQ = V^2dC.$$

Do đó

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_0 (K-1) a V^2}{2d}.$$

Vì $K > 1$, $F > 0$. Điều này có nghĩa là F có chiều hướng làm tăng x , tức là kéo thanh trở lại vào giữa các bản cực.

(b) Vì các bản cực được cách điện, $dQ = 0$. Lấy hiệu điện thế ban đầu là V_0 . Vì ban đầu $x = b$ nên $C_0 = \varepsilon_0 \frac{Kba}{d}$ và $Q = C_0 V_0$. Bây giờ cũng theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$F = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} V^2 C \right) = -VC \frac{dV}{dx} - \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx}.$$

Vì

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{C} \right) = -\frac{Q}{C^2} \frac{dC}{dx},$$

phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} F &= Q \frac{dV}{dx} - \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} \\ &= \frac{\varepsilon_0 K^2 (K-1)}{[(K-1)x + b]^2} \frac{ab^2}{2d} V_0^2. \end{aligned}$$

Một lần nữa, vì $F > 0$ nên lực này có hướng kéo thanh điện môi trở về giữa các bản cực.

1052

Một chất điện môi được đặt một phần vào một tụ điện phẳng. Biết rằng tụ điện này được tích điện nhưng đã ngắt khỏi nguồn. Chất điện môi sẽ chịu tác dụng của một lực:

- (a) bằng 0 (b) đẩy ra (c) kéo vào.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1053

Một tụ điện trụ có chiều dài L gồm một dây dẫn bên trong bán kính a , một vỏ dẫn điện mỏng bên ngoài bán kính b . Không gian bên trong tụ chứa đầy một vật liệu không dẫn điện có hằng số điện môi ϵ .

(a) Tìm điện trường như là một hàm số của vị trí theo bán kính khi tụ điện được tích điện với điện tích Q . Bỏ qua các hiệu ứng mép.

(b) Tìm điện dung.

(c) Giả thiết rằng chất điện môi được kéo một phần ra ngoài tụ điện trong khi tụ điện được nối với một ắc quy có điện thế V . Tìm lực cần thiết để kéo chất điện môi đến vị trí này. Bỏ qua các trường điểm. Lực đó phải được đặt theo hướng nào?

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng điện tích trên một đơn vị chiều dài của dây dẫn bên trong là $-\lambda$ và sử dụng hệ tọa độ trụ (r, φ, z) , ta tìm được cường độ điện trường bên trong tụ điện bằng định lý Gauss như sau

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r = \frac{-Q}{2\pi\epsilon L r} \mathbf{e}_r.$$

(b) Hiệu điện thế giữa các tụ điện bên trong và bên ngoài là

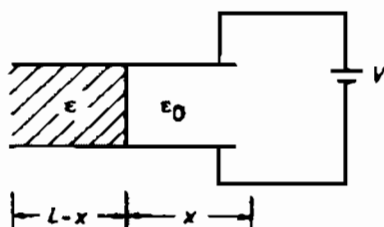
$$V = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}.$$

(c) Khi tụ điện được nối với một ắc quy, hiệu điện thế giữa vật dẫn bên trong và bên ngoài được giữ ở giá trị không đổi. Bây giờ giả sử chất điện môi được kéo ra khỏi tụ điện một đoạn có chiều dài x , sao cho chiều dài $L - x$ của nó còn lại bên trong tụ điện như được chỉ ra trên hình 1.24. Điện dung toàn phần của tụ điện trở thành

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\epsilon_0 x}{\ln(\frac{b}{a})} + \frac{2\pi\epsilon(L-x)}{\ln(\frac{b}{a})} \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0 L} + \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)x \right]. \end{aligned}$$



Hình 1.24

Việc kéo chất điện môi ra làm thay đổi năng lượng được lưu trữ trong tụ điện và như vậy cần tác dụng một lực lên vật liệu. Xét phương trình năng lượng

$$Fdx = VdQ - \frac{1}{2}V^2dC.$$

Vì V được giữ không đổi, $dQ = VdC$ và ta có

$$F = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln(b/a)} \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$$

Đây là lực tác dụng lên vật liệu. Vì $\epsilon > \epsilon_0$, $F < 0$. Do đó F sẽ có chiều hướng làm giảm x , nghĩa là F là lực hút. Do đó để đưa chất điện môi đến vị trí này phải sử dụng một lực có độ lớn F và có hướng đi ra khỏi tụ điện.

1054

Như thấy trên hình 2.15, bạn được cho một tụ điện có hai bản phẳng nhưng không thật song song.

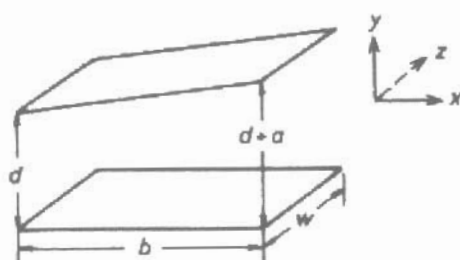
(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, khi một hiệu điện thế V được đặt trên hai bản tụ, hãy tìm điện thế ở một vị trí bất kỳ giữa hai bản cực.

(b) Khi tụ hình nêm này chứa đầy một môi trường có hằng số điện môi ϵ , hãy tính điện dung của hệ với những hằng số đã cho.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Bỏ qua các hiệu ứng rìa, bài tập này trở thành bài tập hai chiều. Lấy trục z vuông góc với mặt phẳng hình vẽ và hướng vào trong trang sách như



Hình 1.25

được chỉ ra trên hình 1.25. Điện trường sẽ song song với mặt phẳng xy và không phụ thuộc vào z .

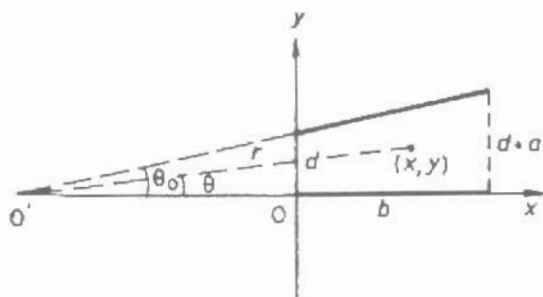
(b) Giả thiết rằng giao tuyến của các mặt phẳng của hai bản cực cắt trục x tại điểm O' , khi sử dụng hệ toạ độ như trên hình 1.26. Khi đó

$$\overline{OO'} = \frac{bd}{a}, \quad \theta_0 = \arctan \frac{a}{b},$$

trong đó θ_0 là góc giữa hai bản cực. Bây giờ ta sử dụng hệ toạ độ trụ (r, θ, z') với trục z' đi qua điểm O' và song song với trục z . Bất kì mặt phẳng nào qua trục z' đều là một mặt đẳng thế do tính đối xứng của bài tập. Do đó, điện thế bên trong tụ điện sẽ chỉ phụ thuộc vào θ

$$\varphi(r, \theta, z') = \varphi(\theta).$$

Điện thế φ thoả mãn phương trình Laplace



Hình 1.26

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = 0,$$

có nghiệm tổng quát là

$$\varphi(\theta) = A + B\theta.$$

Vì cả hai bản cực trên và dưới đều là các bề mặt đẳng thế nên các điều kiện biên sẽ là

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\theta_0) = V,$$

Từ đó suy ra $A = 0, B = V/\theta_0$. Đối với một điểm (x, y) bên trong tụ điện có thể tính được

$$\theta = \arctan \left[y / \left(x + \frac{bd}{a} \right) \right].$$

Do đó điện thế có thể viết như sau

$$\varphi(x, y) = \frac{V\theta}{\theta_0} = \frac{V \arctan \left[y / \left(x + \frac{bd}{a} \right) \right]}{\arctan \left(\frac{a}{b} \right)}.$$

(b) Giả sử Q là điện tích toàn phần ở bản cực dưới. Điện trường bên trong tụ điện là

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = -\frac{V}{\theta_0 r} \mathbf{e}_\theta.$$

Đối với một điểm $(x, 0)$ ở bản cực dưới, $\theta = 0, r = \frac{bd}{a} + x$ và $\mathbf{E}$ vuông góc với bản cực. Mật độ điện tích mặt σ trên bản cực dưới nhận được từ điều kiện biên đối với vectơ điện cảm

$$\sigma = \varepsilon E = -\frac{V\varepsilon}{\theta_0 \left(\frac{bd}{a} + x \right)}.$$

Lấy tích phân theo bề mặt bản cực dưới, ta có

$$Q = \int \sigma dS = -\int_0^w dz \int_0^b \frac{V\varepsilon}{\theta_0 \left(\frac{bd}{a} + x \right)} dx = -\frac{\varepsilon V w}{\arctan \frac{a}{b}} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right).$$

Do đó, điện dung của tụ điện sẽ là

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{\varepsilon w}{\arctan \frac{a}{b}} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right).$$

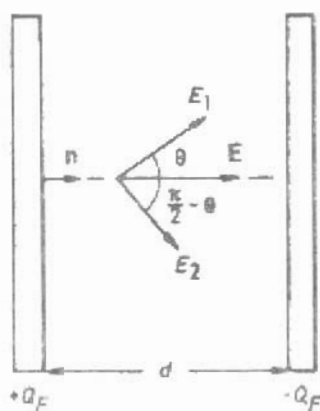
1055

Hai bản dẫn điện lớn, song song, mỗi bản có diện tích A , được đặt cách nhau một khoảng cách d . Một chất điện môi không đẳng hướng, nhưng đồng nhất lấp đầy không gian giữa hai bản đó. Tenxơ hằng số điện môi ϵ_{ij} liên hệ điện cảm $\mathbf{D}$ và điện trường $\mathbf{E}$ theo hệ thức $D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$. Các trục chính của tenxơ hằng số điện môi này là (xem H. 1.27): trục 1 (với giá trị riêng ϵ_1) nằm trong mặt phẳng của hình vẽ tạo với đường nằm ngang một góc θ , trục 2 (với giá trị riêng ϵ_2) nằm trong mặt phẳng hình vẽ tạo với đường nằm ngang một góc $\frac{\pi}{2} - \theta$. Trục 3 (với giá trị riêng ϵ_3) vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Giả thiết rằng các bản cực dẫn điện đủ lớn sao cho tất cả các hiệu ứng rìa là bỏ qua được.

(a) Các điện tích tự do $+Q_F$ và $-Q_F$ được phân bố đều trên hai bản cực dẫn điện trái và phải. Tìm các thành phần thẳng đứng và nằm ngang của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{D}$ trong chất điện môi.

(b) Hãy tính điện dung của hệ này qua A, d, ϵ_1 và θ .

(Columbia)



Hình 1.27

Lời giải:

(a) Lấy $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với bản cực trái. Vì $\mathbf{E} = 0$ bên trong các bản cực nên thành phần tiếp tuyến của điện trường bên trong chất điện môi cũng bằng 0 do tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{E}$. Do đó, cường độ điện trường bên trong chất điện môi sẽ được biểu diễn như sau

$$\mathbf{E} = E\mathbf{n}.$$

Phân tích $\mathbf{E}$ theo các trục chính, ta có

$$E_1 = E \cos \theta, \quad E_2 = E \sin \theta, \quad E_3 = 0.$$

Theo các trục tọa độ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ dựa trên các trục chính, tenxơ ε_{ij} là một ma trận chéo

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

và dọc theo các trục này vectơ điện cảm trong tụ điện có các thành phần

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 E \cos \theta, \quad D_2 = \varepsilon_2 E \sin \theta, \quad D_3 = 0. \quad (1)$$

Điều kiện biên của $\mathbf{D}$ trên bề mặt của bản cực bên trái cho

$$D_n = \sigma_f = Q_F/A.$$

Nghĩa là, thành phần vuông góc của vectơ điện cảm là không đổi. Như vậy

$$D_1 \cos \theta + D_2 \sin \theta = D_n = \frac{Q_F}{A}. \quad (2)$$

Kết hợp các phương trình (1) và (2), ta nhận được:

$$E = \frac{Q_F}{A(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta)}.$$

Do đó thành phần nằm ngang và vuông góc của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{D}$ là

$$E_n = E = \frac{Q_F}{A(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta)}, \quad E_t = 0,$$

$$D_n = \frac{Q_F}{A}, \quad D_t = D_1 \sin \theta - D_2 \cos \theta = \frac{Q_F(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta}{A(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta)},$$

trong đó chỉ số t biểu thị các thành phần tiếp tuyến với các bản cực.

(b) Hiệu điện thế giữa các bản cực trái và phải là

$$V = \int E_n dx = \frac{Q_F d}{A(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta)}.$$

Do đó điện dung của hệ là

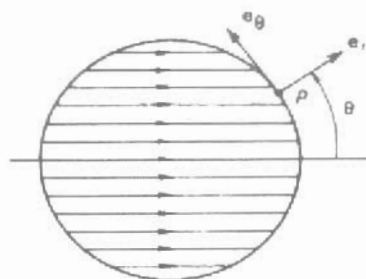
$$C = \frac{Q_F}{V} = \frac{A(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta)}{d}.$$

1056

Người ta chứng minh được rằng điện trường bên trong một quả cầu điện môi được đặt trong một tụ điện phẳng lớn là điện trường đều (độ lớn và hướng của $\mathbf{E}_0$ là không đổi). Nếu quả cầu đó có bán kính R và hằng số điện môi tương đối $K_e = \varepsilon/\varepsilon_0$, hãy tìm $\mathbf{E}$ tại điểm p trên mặt ngoài của quả cầu (dùng hệ tọa độ cực R, θ). Xác định mật độ điện tích liên kết mặt tại điểm p .

(Wisconsin)

Lời giải:



Hình 1.28

Điện trường bên trong quả cầu là một điện trường đều $\mathbf{E}_0$ như được chỉ ra trên hình 1.28. Điện trường tại điểm p ở mặt ngoài của quả cầu là $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_t \mathbf{e}_\theta$ khi dùng ở tọa độ cực. Tương tự $\mathbf{E}_0$ có thể biểu thị như sau

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Từ những điều kiện biên đối với các vectơ điện cảm và cường độ điện từ tại p , ta được

$$\varepsilon E_0 \cos \theta = \varepsilon_0 E_r, \quad -E_0 \sin \theta = E_t.$$

Do đó

$$\mathbf{E} = K_e E_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Mật độ điện tích liên kết mặt tại điểm p là $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r$, với $\mathbf{P}$ là vectơ phân cực. Vì $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}_0$, ta tìm được

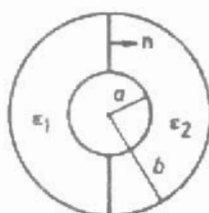
$$\sigma_p = (\epsilon - \epsilon_0)E_0 \cos \theta = \epsilon_0(K - 1)E_0 \cos \theta.$$

1057

Một nửa của vùng giữa các bản cực của một tụ điện cầu có bán kính trong và bán kính ngoài là a và b chứa đầy một chất điện môi đẳng hướng tuyến tính có hằng số điện môi ϵ_1 và nửa kia chứa đầy một chất điện môi đẳng hướng tuyến tính có hằng số điện môi ϵ_2 như được chỉ ra trên hình 1.29. Nếu bản cực bên trong có điện tích toàn phần Q và bản cực bên ngoài có điện tích toàn phần $-Q$, hãy tìm:

- các vectơ điện cảm $\mathbf{D}_1$ và $\mathbf{D}_2$ trong vùng của ϵ_1 và ϵ_2 ;
- các điện trường trong vùng của ϵ_1 và ϵ_2 ;
- điện dung toàn phần của hệ.

(SUNY, Buffalo)



Hình 1.29

Lời giải:

Ta lấy hướng pháp tuyến $\mathbf{n}$ tại mặt phân cách giữa các điện môi ϵ_1 và ϵ_2 là hướng chỉ từ 1 đến 2. Các điều kiện biên tại bề mặt này là

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Nếu chúng ta giả thiết rằng điện trường $\mathbf{E}$ vẫn có đối xứng cầu, tức là

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = A\mathbf{r}/r^3,$$

Khi đó các điều kiện biên trên vẫn sẽ được thoả mãn. Chọn mặt Gauss là một mặt cầu đồng tâm có bán kính r ($a < r < b$). Từ định lý Gauss

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

ta nhận được

$$2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)A = Q,$$

hay

$$A = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Tiếp theo ta tìm cường độ điện trường và điện cảm trong các vùng 1 và 2

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 &= \frac{Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}, \\ \mathbf{D}_1 &= \frac{\varepsilon_1 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}. \end{aligned}$$

Xét tụ điện bán cầu 1, ta có

$$V_{ab} = - \int_b^a \frac{A}{r^2} dr = \frac{A(b-a)}{ab}$$

và

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon_1 ab}{b-a}.$$

Đối với C_2 ta cũng nhận được biểu thức tương tự. Coi tụ điện như một bộ gồm hai tụ điện bán cầu mắc song song, ta nhận được điện dung toàn phần là

$$C = \frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ab}{b-a}.$$

1058

Hai mặt cầu kim loại đồng tâm có các bán kính a và b ($a < b$) được ngăn cách nhau bằng một môi trường có hằng số điện môi ε và độ dẫn điện σ . Tại thời điểm $t = 0$ một điện tích q bất ngờ được đặt vào mặt cầu bên trong.

(a) Hãy xác định dòng điện toàn phần chạy qua môi trường đó như một hàm của thời gian.

(b) Hãy tính nhiệt lượng Joule toả ra do dòng điện này và chứng minh rằng nó bằng với độ giảm năng lượng tĩnh điện xảy ra khi điện tích được sắp xếp lại.

(Chicago)

Lời giải:

(a) Tại $t = 0$, khi mặt cầu bên trong chứa điện tích q , cường độ điện trường bên trong môi trường là

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

và có hướng theo bán kính ra ngoài. Tại thời điểm t khi mặt cầu bên trong đang có điện tích $q(t)$, cường độ điện trường là

$$E(t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Theo định luật Ohm mật độ dòng $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Xét một mặt cầu đồng tâm có bán kính r bao quanh mặt cầu bên trong, theo định luật bảo toàn điện tích ta có

$$-\frac{d}{dt}q(t) = 4\pi r^2 j(t) = 4\pi r^2 \sigma E(t) = \frac{\sigma}{\epsilon} q(t).$$

Phương trình vi phân này có nghiệm là

$$q(t) = qe^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} E(t, r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}, \\ j(t, r) &= \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}. \end{aligned}$$

Dòng điện toàn phần chảy qua môi trường trên tại thời điểm t là

$$I(t) = 4\pi r^2 j(t, r) = \frac{\sigma q}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}.$$

(b) Nhiệt lượng Joule toả ra trên một đơn vị thể tích trên một đơn vị thời gian trong môi trường đó là

$$w(t, r) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{\sigma q^2}{(4\pi\epsilon)^2 r^4} e^{-\frac{2\sigma}{\epsilon}t},$$

và toàn bộ nhiệt lượng Joule được toả ra là

$$W = \int_0^{+\infty} dt \int_a^b dr \cdot 4\pi r^2 w(t, r) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Năng lượng tĩnh điện trong môi trường đó trước khi phóng điện là

$$W_0 = \int_a^b dr \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\epsilon E_0^2}{2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Do đó $W = W_0$.

1059

Một tụ điện bao gồm hai mặt cầu kim loại đồng tâm, mặt cầu bên trong có bán kính a và mặt cầu bên ngoài có bán kính d . Vùng $a < r < b$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi tương đối K_1 , vùng $b < r < c$ là chân không ($K = 1$) và vùng ngoài cùng $c < r < d$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi K_2 . Mặt cầu bên trong được tích điện đến điện thế V so với mặt cầu ngoài khi mặt cầu ngoài được nối đất ($V = 0$). Hãy tìm:

- (a) các điện tích tự do trên mặt cầu trong và mặt cầu ngoài.
- (b) điện trường như là hàm của khoảng cách r tính từ tâm đối với các vùng: $a < r < b$, $b < r < c$, $c < r < d$.
- (c) các điện tích phân cực tại $r = a$, $r = b$, $r = c$ và $r = d$.
- (d) điện dung của tụ điện này.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng mặt cầu bên trong chứa điện tích tự do toàn phần là Q . Lúc đó mặt cầu bên ngoài sẽ chứa điện tích tự do toàn phần là $-Q$ vì nó được nối đất.

(b) Dùng định luật Gauss và tính đối xứng cầu chúng ta tìm được các kết quả sau

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi K_1 \epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, \quad (a < r < b),$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r, \quad (b < r < c),$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 K_2 r^2} \mathbf{e}_r, \quad (c < r < d).$$

(c) Dùng các phương trình

$$\sigma_P = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2), \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 (K - 1) \mathbf{E},$$

Chúng ta tìm được các mật độ điện tích phân cực

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{1 - K_1}{K_1} \quad \text{tại } r = a.$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi b^2} \frac{K_1 - 1}{K_1} \quad \text{tại } r = b$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1 - K_2}{K_2} \quad \text{tại } r = c$$

$$\sigma_P = \frac{Q}{4\pi d^2} \frac{K_2 - 1}{K_2} \quad \text{tại } r = d.$$

(d) Điện thế là

$$V = - \int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{K_1} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \frac{1}{K_2} \right].$$

Do đó, điện tích ở mặt cầu bên trong là

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 K_1 K_2 abcdV}{K_1 ab(d - c) + K_1 K_2 ad(c - b) + K_2 cd(b - a)},$$

và điện dung là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 K_1 K_2 abcd}{K_1 ab(d - c) + K_1 K_2 ad(c - b) + K_2 cd(b - a)}.$$

1060

Thế tích giữa hai mặt cầu dẫn điện đồng tâm bán kính a và b ($a < b$) được lấp đầy bằng một chất điện môi không đồng nhất có hằng số điện môi

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{1 + Kr},$$

trong đó ε_0 và K là những hằng số và r là tọa độ bán kính. Như vậy $\mathbf{D}(r) = \varepsilon \mathbf{E}(r)$. Một điện tích Q được đặt vào mặt bên trong, trong khi mặt cầu ngoài được nối đất. Hãy tìm:

(a) điện cảm trong vùng $a < r < b$.

(b) điện dung của linh kiện.

(c) mật độ điện tích phân cực trong $a < r < b$.

(d) mật độ điện tích phân cực mặt tại $r = a$ và $r = b$.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Theo định luật Gauss và tính đối xứng cầu, ta có

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad (a < r < b).$$

(b) Cường độ điện trường là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + Kr) \mathbf{e}_r, \quad (a < r < b).$$

Do đó hiệu điện thế giữa mặt cầu bên trong và mặt cầu bên ngoài là

$$V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + K \ln \frac{b}{a} \right).$$

Khi đó điện dung của linh kiện là

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a) + abK \ln(b/a)}.$$

(c) Độ phân cực là

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = -\frac{QK}{4\pi r} \mathbf{e}_r.$$

Do đó mật độ điện tích phân cực khối tại $a < r < b$ được cho bởi

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{QKr}{4\pi} \right) = \frac{QK}{4\pi r^2}.$$

(d) Mật độ điện tích phân cực mặt tại $r = a, b$ là

$$\sigma_P = \frac{QK}{4\pi a} \quad \text{tại } r = a; \quad \sigma_P = -\frac{QK}{4\pi b} \quad \text{tại } r = b.$$

1061

Đối với trường hợp dòng điện dừng tuân theo định luật Ohm, hãy tìm điện trở giữa hai vật dẫn hình cầu đồng tâm bán kính $a < b$ chứa đầy một vật liệu có độ dẫn σ . Hãy nói rõ từng giả thiết.

(Wisconsin)

Lời giải:

Giả thiết rằng các vật dẫn và vật liệu trên là đồng nhất để cho toàn bộ điện tích Q chứa trên mặt cầu bên trong được phân bố đều trên bề mặt nó. Theo định luật Gauss và tính đối xứng cầu cho biểu thức sau

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r,$$

trong đó ϵ là hằng số điện môi của vật liệu. Từ định luật Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, ta có

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r.$$

Khi đó dòng điện toàn phần là

$$I = \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\epsilon} Q.$$

Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

suy ra điện trở

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

4. NHỮNG PHƯƠNG PHÁP TIÊU BIỂU ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TẬP TÍNH ĐIỆN - TÁCH BIẾN, PHƯƠNG PHÁP ẢNH, HÀM GREEN VÀ KHAI TRIỂN ĐA CỰC (1062-1095)

1062

Một quả cầu điện môi có bán kính a và hằng số điện môi ϵ_1 được đặt trong một chất lỏng điện môi có kích thước vô hạn và hằng số điện môi ϵ_2 . Một điện

trường đều E có ngay từ đầu trong chất lỏng đó. Hãy tìm điện trường tổng hợp ở bên trong và bên ngoài quả cầu.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

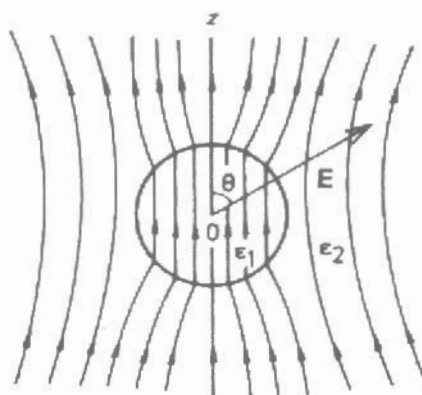
Lấy gốc tọa độ tại tâm của quả cầu và lấy hướng của điện trường ban đầu E làm trục cực z như trên hình 1.30. Giả sử điện thế tĩnh điện tại một điểm bên trong quả cầu là Φ_1 và tại một điểm ở ngoài quả cầu là Φ_2 . Do đối xứng, ta có thể viết Φ_1 và Φ_2 như sau

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

trong đó A_n, B_n, C_n, D_n những hằng số, và P_n là đa thức Legendre. Các điều kiện biên như sau:

(1) Φ_1 là hữu hạn tại $r = 0$.



Hình 1.30

(2) $\Phi_2|_{r \rightarrow \infty} = -Er \cos \theta = -Er P_1(\cos \theta)$.

(3) $\Phi_1 = \Phi_2|_{r=a}, \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}|_{r=a}$.

Từ các điều kiện (1) và (2) ta nhận được

$$B_n = 0, \quad C_1 = -E, \quad C_n = 0 \quad (n \neq 1).$$

Sau đó từ điều kiện (3) ta nhận được

$$\begin{aligned}
 -EaP_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{D_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) &= \sum_n A_n a^n P_n(\cos\theta), \\
 -\varepsilon_2 \left[EP_1(\cos\theta) + \sum_n (n+1) \frac{D_n}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta) \right] &= \varepsilon_1 \sum_n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta).
 \end{aligned}$$

Các phương trình này sẽ thoả mãn đối với mọi góc θ khả dĩ. Do đó, các hệ số của $P_n(\cos\theta)$ ở hai vế của mỗi phương trình trên phải bằng nhau đối với mọi giá trị n . Điều này cho

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E, \quad D_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} Ea^3, \quad A_n = D_n = 0, \quad (n \neq 1).$$

Do đó, điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu có thể biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} Er \cos\theta, \\
 \Phi_2 &= -\left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] Er \cos\theta,
 \end{aligned}$$

và điện trường bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= -\nabla\Phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \mathbf{E}, \quad (r < a), \\
 \mathbf{E}_2 &= -\nabla\Phi_2 = \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \left[\frac{3(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{E}}{r^3} \right], \quad (r > a).
 \end{aligned}$$

1063

Hãy xác định điện trường bên trong và bên ngoài một quả cầu bán kính R và hằng số điện môi ε được đặt trong một điện trường đều có độ lớn E_0 và hướng dọc theo trục z .

(Columbia)

Lời giải:

Sử dụng lời giải của bài tập 1062 ta có

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0, \quad (r < R), \\
 \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R^3 \left[\frac{3(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{E}_0}{r^3} \right], \quad (r > R).
 \end{aligned}$$

1064

Một quả cầu có hằng số điện môi ε được đặt trong một điện trường đều $\mathbf{E}_0$. Hãy chứng minh rằng mật độ điện tích mặt cảm ứng là

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

trong đó θ được đo từ hướng của $\mathbf{E}_0$. Nếu quả cầu được quay với tốc độ góc ω quanh hướng của $\mathbf{E}_0$ thì có sinh ra một từ trường không? Nếu không, hãy giải thích vì sao. Nếu có, hãy vẽ phác họa đường sức từ.

(Wisconsin)

Lời giải:

Theo lời giải của bài tập 1063 điện trường bên trong quả cầu là

$$\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0,$$

từ đây có thể tính được độ phân cực điện môi

$$\mathbf{p} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0.$$

Mật độ điện tích có trên bề mặt của quả cầu điện môi là

$$\sigma(\theta) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta.$$

với $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị tốc độ vuông góc với mặt cầu. Khi đó mômen toàn phần lưỡng cực điện sẽ là

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \mathbf{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 \mathbf{E}_0.$$

Lưu ý rằng $\mathbf{P}$ có hướng giống như $\mathbf{E}_0$. Khi quả cầu quay quanh hướng của $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{P}$ sẽ không thay đổi. Điều này có nghĩa là sự quay không sinh ra dòng phân cực và do đó không sinh ra từ trường.

1065

Một quả cầu dẫn điện lý tưởng được đặt trong một điện trường đều hướng theo trục z .

(a) Mật độ điện tích mặt trên mặt cầu là bao nhiêu?

(b) Mômen lưỡng cực cảm ứng của quả cầu là bao nhiêu?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Điều kiện biên trên bề mặt vật dẫn là

$$\Phi = \text{hằng số} = \Phi_s, \text{ tức là,}$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sigma,$$

trong đó Φ_s là thế năng của quả cầu dẫn điện và σ là mật độ điện tích mặt của nó. Do đối xứng, thế năng tại một điểm (r, θ, φ) trong hệ tọa độ cầu với gốc tọa độ ở tâm quả cầu là

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (1)$$

Giả sử E_0 là cường độ điện trường đều ban đầu. Khi $r \rightarrow \infty$

$$\Phi = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta).$$

Bằng cách làm bằng các hệ số của $P_n(\cos \theta)$ ở hai vế của phương trình (1) ta có

$$C_0 = 0, \quad C_1 = -E_0, \quad D_1 = E_0 a^3, \quad C_n = D_n = 0 \quad \text{với } n > 1.$$

Do đó

$$\Phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta, \quad (2)$$

trong đó a là bán kính của quả cầu. Điều kiện biên thứ hai và phương trình (2) cho

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

(b) Giả thiết rằng mômen lưỡng cực điện $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_z$ được đặt tại gốc tọa độ thay thế cho quả cầu. Điện thế tại r do lưỡng cực sinh ra là

$$\Phi_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

So sánh phương trình này với số hạng thứ hai của phương trình (2) thấy rằng số hạng này của phương trình (2) tương ứng với sự đóng góp của một lưỡng cực có mômen

$$\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0,$$

mà ta có thể coi như một mômen lưỡng cực cảm ứng của quả cầu.

1066

Mật độ điện tích mặt $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ được gắn lên bề mặt của một vỏ cầu có bán kính R (σ_0 là một hằng số và θ là góc cực). Cả bên trong và bên ngoài của vỏ cầu là chân không, không có điện tích. Hãy tính điện thế và điện trường ở cả bên trong và bên ngoài của vỏ cầu đó.

(Columbia)

Lời giải:

Gọi Φ_+ , Φ_- là điện thế tương ứng ở bên ngoài và bên trong vỏ cầu. Cả Φ_+ và Φ_- đều thoả mãn phương trình Laplace và do đối xứng trụ chúng có các biểu thức sau

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= \sum_{n=0} b_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad (r > R); \\ \Phi_- &= \sum_{n=0} a_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (r < R).\end{aligned}$$

Các điều kiện biên tại $r = R$ đối với điện thế và vectơ điện cảm là

$$\begin{aligned}\Phi_- &= \Phi_+, \\ \sigma(\theta) &= \sigma_0 P_1(\cos \theta) = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_-}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_+}{\partial r} \right).\end{aligned}$$

Thay vào các biểu thức trên của Φ_+ và Φ_- , rồi làm bằng các hệ số của $P_n(\cos \theta)$ ở hai vế của phương trình, ta nhận được

$$\begin{aligned}a_n &= b_n = 0 \quad \text{đối với } n \neq 1, \\ a_1 &= \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}, \quad b_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} R^3 \quad \text{đối với } n = 1.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta, \quad r > R, \\ \Phi_- &= \frac{\sigma_0 r}{3\epsilon_0} \cos \theta, \quad r < R.\end{aligned}$$

Từ hệ thức $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, ta nhận được

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ &= \frac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \quad r > R, \\ \mathbf{E}_- &= -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \mathbf{e}_z, \quad r < R.\end{aligned}$$

1067

Xét một quả cầu bán kính R tâm đặt ở gốc tọa độ O . Giả thiết rằng một điện tích điểm q được đặt tại O và rằng đây là điện tích duy nhất ở bên trong hoặc bên ngoài quả cầu. Hơn nữa, điện thế trên mặt của quả cầu là $\Phi = V_0 \cos\theta$. Hỏi điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu là bao nhiêu?

(Columbia)

Lời giải:

Điện thế được cho bởi phương trình Poisson hoặc phương trình Laplace

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi_- &= -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(r), \quad r < R; \\ \nabla^2 \Phi_+ &= 0, \quad r > R.\end{aligned}$$

Các nghiệm tổng quát hữu hạn trong các vùng tương ứng, có tính đến đối xứng là

$$\begin{aligned}\Phi_- &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \quad r < R, \\ \Phi_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad r > R.\end{aligned}$$

Từ điều kiện $\Phi_- = \Phi_+ = V_0 \cos\theta$ tại $r = R$ ta nhận được $A_0 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $A_1 = \frac{V_0}{R}$, $B_1 = V_0 R^2$, $B_0 = 0$, $A_n = B_n = 0$ đối với $n \neq 0, 1$, và do đó

$$\begin{aligned}\Phi_- &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{V_0 \cos\theta}{R} r, \quad r < R; \\ \Phi_+ &= \frac{V_0 R^2}{r^2} \cos\theta, \quad r > R.\end{aligned}$$

1068

Nếu điện thế của một vỏ cầu có chiều dày bằng 0 chỉ phụ thuộc vào góc cực θ và được cho bởi $V(\theta)$, bên trong và bên ngoài quả cầu là không gian rỗng.

(a) Hãy chỉ ra cách để nhận được biểu thức điện thế $V(r, \theta)$ ở bên trong và bên ngoài quả cầu? để nhận được biểu thức đối với các nguồn điện trên quả cầu?

(b) Giải ra với $V(\theta) = V_0 \cos^2 \theta$.

Một vài số hạng đầu tiên của đa thức Legendre là

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

Ta cũng có

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad \text{nếu } n \neq m$$

và

$$\int_0^\pi P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1}.$$

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Vì cả bên trong và bên ngoài vỏ cầu đều rỗng nên điện thế trong toàn bộ không gian thoả mãn phương trình Laplace. Như vậy điện thế bên trong quả cầu có dạng

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta),$$

trong khi điện thế bên ngoài quả cầu là

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Giả sử bán kính của vỏ cầu là R , ta có

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta).$$

Nhân cả hai vế với $P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ và tích phân từ 0 đến π ta nhận được

$$a_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Do đó

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] P_n(\cos \theta) r^n,$$

và một cách tương tự

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)R^{n+1}}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}.$$

Sự phân bố điện tích trên vỏ cầu được cho bởi điều kiện biên đối với vectơ điện cảm

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= \epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)^2}{2R} \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] P_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

(b) Từ

$$V(\theta) = V_0 \cos^2 \theta = \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta) + \frac{V_0}{3} P_0(\cos \theta),$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{2}{3} V_0, \quad \text{đối với } n=0; \\ \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{4}{15} V_0, \quad \text{đối với } n=2; \\ \int_0^\pi V(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= 0, \quad \text{đối với } n \neq 0, 2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{V_0}{3} + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta) \frac{r^2}{R^2}, \quad (r < R) \\ \Phi_2 &= \frac{V_0 R}{3r} + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta) \frac{R^3}{r^3}, \quad (r > R) \\ \sigma(\theta) &= \frac{\epsilon_0 V_0}{3R} [1 + 5P_2(\cos \theta)]. \end{aligned}$$

1069

Một quả cầu dẫn điện bán kính a mang một điện tích q được đặt trong điện trường đều E_0 . Tìm điện thế tại tất cả các điểm bên trong và bên ngoài quả cầu. Mômen lưỡng cực của điện tích cảm ứng trên quả cầu là bao nhiêu? Ba điện trường trong bài tập này làm xuất hiện sáu số hạng năng lượng. Hãy nhận biết sáu số hạng này, hãy nói rõ số hạng nào là hữu hạn hoặc bằng 0, số hạng nào là vô hạn hoặc không có giới hạn.

(Columbia)

Lời giải:

Trường ở trong bài tập này là chồng chập của ba trường: điện trường đều E_0 , trường lưỡng cực do các điện tích cảm ứng của quả cầu dẫn điện gây ra và một trường gây bởi điện tích q phân bố đồng đều trên khắp quả cầu dẫn điện.

Gọi Φ_1 và Φ_2 lần lượt là điện thế toàn phần ở bên trong và bên ngoài quả cầu. Khi đó ta có

$$\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_0,$$

trong đó Φ_0 là một hằng số. Các điều kiện biên là

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2, \quad \text{với } r = a, \\ \Phi_2 &= -E_0 r P_1(\cos \theta) \quad \text{với } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do tính đối xứng trụ, nghiệm của phương trình Laplace là

$$\Phi_2 = \sum_n \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Thay các điều kiện biên ở trên vào, ta tìm được

$$a_1 = -E_0, \quad b_0 = a\Phi_0, \quad b_1 = E_0 a^3,$$

Trong khi tất cả các hệ số khác bằng 0. Vì $\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{r=a}$, ta có

$$q = \int_0^\pi \left(3\epsilon_0 E_0 \cos \theta + \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{a} \right) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a \epsilon_0 \Phi_0,$$

hay

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a}.$$

Như vậy điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a}, \quad (r < a),$$

$$\Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta, \quad (r > a).$$

Trường ngoài quả cầu có thể coi như sự chồng chập của ba trường tạo nên điện thế Φ_2 có ba số hạng như thấy ở vế phải của biểu thức cuối cùng: một điện trường đều E_0 , một trường do điện tích q phân bố đều trên quả cầu và một trường lưỡng cực do các điện tích cảm ứng trên bề mặt của quả cầu gây ra. Số hạng cuối cùng có thể do một mômen lưỡng cực $P = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$ đặt tại tâm quả cầu gây ra.

Năng lượng của ba điện trường này có thể chia thành hai loại: năng lượng tĩnh điện sinh ra do từng trường riêng biệt và năng lượng tương tác giữa các trường. Mật độ năng lượng của trường ngoài E_0 là $\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$. Năng lượng toàn phần của nó $\int \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 dV$ là vô hạn, nghĩa là $W_1 \rightarrow \infty$, bởi vì E_0 mở rộng trong toàn bộ không gian.

Năng lượng tĩnh điện toàn phần của một quả cầu dẫn điện được cô lập có điện tích q là

$$W_2 = \int_a^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a},$$

ở đó tổng năng lượng này là hữu hạn.

Cường độ điện trường bên ngoài quả cầu do mômen lưỡng cực P gây ra là

$$\mathbf{E}_3 = -\nabla \left(\frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{2a^3 E_0 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{a^3 E_0 \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta.$$

Mật độ năng lượng tương ứng là

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_3^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{a^6 E_0^2}{r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{a^6 E_0^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Vì lưỡng cực không sinh ra một điện trường bên trong quả cầu nên năng lượng tĩnh điện toàn phần của P là

$$\begin{aligned} W_3 &= \int w_3 dV = \frac{\epsilon_0 a^6 E_0^2}{2} \int_a^\infty \frac{1}{r^4} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 (1 + 3 \cos^2 \theta) d \cos \theta \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{3} E_0^2, \end{aligned}$$

năng lượng này cũng hữu hạn. Đối với quả cầu dẫn điện có điện tích toàn phần là q , mật độ điện tích mặt của nó là $\sigma = q/4\pi a^2$. Khi đó năng lượng tương tác

giữa quả cầu và điện trường ngoài E_0 là

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int \sigma \cdot (-E_0 a \cos \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{qaE_0}{2} \int_0^\pi \cos \theta d \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Tương tự, năng lượng tương tác của quả cầu dẫn điện với trường của mômen lưỡng cực P là

$$W_{23} = \int_0^\pi \sigma \cdot \left(\frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \right) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 0.$$

Năng lượng tương tác giữa mômen lưỡng cực P và điện trường ngoài E_0 là

$$W_{13} = -\frac{1}{2} P \cdot E_0 = -2\pi \varepsilon_0 a^3 E_0^2.$$

Năng lượng này là hữu hạn. Sự xuất hiện của hệ số $\frac{1}{2}$ trong biểu thức là do thực tế, lưỡng cực P chỉ là một lưỡng cực tương đương được cảm ứng bởi điện trường ngoài E_0 .

1070

Một vỏ cầu dẫn điện bán kính R bị cắt đôi. Hai bán cầu được cách điện với nhau và đặt gần nhau như trên hình 1.31 sao cho khoảng cách giữa hai nửa này có thể bỏ qua được. Nửa trên được giữ ở điện thế $\phi = \phi_0$ và nửa dưới được giữ ở điện thế $\phi = 0$. Hãy tính điện thế ϕ tại tất cả các điểm trong không gian bên ngoài bề mặt của các vật dẫn. Bỏ qua những số hạng giảm nhanh hơn $1/r^4$, r là khoảng cách tính từ tâm vật dẫn (nghĩa là, giữ lại những số hạng cho tới bậc đó bao gồm cả những số hạng phụ thuộc $1/r^4$) mà r là khoảng cách tính từ tâm của vật dẫn. (Gợi ý: Bắt đầu với nghiệm của phương trình Laplace trong hệ tọa độ thích hợp. Điều kiện biên của bề mặt vật dẫn phải được khai triển theo chuỗi các đa thức Legendre

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

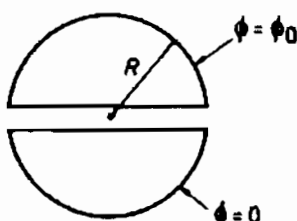
(Columbia)

Lời giải:

Dùng hệ tọa độ cầu (r, θ, ϕ) với gốc tọa độ tại tâm của quả cầu. Trục z được lấy vuông góc với đường cắt của hai bán cầu (xem hình 1.31). Thấy ngay rằng điện thế ϕ chỉ là một hàm của r và θ và thỏa mãn phương trình Laplace hai chiều sau đây

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (r \geq R).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là



Hình 1.31

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (r \geq R).$$

Chỉ giữ lại các thành phần đến $l = 3$ như yêu cầu của đề bài, ta có biểu thức gần đúng

$$\phi \approx \sum_{l=0}^3 \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Điều kiện biên tại $r = R$ là

$$\phi|_{r=R} = f(\theta) = \begin{cases} \phi_0, & \text{với } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{với } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Khai triển $f(\theta)$ như một chuỗi các đa thức Legendre, nhưng chỉ giữ lại các số hạng cho tới $l = 3$, ta có

$$f(\theta) \approx \sum_{l=0}^3 B_l P_l(\cos \theta)$$

Dùng tính trực giao của các đa thức Legendre ta tìm được

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{(2l+1)\phi_0}{2} \int_0^1 P_l(x) dx. \end{aligned}$$

Lấy tích phân của một vài số hạng đầu tiên của đa thức Legendre như đã cho, ta nhận được

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_0(x)dx &= \int_0^1 dx = 1, \\ \int_0^1 P_2(x)dx &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 P_2(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = 0, \\ \int_0^1 P_3(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)dx = -\frac{1}{8},\end{aligned}$$

Thay các giá trị này vào biểu thức trên sẽ cho

$$B_0 = \frac{1}{2}\phi_0, \quad B_1 = \frac{3}{4}\phi_0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{7}{16}\phi_0.$$

Từ

$$\phi|_{r=R} \approx \sum_{l=0}^3 \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l = \sum_{l=0}^3 B_l P_l,$$

Ta nhận được

$$A_l = R^{l+1} B_l.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\phi \approx \sum_{l=0}^3 B_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) &= \phi_0 \left\{ \frac{R}{2r} + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{32} \left(\frac{R}{r}\right)^4 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta \right\}.\end{aligned}$$

1071

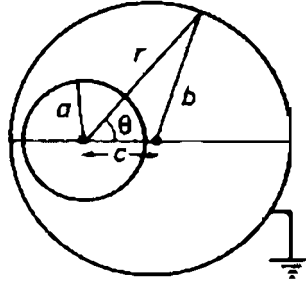
Trên hình 1.32, mặt cầu dẫn điện bên trong, bán kính a chứa điện tích Q , và mặt cầu bên ngoài bán kính b được nối đất. Khoảng cách giữa các tâm của chúng là c và là một đại lượng nhỏ.

(a) Chứng minh rằng trong phép gần đúng tới bậc nhất của c , phương trình mô tả mặt cầu bên ngoài khi dùng tâm của quả cầu bên trong là m gốc tọa độ sẽ là

$$r(\theta) = b + c \cos \theta.$$

(b) Nếu điện thế giữa hai mặt cầu chỉ chứa các thành phần góc $l = 0$ và $l = 1$. Hãy xác định điện thế này tới bậc nhất của c .

(Wisconsin)



Hình 1.32

Lời giải:

(a) Áp dụng định lý cosin đối với tam giác của hình 1.32 ta có phương trình tới bậc nhất của c

$$b^2 = c^2 + r^2 - 2cr \cos \theta \simeq r^2 - 2cr \cos \theta,$$

hay

$$r \approx \frac{1}{2} \left(2c \cos \theta + \sqrt{4c^2 \cos^2 \theta + 4b^2} \right) \approx b + c \cos \theta.$$

(b) Sử dụng phương trình Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ và sự đối xứng trục, ta có thể biểu thị điện thế tại một điểm giữa hai quả cầu dưới dạng

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Sau đó chỉ giữ lại các thành phần góc $l = 0, 1$, ta có

$$\Phi = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta.$$

Vì mặt của vật dẫn bên trong là một mặt đẳng thế, nên đối với $r = a$, Φ không phụ thuộc vào θ . Do đó

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0. \quad (1)$$

Mật độ điện tích trên bề mặt của quả cầu bên trong là

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a}$$

và ta có

$$\int_0^\pi \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = Q.$$

Phương trình này cho

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Vì quả cầu bên ngoài được nối đất, nên $\Phi = 0$ đối với $r \approx b + c \cos \theta$. Điều này dẫn đến

$$A_0 + \frac{B_0}{b + c \cos \theta} + \left[A_1(b + c \cos \theta) + \frac{B_1}{(b + c \cos \theta)^2} \right] \cos \theta = 0. \quad (3)$$

Để giữ lại các số hạng bậc nhất của c , ta dùng các công thức gần đúng

$$(b + c \cos \theta)^{-1} = b^{-1} \left(1 + \frac{c}{b} \cos \theta \right)^{-1} \approx \frac{1}{b} \left(1 - \frac{c}{b} \cos \theta \right),$$

$$(b + c \cos \theta)^{-2} = b^{-2} \left(1 + \frac{c}{b} \cos \theta \right)^{-2} \approx \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{2c}{b} \cos \theta \right).$$

Thay thế những biểu thức này vào phương trình (3), bỏ qua $c \cos^2 \theta$ và các số hạng bậc cao hơn, ta có

$$A_0 + \frac{B_0}{b} + \left(-\frac{B_0 c}{b^2} + A_1 b + \frac{B_1}{b^2} \right) \cos \theta \approx 0, \quad (4)$$

Vì (4) đúng với bất kì giá trị nào của θ , ta cần có

$$A_0 + \frac{B_0}{b} = 0,$$

$$-\frac{B_0 c}{b^2} + A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = 0.$$

Dùng hai phương trình trên cùng với (1) và (2), ta tìm được

$$A_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b},$$

$$A_1 = \frac{Qc}{4\pi\varepsilon_0(b^3 - a^3)}, \quad B_1 = -\frac{Qca^3}{4\pi\varepsilon_0(b^3 - a^3)}.$$

Do đó điện thế giữa hai mặt cầu là

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{cr}{b^3 - a^3} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \right\}.$$

1072

Lấy một hình trụ rất dài có bán kính r chế tạo bằng vật liệu cách điện. Phun một lớp mây electron lên bề mặt hình trụ. Chúng chuyển động tự do quanh bề mặt đó sao cho, ban đầu, chúng trải ra đồng đều với điện tích trên một đơn vị diện tích là σ_0 . Sau đó đặt hình trụ vào trong một điện trường đều vuông góc với trục của hình trụ. Xét mật độ điện tích trên bề mặt của hình trụ, $\sigma(\theta)$, như một hàm của điện trường ngoài E_a . Trong khi làm việc này bạn có thể bỏ qua độ phân cực điện của hình trụ cách điện.

(a) Bài toán này khác ở phương diện nào so với một bài toán tĩnh điện chuẩn, trong đó chúng ta có một hình trụ dẫn điện tích điện? Khi nào nghiệm của hai bài toán đó là như nhau?

(b) Hãy tính $\sigma(\theta)$ trong trường hợp của một hình trụ dẫn điện và nêu phạm vi các giá trị của E_a mà nghiệm này áp dụng được cho trường hợp mô tả ở đây.

(Chicago)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ (ρ, θ, z) với trục z dọc theo trục hình trụ và hướng của điện trường ngoài cho bởi $\theta = 0$. Gọi điện thế bên trong và bên ngoài lần lượt là φ_I và φ_{II} . Vì giả thiết hình trụ rất dài nên φ_I và φ_{II} không phụ thuộc vào z . Khi không có điện tích bên trong và bên ngoài hình trụ, dùng phương trình Laplace $\nabla^2 \varphi_I = \nabla^2 \varphi_{II} = 0$, với các điều kiện biên là

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{II}|_{\rho=r}, & \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial \theta} \right) &= \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\rho=r}, \\ \varphi_I|_{\rho \rightarrow 0} &\text{ là hữu hạn,} \\ \varphi_{II}|_{\rho \rightarrow \infty} &\rightarrow -E_a \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng hai điều kiện đầu tiên có được từ tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của vectơ cường độ điện trường. Thêm nữa, vì các electron tự do chuyển động quanh bề mặt hình trụ, $E_\theta = 0$ trên bề mặt tại trạng thái cân bằng. Vì

không chứa z , nên có thể tìm nghiệm dưới dạng

$$\varphi_I = A_1 + B_1 \ln \rho + C_1 \rho \cos \theta + \frac{D_1}{\rho} \cos \theta,$$

$$\varphi_{II} = A_2 + B_2 \ln \rho + C_2 \rho \cos \theta + \frac{D_2}{\rho} \cos \theta.$$

Khi đó, các điều kiện biên trên đòi hỏi cần thỏa mãn

$$B_1 = D_1 = 0, \quad C_2 = -E_a,$$

và

$$A_1 + C_1 r \cos \theta = A_2 + B_2 \ln r - E_a r \cos \theta + \frac{D_2}{r} \cos \theta,$$

$$-C_1 \sin \theta = E_a \sin \theta - \frac{D_2}{r^2} \sin \theta = 0.$$

Phương trình cuối cùng cho giá trị

$$C_1 = 0, \quad D_2 = E_a r^2.$$

Áp dụng định luật Gauss đối với đơn vị chiều dài của hình trụ

$$\oint \mathbf{E}_{II} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

tức là

$$-\frac{B_2}{r} \cdot 2\pi r = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 \cdot 2\pi r,$$

ta nhận được

$$B_2 = -\frac{\sigma_0 r}{\epsilon_0}.$$

Bỏ qua bất kì điện thế không đổi nào, ta lấy $A_2 = 0$. Khi đó

$$A_1 = B_2 \ln r = -\frac{\sigma_0 a \ln r}{\epsilon_0}.$$

Cuối cùng, ta tìm được những biểu thức sau

$$\varphi_I = -\frac{\sigma_0 r \ln r}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_I = 0,$$

$$\varphi_{II} = -\frac{\sigma_0 r \ln \rho}{\epsilon_0} - E_a \rho \cos \theta + \frac{E_a r^2}{\rho} \cos \theta,$$

$$\mathbf{E}_{II} = \left(\frac{\sigma_0 r}{\epsilon_0 \rho} + E_a \cos \theta + \frac{E_a r^2}{\rho^2} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\rho$$

$$- E_a \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta.$$

$$\rho(\theta) = D_{II\rho}|_{\rho=r} = \sigma_0 + 2\epsilon_0 E_a \cos \theta.$$

(a) Sự khác nhau giữa trường hợp này và trường hợp của vật dẫn điện hình trụ là: đối với vật dẫn điện hình trụ, $\sigma(\theta)$ có thể dương hoặc âm, còn trong trường hợp này $\sigma(\theta) \leq 0$. Tuy nhiên, khi $|E_a| < |\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}|$ thì hai bài tập có nghiệm giống nhau.

(b) Đối với trường hợp của một hình trụ dẫn điện trường tĩnh điện phải thoả mãn những điều sau:

(1) Bên trong vật dẫn $E_I = 0$ và φ_I là một hằng số.

(2) Bên ngoài vật dẫn:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{II} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \theta} \right)_{\rho=r} &= 0, \quad \varphi_{II}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow -E_a \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

Nghiệm đối với φ_{II} giống như trước. Để lời giải của vật dẫn trên trùng với trường hợp của một hình trụ cách điện, điều kiện cần thiết là $|E_a| \leq |\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}|$, điều kiện này đảm bảo rằng mật độ điện tích mặt trên hình trụ là âm ở khắp mọi nơi.

1073

Hai lá nhôm nối đất, phẳng, có chiều dài bán vô hạn, tạo thành một góc 60° . Một điện tích điểm đơn lẻ $+q$ được đặt như trên hình 1.33. Hãy vẽ một hình lớn chỉ ra rõ ràng vị trí, giá trị của tất cả các điện tích ảnh. Hãy giải thích lập luận của bạn bằng hai hoặc ba câu.

(Wisconsin)

Lời giải:

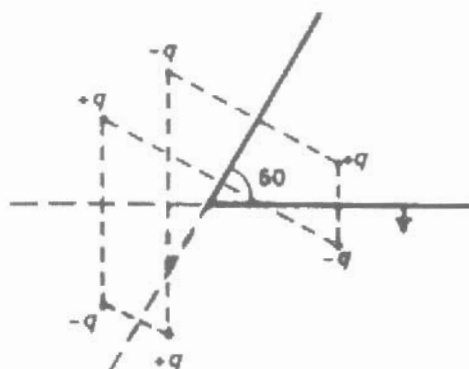
Như thấy trong hình 1.33, vì các mặt phẳng được nối đất nên các điện tích ảnh được phân bố một cách đối xứng ở hai phía của từng mặt phẳng.

1074

Một điện tích đặt trước một mặt phẳng kim loại:

(a) Nó bị mặt phẳng đẩy ra.

(b) Nó không biết có mặt phẳng ở đó.



Hình 1.33

(c) Nó bị hút vào mặt phẳng bởi ảnh gương là điện tích bằng về độ lớn và trái dấu.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

1075

Điện thế tại một khoảng cách r tính từ trục của một sợi dây dẫn thẳng vô hạn có bán kính a mang một điện tích trên một đơn vị chiều dài σ là

$$\frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{const.}$$

Sợi dây này được đặt cách một mặt phẳng kim loại vô hạn một khoảng $b \gg a$, điện thế của mặt phẳng được giữ bằng 0. Hãy tìm điện dung trên một đơn vị chiều dài của sợi dây trong hệ này.

(Wisconsin)

Lời giải:

Trong một hệ mà điện thế của mặt phẳng kim loại được giữ bằng 0, ta tưởng tượng một sợi dây thẳng vô hạn với mật độ điện tích dài $-\sigma$ được đặt đối xứng trên phía kia của mặt phẳng. Khi đó điện dung giữa sợi dây ban đầu và mặt phẳng kim loại là điện dung giữa hai sợi dây thẳng nằm cách nhau một khoảng cách $2b$.

Khi đó điện thế $\varphi(r)$ tại một điểm giữa hai sợi dây cách sợi dây ban đầu một khoảng cách r (và cách sợi dây ảnh một khoảng cách $2b - r$) là

$$\varphi(r) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{1}{2b - r}.$$

Do đó hiệu điện thế giữa hai sợi dây là

$$V = \varphi(a) - \varphi(2b - a) = \frac{\sigma}{\pi} \ln \left(\frac{2b - a}{a} \right) \approx \frac{\sigma}{\pi} \ln \frac{2b}{a}.$$

Vậy điện dung của hệ này trên một đơn vị chiều dài của sợi dây là

$$C = \frac{\sigma}{V} = \pi / \ln \frac{2b}{a}.$$

1076

Một điện tích $q = 2 \mu\text{C}$ được đặt cách một tấm kim loại dẫn điện, phẳng vô hạn, nối đất một khoảng $a = 10 \text{ cm}$. Hãy tìm:

(a) điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm phẳng đó,

(b) lực tác dụng lên điện tích q ,

(c) công toàn phần cần thiết để dịch chuyển từ từ điện tích đó đến vô cực so với tấm phẳng.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Phương pháp ảnh đòi hỏi rằng điện tích ảnh $-q$ được đặt đối xứng với $-q$ qua tấm phẳng. Điều này có nghĩa là điện tích cảm ứng toàn phần trên bề mặt của vật dẫn là $-q$.

(b) Lực tác dụng lên điện tích $+q$ là

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{0,2^2} = 0,9 \text{ N},$$

ở đây ta đã sử dụng $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$.

(c) Công toàn phần cần thiết để dịch chuyển điện tích đó một cách từ từ đến vô cực là

$$W = \int_a^\infty F dr = \int_a^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2} dr = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a} = 0,09 \text{ J}.$$

1077

Các điện tích $+q, -q$ đặt tại các điểm $(x, y, z) = (a, 0, a), (-a, 0, a)$ ở bên trên một mặt phẳng dẫn điện được nối đất nằm tại $z = 0$. Hãy tìm:

- (a) lực toàn phần tác dụng lên điện tích $+q$,
- (b) công thức hiện chống lại các lực tĩnh điện để lắp đặt hệ điện tích này,
- (c) mật độ điện tích mặt tại điểm $(a, 0, 0)$.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Phương pháp ảnh yêu cầu các điện tích ảnh $+q$ đặt tại $(-a, 0, -a)$ và $-q$ đặt tại $(a, 0, -a)$ (xem H. 1.34). Như vậy lực tổng hợp tác dụng lên $+q$ tại $(a, 0, a)$ là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(2a)^2} \mathbf{e}_x - \frac{1}{(2a)^2} \mathbf{e}_z + \frac{1}{(2\sqrt{2}a)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z \right) \right] \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_x + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_z \right]. \end{aligned}$$

Lực này có độ lớn

$$F = \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{32\pi\epsilon_0 a^2}.$$

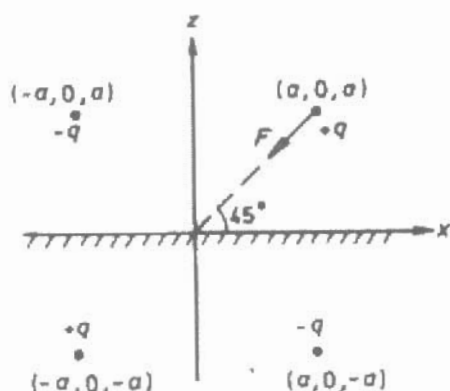
Lực này nằm trong mặt phẳng xz và hướng tới gốc tọa độ theo hướng tạo với trục x một góc 45° như thấy trên hình 1.34.

(b) Chúng ta có thể dựng lại hệ bằng cách đưa từ từ các điện tích $+q$ và $-q$ từ vô hạn theo các đường đi đối xứng tới các điểm $(a, 0, a)$ và $(-a, 0, a)$ tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} L_1 : z = x, y = 0, \\ L_2 : z = -x, y = 0, \end{aligned}$$

Khi các điện tích ở tại $(l, 0, l)$ trên đường L_1 và tại $(-l, 0, l)$ trên đường L_2 thì từng điện tích chịu tác dụng một lực $\frac{(\sqrt{2}-1)q^2}{32\pi\epsilon_0 l^2}$ có hướng song song với hướng của đường đi sao cho công toàn phần thực hiện bởi các ngoại lực là

$$W = -2 \int_a^\infty F dl = 2 \int_a^\infty \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{32\pi\epsilon_0 l^2} dl = \frac{(\sqrt{2} - 1)q^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$



Hình 1.34

(c) Xét điện trường tại điểm $(a, 0, 0^+)$ ở ngay bên trên mặt phẳng dẫn điện. Cường độ điện trường tổng hợp $\mathbf{E}_1$ sinh ra do $+q$ tại $(a, 0, a)$ và $-q$ tại $(a, 0, -a)$ là

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \mathbf{e}_z.$$

Điện trường tổng hợp $\mathbf{E}_2$ sinh ra bởi $-q$ tại $(-a, 0, a)$ và $+q$ tại $(-a, 0, -a)$ là

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{5\sqrt{5}} \mathbf{e}_z.$$

Do đó, điện trường toàn phần tại $(a, 0, 0^+)$ là

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1 \right) \mathbf{e}_z,$$

và mật độ điện tích mặt tại điểm này là

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1 \right).$$

Giả thiết rằng vùng $z > 0$ trong không gian 3 chiều chứa đầy một vật liệu điện môi tuyến tính đặc trưng bởi hằng số điện môi ϵ_1 , trong khi vùng $z < 0$ có

một vật liệu điện môi ε_2 . Giữ cố định một điện tích $-q$ tại $(x, y, z) = (0, 0, a)$ và một điện tích q tại $(0, 0, -a)$. Người ta phải tác dụng một lực như thế nào lên điện tích âm để giữ nó đứng yên?

(Columbia)

Lời giải:

Đầu tiên hãy xét trường hợp đơn giản khi một điện tích điểm q_1 được đặt tại $(0, 0, a)$. Phương pháp ảnh yêu cầu có các điện tích ảnh q'_1 tại $(0, 0, -a)$ và q''_1 tại $(0, 0, a)$. Khi đó điện thế (trong đơn vị Gauss) tại một điểm (x, y, z) là

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'_1}{\varepsilon_1 r_2}, \quad (z \geq 0), \quad \varphi_2 = \frac{q''_1}{\varepsilon_2 r_1}, \quad (z < 0),$$

trong đó

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}.$$

Áp dụng các điều kiện biên tại $(x, y, 0)$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

ta nhận được

$$q'_1 = q''_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_1.$$

Tương tự, nếu một điện tích điểm q_2 được đặt tại $(0, 0, -a)$ bên trong chất điện môi ε_2 , các điện tích ảnh của nó sẽ là q'_2 tại $(0, 0, a)$ và q''_2 tại $(0, 0, -a)$ với các độ lớn

$$q'_2 = q''_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q_2.$$

Khi cả hai q_1 và q_2 cùng tồn tại, lực trên q_1 sẽ là lực tổng hợp từ q_2 , q'_1 và q''_1 . Suy ra

$$\begin{aligned} F &= \frac{q_1 q'_1}{4a^2 \varepsilon_1} + \frac{q_1 q_2}{4a^2 \varepsilon_2} + \frac{q_1 q''_1}{4a^2 \varepsilon_2} \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2}. \end{aligned}$$

Trong bài tập đang xét $q_1 = -q$, $q_2 = +q$, và thay vào biểu thức của F ta được

$$F = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q^2}{4a^2} - \frac{q^2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2} = -\frac{q^2}{4\varepsilon_1 a^2}.$$

Do đó, lực $-F$ là lực cần thiết để giữ $-q$ đứng yên.

1079

Khi một đám mây bay qua một điểm nào đó trên mặt đất, một điện trường hướng thẳng đứng $E = 100 \text{ V/m}$ được ghi lại ở chỗ này. Đáy của đám mây có chiều cao $d = 300 \text{ m}$ tính từ mặt đất và đỉnh của đám mây có chiều cao $d = 300 \text{ m}$ tính từ đáy của nó. Giả sử đám mây trung hoà về điện nhưng có sự phân bố điện tích: một điện tích $+q$ ở đỉnh của nó và một điện tích $-q$ ở đáy của nó. Hãy ước lượng độ lớn của điện tích $+q$ và lực điện từ bên ngoài (hướng và độ lớn) tác dụng lên đám mây. Có thể giả thiết rằng không có các điện tích khác ở trong khí quyển ngoài các điện tích trên đám mây.

(Wisconsin)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Vị trí của các điện tích ảnh được chỉ ra trên hình 1.35. Khi đó cường độ điện trường tại điểm 0 trên mặt đất là

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} - 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2d)^2},$$

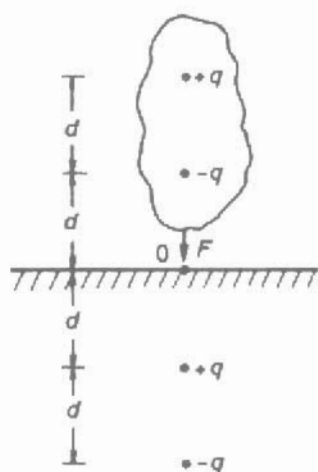
Từ đây ta nhận được

$$q = \frac{8\pi\epsilon_0 d^2 E}{3} = 6,7 \times 10^{-4} \text{ C}.$$

Lực bên ngoài tác dụng lên đám mây là lực tĩnh điện giữa các điện tích ảnh và các điện tích ở trong đám mây, nghĩa là

$$\begin{aligned} F &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} \right] \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right] = -4,05 \times 10^{-3} \text{ N}. \end{aligned}$$

Như có thể thấy trên hình 1.35, lực này là lực hút.



Hình 1.35

1080

Một điện tích điểm q được đặt tại vectơ bán kính s hướng từ tâm của một quả cầu có bán kính a dẫn điện lý tưởng được nối đất.

(a) Nếu vùng bên ngoài quả cầu (ngoại trừ q) là chân không, hãy tính điện thế tại một điểm r bất kì bên ngoài quả cầu. Như thường lệ, lấy điện thế nối đất bằng 0.

(b) Lập lại câu (a) nếu chân không được thay bằng một môi trường điện môi có hằng số điện môi ϵ .

(CUSPEA)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh.

(a) Như thấy trên hình 1.36, điện tích ảnh q' được đặt trên đường thẳng oq với khoảng cách s' tính từ tâm quả cầu. Lấy $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{\mathbf{s}'}{s'}$, điện thế tại r là

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|r\mathbf{n} - s\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|r\mathbf{n} - s'\mathbf{n}'|} \right].\end{aligned}$$

Điều kiện biên yêu cầu phải thoả mãn $\phi(r=a) = 0$. Điều này có thể đạt được nếu

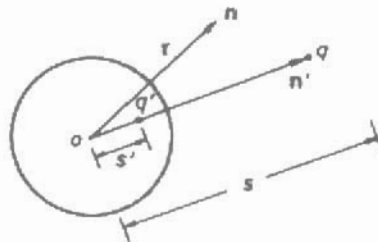
$$q' = -\frac{a}{s}q, \quad s' = \frac{a^2}{s}.$$

Khi đó, định lý về tính duy nhất của bài toán tĩnh điện cho điện thế tại một điểm bên ngoài quả cầu là

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} - \frac{a/s}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{s^2}\mathbf{s}|} \right].$$

(b) Khi bên ngoài quả cầu được chứa đầy một môi trường điện môi có hằng số điện môi ϵ , ta có thể thay một cách đơn giản ϵ_0 trong (a) bằng ϵ . Như vậy

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} - \frac{a/s}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{s^2}\mathbf{s}|} \right].$$



Hình 1.36

1081

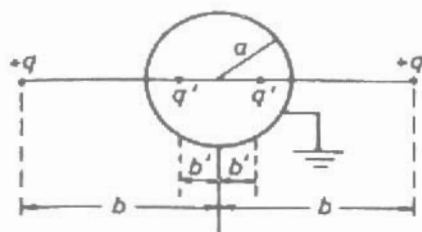
Hai điện tích giống nhau được đặt cách xa nhau một khoảng cách $2b$. Hãy tìm gần đúng bán kính tối thiểu a của một quả cầu dẫn điện được nối đất đặt giữa hai điện tích trên sao cho triệt tiêu được lực đẩy lẫn nhau của chúng.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Điện trường bên ngoài của quả cầu tương ứng với điện trường tổng hợp uính từ hai điện tích $+q$ đã cho và từ

hai điện tích ảnh q' . Các điện tích ảnh đều là $q' = -q\frac{a}{b}$ và chúng được đặt ở hai phía của tâm quả cầu, cách tâm quả cầu cùng một khoảng cách là $b' = \frac{a^2}{b}$ (xem H. 1.37).



Hình 1.37

Đối với mỗi điện tích $+q$ đã cho, ngoài lực đẩy tĩnh điện của điện tích $+q$ đã cho, còn có lực hút sinh ra do các điện tích ảnh. Để triệt tiêu lực tổng hợp, ta cần

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{4b^2} &= \frac{q^2 \frac{a}{b}}{(b - \frac{a^2}{b})^2} + \frac{q^2 \frac{a}{b}}{(b + \frac{a^2}{b})^2} \\ &- \frac{2q^2 a}{b^3} \left[1 + 3\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 5\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \dots \right] \approx \frac{2q^2 a}{b^3}, \end{aligned}$$

Do đó, giá trị gần đúng của a ($a < b$) làm thoả mãn các yêu cầu của bài toán gần đúng bằng

$$a \approx \frac{b}{8}.$$

1082

(a) Hai điện tích bằng nhau $+Q$ được đặt cách nhau một khoảng cách là $2d$. Một quả cầu dẫn điện nối đất được đặt giữa chúng. Bán kính của quả cầu phải là bao nhiêu để hai điện tích này sinh ra một lực tổng hợp bằng 0?

(b) Lực tác dụng lên từng điện tích là bao nhiêu nếu như quả cầu đó có bán kính giống như đã được xác định ở phần (a) bây giờ được tích điện đến điện thế V ?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Theo bài tập 1081 ta có $r_0 \approx d/8$.

(b) Khi quả cầu được tích điện đến điện thế V , điện thế bên ngoài quả cầu sẽ tăng một cách tương ứng

$$\phi = \frac{Vr_0}{r} \approx \frac{Vd}{8r},$$

trong đó r là khoảng cách giữa điểm điện trường và tâm của quả cầu. Một điện trường phụ được hình thành có giá trị là

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Vd}{8r^2}\mathbf{e}_r.$$

Do đó, lực tác dụng lên từng điện tích $+Q$ là

$$F = QE = \frac{QV}{8d}.$$

Hướng của lực đi ra xa quả cầu và nằm dọc theo đường thẳng nối điện tích với tâm quả cầu.

1083

Một điện tích q được đặt bên trong một vật dẫn hình vỏ cầu có bán kính trong r_1 và bán kính ngoài r_2 . Hãy tìm lực điện tác dụng lên điện tích đó. Nếu vật dẫn được cách điện và không tích điện thì điện thế của bề mặt bên trong của nó là bao nhiêu?

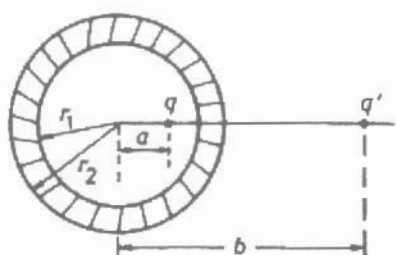
(Wisconsin)

Lời giải:

Áp dụng phương pháp ảnh và gọi khoảng cách giữa q và tâm của vỏ cầu là a . Khi đó điện tích ảnh $q' = -\frac{r_1}{a}q$ được đặt tại $b = \frac{r_1^2}{a}$ (xem H. 1.38). Có thể nói rằng vì vật dẫn được cách điện và không tích điện nên nó là một vật đẳng thế với điện thế $\varphi = \varphi_0$. Khi đó điện trường bên trong vỏ cầu ($r < r_1$) bằng với điện trường do q và q' tạo ra.

Lực tác dụng lên điện tích q là lực tác dụng bởi q'

$$\begin{aligned} F &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(b-a)^2} = -\frac{\frac{r_1}{a}q^2}{4\pi\epsilon_0(\frac{r_1^2}{a}-a)^2} \\ &= -\frac{ar_1q^2}{4\pi\epsilon_0(r_1^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$



Hình 1.38

Trong vùng $r > r_2$ điện thế là $\varphi_{\text{out}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Đặc biệt, điện thế của quả cầu dẫn điện tại $r = r_2$ là

$$\varphi_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

Vì vật dẫn là một vật đẳng thế, nên điện thế của mặt trong của vỏ cầu dẫn điện cũng là $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.

1084

Xét một lưỡng cực điện $\mathbf{P}$. Giả thiết rằng lưỡng cực đó được giữ cố định tại điểm có tọa độ z_0 trên trục z và có hướng lập một góc θ trục đó (nghĩa là $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z = |\mathbf{P}| \cos \theta$). Giả thiết rằng mặt phẳng xy là một vật dẫn có điện thế bằng 0. Hãy tìm mật độ điện tích trên vật dẫn được cảm ứng từ lưỡng cực điện đó.

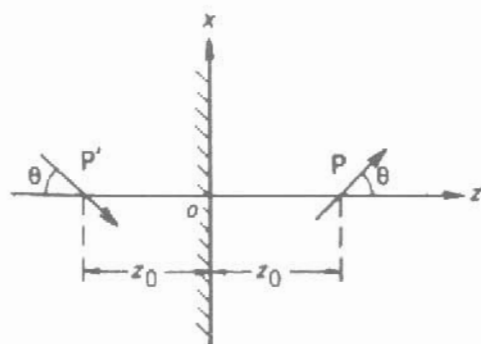
(Columbia)

Lời giải:

Như thấy trên hình 1.39, lưỡng cực là $\mathbf{P} = P(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ và lưỡng cực ảnh của nó là $\mathbf{P}' = P(-\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Trong vùng $z > 0$ điện thế tại một điểm $\mathbf{r} = (x, y, z)$ là

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{P[x \sin \theta + (z - z_0) \cos \theta]}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} + \frac{P[-x \sin \theta + (z + z_0) \cos \theta]}{[x^2 + y^2 + (z + z_0)^2]^{3/2}} \right\}.$$

Khi đó mật độ điện tích cảm ứng trên bề mặt của vật dẫn là



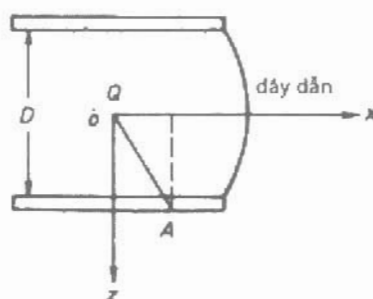
Hình 1.39

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{P \cos \theta}{2\pi(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} + \frac{3Pz_0(-x \sin \theta \cdot z_0 \cos \theta)}{2\pi(x^2 + y^2 + z_0^2)^{5/2}}.$$

1085

Hai tấm dẫn điện phẳng, lớn đặt cách nhau một khoảng cách D được nối với nhau bằng một dây dẫn. Một điện tích điểm Q được đặt tại điểm giữa của hai tấm đó như trên hình 1.40. Hãy tìm biểu thức của mật độ điện tích cảm ứng trên tấm ở phía dưới như hàm của D , Q và x (là khoảng cách từ tâm của tấm đó).

(Columbia)



Hình 1.40

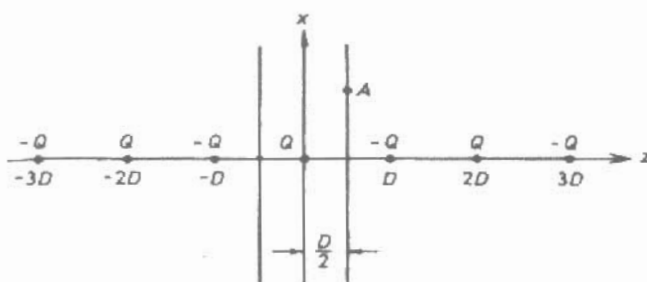
Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh. Vị trí của các điện tích ảnh được ghi rõ trên hình 1.41. Xét một điểm A bất kì trên tấm phía dưới. Chọn mặt phẳng xz chứa điểm A . Có thể thấy rằng điện trường tại A nằm trên bề mặt của một vật dẫn chỉ có thành phần z và độ lớn của nó là (lấy $d = \frac{D}{2}$)

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(d^2 + x^2)} \cdot \frac{2d}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0[(3d)^2 + x^2]} \cdot \frac{2 \cdot 3d}{[(3d)^2 + x^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0[(5d)^2 + x^2]} \cdot \frac{2 \cdot 5d}{[(5d)^2 + x^2]^{3/2}} - \dots \\ &= \frac{QD}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{[(n + \frac{1}{2})^2 D^2 + x^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Suy ra biểu thức mật độ điện tích

$$\sigma(x) = -\epsilon_0 E_z = -\frac{QD}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{[(n + \frac{1}{2})^2 D^2 + x^2]^{3/2}}.$$



Hình 1.41

Hai tấm dẫn điện lớn, song song đặt cách nhau một khoảng cách nhỏ $4x$. Hai tấm đó đều được nối đất. Các điện tích Q và $-Q$ được đặt tại các khoảng cách x và $3x$ tính từ một tấm như trên hình 1.42.

(a) Tính năng lượng cần thiết để dịch chuyển hai điện tích đó ra khỏi giữa các tấm và ra xa vô cùng.

(b) Tính lực tác dụng từng điện tích (cả độ lớn và hướng).

(c) Tính lực tác dụng lên từng tấm kim loại (cả độ lớn và hướng).

(d) Tính điện tích cảm ứng toàn phần trên từng tấm (Gợi ý: Điện thế trên mặt phẳng nằm giữa hai điện tích là bao nhiêu?)

(e) Tính điện tích cảm ứng toàn phần trên bề mặt bên trong của từng tấm sau khi điện tích $-Q$ được rời đi, điện tích $+Q$ vẫn giữ tại chỗ?

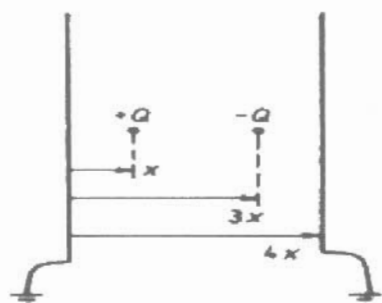
(MIT)

Lời giải:

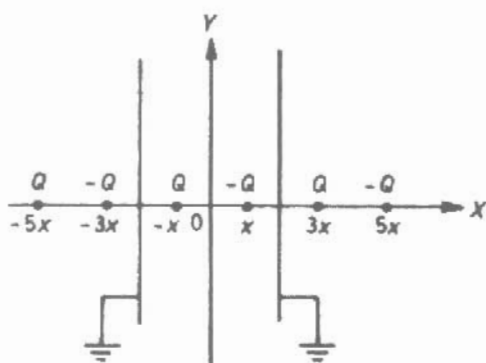
(a) Điện thế được tìm bằng phương pháp ảnh, phương pháp này đòi hỏi cần có các điện tích ảnh $+Q$ tại các tọa độ $\dots -9x, -5x, 3x, 7x, 11x \dots$ và các điện tích ảnh $-Q$ tại các tọa độ $\dots -7x, -3x, 5x, 9x, 13x, \dots$ dọc theo trục x như trên hình 1.43. Khi đó mật độ điện tích của hệ gồm các điện tích thực và các điện tích ảnh có thể biểu diễn như sau

$$\rho = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} Q \delta[x - (2k+1)x]$$

trong đó δ là hàm Dirac delta một chiều.



Hình 1.42



Hình 1.43

Năng lượng điện trường tĩnh điện của hệ là

$$W = \frac{1}{2} \sum QU = \frac{1}{2} QU_+ - \frac{1}{2} QU_-$$

ở đây U_+ là điện thế tại điện tích $+Q$ sinh ra bởi các điện tích thực và các điện tích ảnh, không bao gồm bản thân điện tích $+Q$, trong khi đó U_- là điện thế tại điện tích $-Q$ sinh ra do các điện tích thực và các điện tích ảnh, không bao gồm bản thân điện tích $-Q$. Vì

$$\begin{aligned} U_+ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2Q}{(2x)} + \frac{2Q}{(4x)} - \frac{2Q}{(6x)} + \dots \right] \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 x} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{-Q \ln 2}{4\pi\epsilon_0 x}, \\ U_- &= -U_+ = \frac{Q \ln 2}{4\pi\epsilon_0 x}, \end{aligned}$$

ta có

$$W = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 x} \ln 2.$$

Do đó năng lượng cần thiết để dịch chuyển hai điện tích trên ra xa nhau và xa các tấm kim loại một khoảng cách vô hạn là $-W$.

(b) Lực tác dụng lên $+Q$ chỉ là lực tác dụng do điện trường của điện tích thực $-Q$ và các điện tích ảnh sinh ra bởi Q . Vì đối xứng nên lực này bằng 0. Tương tự, lực tác dụng lên $-Q$ cũng bằng 0.

(c) Xét lực tác dụng lên tấm dẫn điện bên trái. Đây là tổng của tất cả các lực tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái (nghĩa là các điện tích ảnh phía bên trái của tấm bên trái) sinh ra bởi các điện tích thực $+Q, -Q$ và bởi tất cả các điện tích ảnh của tấm bên phải (nghĩa là các điện tích ảnh phía bên phải của tấm bên phải).

Đầu tiên chúng ta hãy xét lực F_1 tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái sinh ra do điện tích thực $+Q$

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(4x)^2} + \dots = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

lấy hướng dọc theo $+x$ là hướng dương. Sau đó chúng ta tìm lực F_2 giữa điện tích thực $-Q$ và các điện tích ảnh của tấm bên trái

$$F_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(4x)^2} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(6x)^2} - \dots = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Cuối cùng xét lực F_3 tác dụng lên các điện tích ảnh của tấm bên trái sinh ra bởi các điện tích ảnh của tấm bên phải

$$F_3 = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Như vậy lực tổng hợp tác dụng lên tấm bên trái là

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \left(1 - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{4^2} + \dots \right) = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \end{aligned}$$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2,$$

ta nhận được

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \ln 2.$$

Lực này hướng về phía bên phải. Bằng phương pháp tương tự ta cũng sẽ thấy rằng lực tác dụng lên tấm bên phải có độ lớn cũng bằng $\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} \ln 2$ và hướng về phía bên trái.

(d) Điện thế trên mặt phẳng $x = 0$ bằng 0, như vậy chỉ có một nửa đường sức xuất hiện từ điện tích $+Q$ đến được tấm bên trái, trong khi các đường sức xuất hiện từ điện tích $-Q$ không đạt đến được tấm bên trái chút nào. Do đó, điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm bên trái là $-\frac{Q}{2}$ và tương tự, điện tích cảm ứng toàn phần trên tấm bên phải là $\frac{Q}{2}$.

(e) Khi điện tích $+Q$ tồn tại một mình, tổng của toàn bộ điện tích cảm ứng trên hai tấm là $-Q$. Nếu tổng điện tích cảm ứng trên tấm bên trái là $-Q_x$ thì khi đó điện tích cảm ứng tổng cộng trên tấm phải là $-Q + Q_x$. Tương tự, nếu $-Q$ tồn tại một mình, tổng điện tích cảm ứng trên tấm trái là $Q - Q_x$ và tổng điện tích cảm ứng trên tấm phải là $+Q_x$ do tính đối xứng. Nếu hai điện tích đồng thời tồn tại, điện tích cảm ứng trên tấm trái là sự chồng chập của các điện tích cảm ứng sinh ra do cả hai điện tích $+Q$ và $-Q$. Do đó, sử dụng kết quả của (d) ta có

$$Q - 2Q_x = -\frac{Q}{2},$$

hay

$$Q_x = \frac{3}{4}Q.$$

Như vậy sau khi $-Q$ được dịch chuyển đi, điện tích cảm ứng tổng cộng trên bề mặt bên trong của tấm bên trái là $-3Q/4$ và điện tích cảm ứng tổng cộng trên tấm bên phải là $-Q/4$.

1087

Phải đưa một điện tích dương tối thiểu là bao nhiêu tới một vật dẫn hình cầu bán kính a , cách điện và bị ảnh hưởng bởi một điện tích điểm $+q$ bên ngoài, cách tâm vật dẫn hình cầu một khoảng cách $r > a$, để đảm bảo cho mật độ điện tích mặt trên quả cầu có thể dương ở khắp mọi nơi? Điều gì sẽ xảy ra nếu điện tích bên ngoài là $-q$?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ Đề các với gốc tọa độ tại tâm của quả cầu và trục z dọc theo đường thẳng nối tâm quả cầu với điện tích q . Rõ ràng là mật độ điện tích mặt cảm ứng lớn nhất có giá trị âm sẽ xuất hiện trên quả cầu tại điểm $(0, 0, a)$. Tác dụng của bề mặt quả cầu dẫn điện có thể được thay thế bằng tác dụng của một điện tích điểm $(-\frac{a}{r}q)$ đặt tại $(0, 0, \frac{a^2}{r})$ và một điện tích điểm $(\frac{a}{r}q)$ tại tâm quả cầu $(0, 0, 0)$. Khi đó điện trường E tại $(0, 0, a_+)$ là

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\frac{a}{r}q}{a^2} - \frac{q}{(r-a)^2} - \frac{\frac{a}{r}q}{(a - \frac{a^2}{r})^2} \right] \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{ar} - \frac{q}{(r-a)^2} - \frac{\frac{r}{a}q}{(r-a)^2} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Do đó, mật độ điện tích mặt cảm ứng âm có giá trị cực đại là

$$\sigma_e = \epsilon_0 E_n = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{ar} - \frac{1}{(r-a)^2} - \frac{r/a}{(r-a)^2} \right].$$

Nếu một điện tích dương Q được đưa tới quả cầu, nó sẽ phân bố đồng đều trên bề mặt quả cầu với mật độ điện tích mặt $Q/4\pi a^2$. Để tổng mật độ điện

tích bề mặt ở khắp mọi nơi đều dương ta cần có

$$\begin{aligned} Q &\geq -\sigma \cdot 4\pi a^2 = a^2 q \left[\left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{ar} \right] \\ &= \frac{a^2(3r-a)}{r(r-a)^2} q. \end{aligned}$$

Mặt khác, điện trường tại điểm $(0, 0, -a_-)$ là

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{ra} + \frac{1}{(r+a)^2} - \frac{r/a}{(r+a)^2} \right] \mathbf{e}_z.$$

Nếu ta thay thế q bằng $-q$, mật độ điện tích mặt cảm ứng âm cực đại sẽ xuất hiện tại $(0, 0, -a)$. Khi đó giống như trên, điện tích dương cần có là

$$\begin{aligned} Q &\geq -\sigma \cdot 4\pi a^2 = -\epsilon_0 \cdot 4\pi a^2 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \cdot \left[\frac{1}{ra} + \frac{1}{(r+a)^2} - \frac{r/a}{(r+a)^2} \right] \\ &= q \left[\frac{a}{r} + \frac{a^2}{(r+a)^2} - \frac{ar}{(r+a)^2} \right] = \frac{qa^2(3r+a)}{r(r+a)^2}. \end{aligned}$$

1088

(a) Hãy tìm điện thế tĩnh điện phát sinh do một lưỡng cực điện có độ lớn d nằm tại khoảng cách L tính từ tâm của một quả cầu dẫn điện nối đất bán kính a ; giả thiết rằng trục của lưỡng cực đó chạy qua tâm của quả cầu.

(b) Xét hai quả cầu dẫn điện được cách điện (bán kính a) trong một điện trường đều có hướng sao cho đường thẳng nối tâm của chúng, có chiều dài R và song song với điện trường. Khi R lớn, hãy mô tả một cách định tính điện trường tổng hợp tính tới bậc R^{-4} .

(Wisconsin)

Lời giải:

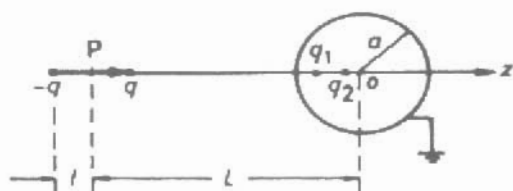
(a) Lấy tâm quả cầu làm gốc tọa độ và trục đối xứng của hệ là trục z , khi đó chúng ta có thể viết $\mathbf{P} = d\mathbf{e}_z$. Xem $\mathbf{P}$ như một điện tích dương q và một điện tích âm $-q$ đặt cách nhau một khoảng cách $2l$ sao cho $d = \lim_{l \rightarrow 0} 2ql$, ta có thể sử dụng phương pháp ảnh. Như đã chỉ ra trên hình 1.44, tọa độ của q và $-q$ tương ứng là

$$q: z = L + l, \quad -q: z = -L - l.$$

Lấy q_1 và q_2 là các điện tích ảnh tương ứng của q và $-q$. Đối với bề mặt quả cầu là đẳng thế, độ lớn và vị trí của q_1 và q_2 có thể viết như sau (hình 1.44)

$$q_1 = -\frac{a}{L-l}q \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L-l}\right),$$

$$q_2 = \frac{a}{L+l}q \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L+l}\right).$$



Hình 1.44

Vì $L \gg 1$, dùng công thức tính gần đúng

$$\frac{1}{L \pm l} \approx \frac{1}{L} \mp \frac{l}{L^2}$$

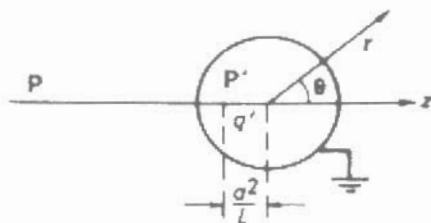
độ lớn và vị trí của các điện tích ảnh lần lượt là

$$q_1 = -\frac{a}{L}q - \frac{ad}{2L^2} \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, \frac{-a^2}{L} - \frac{a^2l}{L^2}\right),$$

$$q_2 = \frac{a}{L}q - \frac{ad}{2L^2} \quad \text{đặt tại} \quad \left(0, 0, -\frac{a^2}{L} + \frac{a^2l}{L^2}\right),$$

trong đó ta đã sử dụng $d = 2ql$. Do đó một lưỡng cực ảnh với mômen lưỡng cực $\mathbf{P}' = \frac{a}{L}q \cdot \frac{2a^2l}{L^2}\mathbf{e}_z = \frac{a^3}{L^3}\mathbf{P}$ và một điện tích ảnh $q' = -\frac{ad}{L^2}$ sẽ được sử dụng để thay thế cho tác dụng của q_1 và q_2 . Cả $\mathbf{P}'$ và q' đều được đặt tại $\mathbf{r}' = (0, 0, -\frac{a^2}{L})$ (xem H. 1.45). Do đó điện thế tại $\mathbf{r}$ bên ngoài quả cầu là sự chồng chập của các điện thế do $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, và q' sinh ra, nghĩa là

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{P}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} + L\mathbf{e}_z)}{|\mathbf{r} + L\mathbf{e}_z|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{ad}{L^2(r^2 + \frac{a^2}{L} \cos \theta + \frac{a^4}{L^2})^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^3 d(r \cos \theta + \frac{a^2}{L})}{L^3(r^2 + \frac{a^2}{L} \cos \theta + \frac{a^4}{L^2})^{3/2}} + \frac{d(r \cos \theta + L)}{(r^2 + 2rL \cos \theta + L^2)^{3/2}} \right].\end{aligned}$$



Hình 1.45

(b) Một quả cầu dẫn điện bán kính a ở trong một điện trường ngoài $\mathbf{E}$ tương ứng với một lưỡng cực điện có mômen $\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 a^2 \mathbf{E}$ đối với điện trường bên ngoài quả cầu. Hai quả cầu dẫn điện cách biệt với nhau trong bài tập này có thể coi như một lưỡng cực nếu chúng ta sử dụng phép gần đúng bậc 0. Nhưng khi chúng ta sử dụng phép gần đúng có bậc cao hơn thì tương tác giữa hai quả cầu dẫn điện phải được xét đến. Bây giờ sự tác dụng của quả cầu thứ nhất lên quả cầu thứ hai giống như trường hợp (a) của bài tập này (khi hai quả cầu được tách xa nhau với một khoảng cách lớn). Nói một cách khác, tác dụng này có thể coi như tác dụng của một lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}' = \frac{a^3}{R^3} \mathbf{P}$ và điện tích ảnh $q' = -\frac{a\mathbf{P}}{R^2}$. Khi $a^2 \ll L$, lưỡng cực ảnh và điện tích ảnh có thể xem một cách gần đúng là đặt tại tâm quả cầu. Như vậy điện trường tại một điểm bên ngoài quả cầu là tổng hợp của các điện trường sinh ra do một điện tích điểm q' và một lưỡng cực có mômen $\mathbf{P} + \mathbf{P}' = (1 + \frac{a^3}{R^3}) \mathbf{P}$ đặt tại mỗi tâm của hai quả cầu đó. Khi đó, điện thế sẽ có thể được biểu thị với những số hạng tới bậc $1/R^4$.

1089

Một lưỡng cực điện có mômen $\mathbf{P}$ được đặt tại khoảng cách r tính từ một quả cầu dẫn điện có bán kính a đã được cách điện. Lưỡng cực này có hướng đi ra xa quả cầu. Giả thiết rằng $r \gg a$ và quả cầu không chứa điện tích thực.

(a) Nêu các điều kiện biên về điện trường $\mathbf{E}$ tại bề mặt của quả cầu.

(b) Hãy tìm gần đúng lực tác dụng lên lưỡng cực đó.

(MIT)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ cầu với trục z dọc theo hướng của lưỡng cực $\mathbf{P}$ và lấy gốc tọa độ tại tâm quả cầu. Các điều kiện biên đối với $\mathbf{E}$ trên bề mặt của quả cầu là

$$E_n = \sigma/\epsilon_0, \quad E_t = 0,$$

trong đó σ là mật độ điện tích mặt.

(b) Hệ có các ảnh tương tự các ảnh của bài tập 1088 gồm một lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}' = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathbf{P}$ và một điện tích ảnh $q' = -\frac{aP}{r^2}$ đặt tại $\mathbf{r}' = \frac{a^2}{r} \mathbf{e}_z$. Thêm nữa, phải đặt một điện tích ảnh $q'' = -q'$ tại tâm của quả cầu khi quả cầu dẫn điện đó được cách điện và không tích điện. Tuy nhiên, vì $r \gg a$ nên chúng ta có thể coi q' và q'' như một tổ hợp tạo nên một lưỡng cực ảnh có mômen $\mathbf{P}'' = \frac{a\mathbf{P}}{r^2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{a^3}{r^3} \mathbf{P}$. Vì $r \gg a$, các lưỡng cực ảnh $\mathbf{P}'$ và $\mathbf{P}''$ có thể được coi gần đúng như định xứ tại tâm của quả cầu. Tổng mômen lưỡng cực ảnh là

$$\mathbf{P}_{\text{ảnh}} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}'' = 2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \mathbf{P}.$$

Khi đó bài tập thực chất là tìm lực tác dụng lên của $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ lên $\mathbf{P}$. Điện thế tại một điểm $\mathbf{r}$ do $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ tạo ra là

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}_{\text{ảnh}} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

và điện trường tương ứng là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_{\text{ảnh}})\mathbf{r} - r^2\mathbf{P}_{\text{ảnh}}}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Tại vị trí của $\mathbf{P}$, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_z$, khi đó điện trường do $\mathbf{P}_{\text{ảnh}}$ tạo ra là

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_{\text{ảnh}}}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{a^3 P}{\pi\epsilon_0 r^6} \mathbf{e}_z = \frac{a^3}{\pi\epsilon_0 r^6} \mathbf{P}.$$

Năng lượng của $\mathbf{P}$ trong trường này là

$$W = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = -\frac{a^3 P^2}{\pi \epsilon_0 r^6},$$

Từ đây suy ra lực tác dụng lên $\mathbf{P}$ như sau

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{6a^3 P^2}{\pi \epsilon_0 r^7} \mathbf{e}_z = -\frac{6a^3 P \mathbf{P}}{\pi \epsilon_0 r^7}.$$

1090

Giả thiết rằng thế năng giữa hai điện tích điểm q_1 và q_2 ở cách nhau một khoảng cách r thực tế là $q_1 q_2 e^{-Kr}/r$ thay cho $q_1 q_2 / r$ với K rất nhỏ. Có thể thay thế phương trình Poisson cho điện thế như thế nào? Hãy đưa ra thiết kế phác thảo một thực nghiệm để kiểm chứng cho sự khác D của K . Hãy đưa ra cơ sở lý thuyết cho phác thảo của bạn.

(Chicago)

Lời giải:

Với giả thiết đã cho, hàm Poisson được thay thế bằng

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = -4\pi \rho$$

trong hệ đơn vị Gauss, trong đó ρ là mật độ điện tích. Để kiểm chứng cho sự khác không của K hãy xét một lồng Faraday có dạng một vỏ cầu dẫn điện S , thể tích V , bao quanh và có tâm tại q_1 như thấy trong hình 1.46. Giả sử bán kính vectơ của q_2 là $\mathbf{r}'_0$. Kí hiệu điểm nguồn bằng $\mathbf{r}'$ và điểm điện trường bằng $\mathbf{r}$, sử dụng định lý Green

$$\int_V (\psi \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \psi) dV' = \oint_S (\psi \nabla' \phi - \phi \nabla' \psi) \cdot d\mathbf{S}'.$$

Hãy chọn để ϕ là điện thế ở bên trong S do q_2 nằm ngoài S gây ra. Điện thế trong trường hợp này được viết như sau

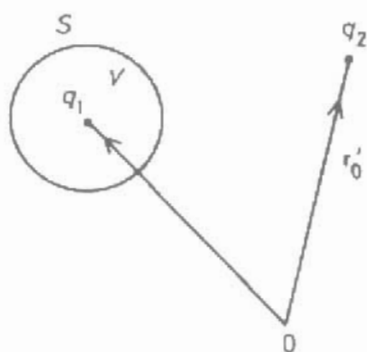
$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0,$$

vì $\rho = 0$ (là mật độ điện tích tương ứng với sự phân bố của q_2) bên trong S và một hàm Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ thỏa mãn đối với ψ nên có thể viết biểu thức sau

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$G = 0 \quad \text{trên } S,$$

trong đó $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ là hàm Dirac delta.



Hình 1.46

Các tích phân trong phương trình tích phân được viết như sau

$$\begin{aligned} \int_V \psi \nabla'^2 \phi dV' &= \int_V G \nabla'^2 \phi dV' = -K^2 \int_V G \phi dV', \\ \int_V \phi \nabla'^2 \psi dV' &= \int_V \phi \nabla'^2 G dV' = -4\pi \int_V \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi \phi(\mathbf{r}), \\ \oint_S \psi \nabla' \phi \cdot d\mathbf{S}' &= \oint_S G \nabla' \phi \cdot d\mathbf{S}' = 0 \quad \text{as } G = 0 \quad \text{on } S, \\ \oint_S \phi \nabla' \psi \cdot d\mathbf{S}' &= \phi_S \oint_S \nabla' G \cdot d\mathbf{S}' = \phi_S \int_V \nabla'^2 G dV' \\ &= -4\pi \phi_S \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi \phi_S \end{aligned}$$

Vì $\phi = \text{hằng số} = \phi_S$ đối với S là một vật dẫn. Lưu ý rằng định lý divergence đã được sử dụng trong phương trình cuối cùng.

Khi này phương trình tích phân trở thành

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \left(4\pi \phi_S + K^2 \int_V G \phi dV' \right) \\ &= \phi_S + \frac{K^2}{4\pi} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'. \end{aligned}$$

Nếu $K = 0$ thì $\phi(\mathbf{r}) = \phi_S$, nghĩa là, quả cầu V là một thể tích đẳng thế, như vậy không có một lực nào tác dụng lên q_1 . Nếu $K \neq 0$ thì $\phi(\mathbf{r})$ sẽ phụ thuộc vào $\mathbf{r}$, như vậy q_1 sẽ chịu tác dụng một lực là $-q_1 \nabla \phi$. Do đó đánh giá lực trên q_1 sẽ xác định được $K = 0$ hay không.

1091

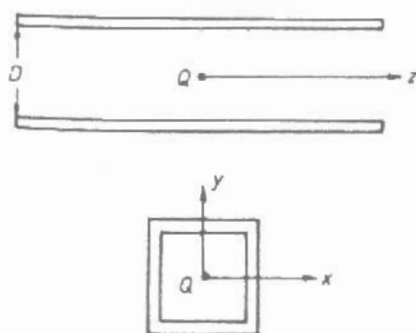
Một ống dẫn điện rất dài có mặt cắt hình vuông bên trong với kích thước D như trên hình 1.47. Phía xa từ một trong hai đầu của ống dẫn treo lơ lửng một điện tích điểm nằm tại tâm của mặt cắt vuông.

(a) Hãy xác định điện thế tại tất cả các điểm bên trong ống dẫn, có thể dưới dạng một chuỗi vô hạn.

(b) Tìm biểu thức tiệm cận đối với điện thế này đối với tất cả các điểm nằm xa điện tích điểm đó.

(c) Phác hoạ một vài đường sức của điện trường trong vùng xa điện tích điểm đó. (Gợi ý: Tránh dùng các ảnh).

(UC, Berkeley)



Hình 1.47

Lời giải:

(a) Phương trình Poisson đối với điện thế và các điều kiện biên có thể viết

như sau

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z), \\ \varphi|_{x=\pm D/2} &= 0, \\ \varphi|_{y=\pm D/2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Bằng phép biến đổi Fourier

$$\bar{\varphi}(x, y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) e^{ikz} dz,$$

Các phương trình trên sẽ trở thành

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \bar{\varphi}(x, y, k) &= -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(x) \delta(y), \\ \bar{\varphi}(x, y, k)|_{x=\pm D/2} &= 0, \\ \bar{\varphi}(x, y, k)|_{y=\pm D/2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Kí hiệu $F(\Omega)$ là không gian các hàm số bằng 0 tại $x = \pm \frac{D}{2}$ hoặc $y = \pm \frac{D}{2}$. Tập hợp các cơ sở đầy đủ và unita trong không gian hàm này là

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{D} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}, \frac{2}{D} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \sin \frac{2n'\pi y}{D}, \\ \frac{2}{D} \sin \frac{2n\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}, \frac{2}{D} \sin \frac{2n\pi x}{D} \sin \frac{2n'\pi y}{D}. \\ m, m' \geq 0, n, n' \geq 1. \end{aligned} \right\}$$

Trong không gian hàm này $\delta(x)\delta(y)$ có thể khai triển như sau

$$\delta(x)\delta(y) = \left(\frac{2}{D} \right)^2 \sum_{m, m'=0}^{\infty} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}. \quad (2)$$

Giả sử $\bar{\varphi}(x, y, k)$ là nghiệm tổng quát có dạng

$$\bar{\varphi}(x, y, k) = \sum_{m, m'=0}^{\infty} \varphi_{mm'}(k) \cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}. \quad (3)$$

Thay (3) vào phương trình (1), đồng thời kết hợp với phương trình (2), ta được

$$\bar{\varphi}(x, y, k) = \frac{4Q}{\varepsilon D^2} \sum_{m, m'=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}}{k^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{D} \right)^2 + \left(\frac{(2m'+1)\pi}{D} \right)^2}.$$

Áp dụng công thức tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|z|}, \quad (\lambda > 0),$$

cuối cùng ta có

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2Q}{\pi \varepsilon_0 D} \sum_{m, m'=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos \frac{(2m'+1)\pi y}{D}}{\sqrt{(2m+1)^2 + (2m'+1)^2}} \cdot e^{-\frac{\pi|z|}{D} \sqrt{(2m+1)^2 + (2m'+1)^2}}.$$

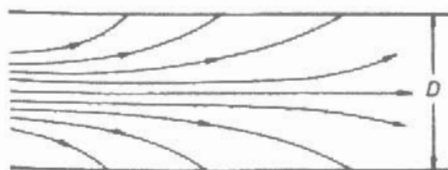
(b) Đối với các điểm ở xa điện tích điểm chúng ta chỉ cần chọn một số thành phần với $m = m' = 0$ cho điện thế, nghĩa là

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 \pi D} \cos \frac{\pi x}{D} \cdot \cos \frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}|z|}.$$

(c) Đối với vùng $z > 0$, biểu thức tiệm cận của điện trường đối với $z \gg D$ là

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 D^2} \sin \frac{\pi x}{D} \cos \frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}Q}{\varepsilon_0 D^2} \cos \frac{\pi x}{D} \sin \frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z}, \\ E_z &= \frac{2Q}{\varepsilon_0 D^2} \cos \frac{\pi x}{D} \cos \frac{\pi y}{D} e^{-\frac{\sqrt{2}\pi}{D}z}. \end{aligned} \right\}$$

Các đường sức ở xa điện tích điểm được vẽ phác trên hình 1.48



Hình 1.48

1092

Xét hai lưỡng cực P_1 và P_2 đặt cách nhau một khoảng cách d . Hãy tìm lực tác dụng giữa chúng do tương tác tĩnh điện giữa hai mômen lưỡng cực đó đối với sự định hướng bất kì của P_1 và P_2 . Trong trường hợp đặc biệt, khi P_1 song song với đường nối hai lưỡng cực, hãy xác định sự định hướng của P_2 để cho lực hút là cực đại.

(Columbia)

Lời giải:



Hình 1.49

Trong hình 1.49 vectơ bán kính có hướng từ P_1 đến P_2 . Lấy điện trường do P_1 sinh ra như một điện trường ngoài, cường độ của nó tại vị trí của P_2 được tính bởi công thức

$$\mathbf{E}_e = \frac{3(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{P}_1}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Do đó lực tác dụng lên P_2 là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{P}_2 \cdot \nabla)\mathbf{E}_e \\ &= \frac{3}{4\pi\epsilon_0 r^7} \{r^2[(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{r} + (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}_2 + (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{P}_1] - 5(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}\}. \end{aligned}$$

Nếu $P_1 \parallel \mathbf{r}$, giả sử $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r} = P_2 r \cos \theta$. Khi đó $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1 P_2 \cos \theta$ và lực tác dụng giữa P_1 và P_2 trở thành

$$\mathbf{F} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 r^5} \{-3P_1 P_2 \cos \theta \mathbf{r} + P_1 r \mathbf{P}_2\}.$$

Lực hút cực đại rõ ràng đạt được khi $\theta = 0^\circ$, và khi đó $\mathbf{P}_2$ cũng song song với $\mathbf{r}$. Giá trị cực đại của lực này là

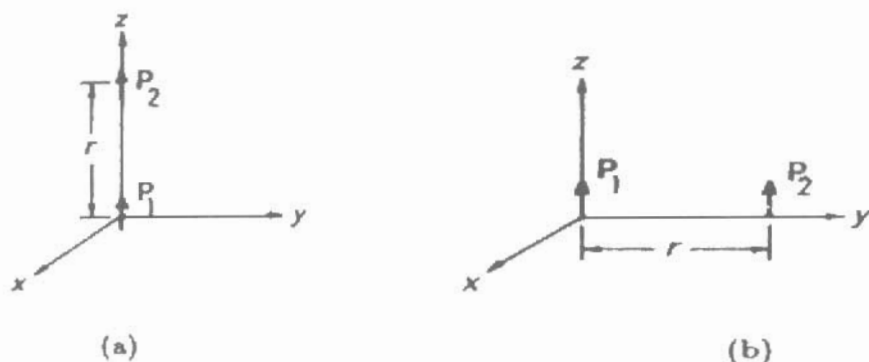
$$\mathbf{F}_{\max} = -\frac{3P_1 P_2 \mathbf{r}}{2\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Lưu ý rằng dấu âm biểu thị lực hút.

1093

Một lưỡng cực điện với mômen lưỡng cực $\mathbf{P}_1 = P_1 \mathbf{e}_z$ được đặt tại gốc của một hệ tọa độ. Một lưỡng cực thứ hai có mômen $\mathbf{P}_2 = P_2 \mathbf{e}_z$ được đặt như ở hình (a) trên trục $+z$ cách gốc tọa độ một khoảng cách r , hoặc như ở hình (b) trên trục $+y$ cách gốc tọa độ một khoảng cách r . Hãy chứng minh rằng lực giữa hai lưỡng cực này là lực hút trong từng trường hợp hình 1.50(a) và là lực đẩy trong trường hợp hình 1.50(b). Hãy tính độ lớn của lực trong hai trường hợp trên.

(Columbia)



Hình 1.50

Lời giải:

Điện trường do $\mathbf{P}_1$ sinh ra là

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \left(\frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{\mathbf{P}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3P_1 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_r,$$

trong đó θ là góc giữa $\mathbf{P}_1$ và $\mathbf{r}$. Năng lượng tương tác giữa $\mathbf{P}_2$ và $\mathbf{P}_1$ là

$$W_e = -\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{3P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos^2\theta.$$

Do đó các thành phần của lực tác dụng trên $\mathbf{P}_2$ là

$$F_r = -\frac{\partial W_e}{\partial r} = \frac{3P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} - \frac{9P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \cos^2\theta,$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W_e}{\partial \theta} = -\frac{3P_1 P_2}{2\pi\epsilon_0 r^4} \sin\theta \cos\theta.$$

(a) Trong trường hợp $\theta = 0$, ta có

$$F_{\theta} = 0, \quad F_r = -\frac{3P_1 P_2}{2\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Dấu âm biểu thị lực hút.

(b) Trong trường hợp $\theta = \frac{\pi}{2}$, khi đó ta có

$$F_{\theta} = 0, \quad F_r = -\frac{3P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Dấu dương biểu thị lực đẩy.

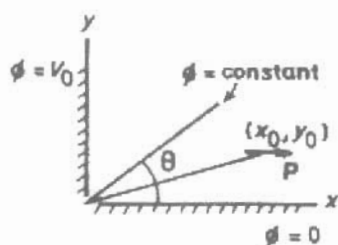
1094

Một lưỡng cực điện có mômen $\mathbf{P} = (P_x, 0, 0)$ được đặt tại điểm $(x_0, y_0, 0)$, trong đó $x_0 > 0$ và $y_0 > 0$. Các mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$ là các tấm phẳng dẫn điện có một khe rất nhỏ tại gốc tọa độ. Điện thế của mặt phẳng tại $x = 0$ được giữ tại giá trị V_0 đối với với mặt phẳng $y = 0$. Lưỡng cực này đủ yếu để có thể bỏ qua các điện tích cảm ứng trên các tấm phẳng. Hình 1.51 là một phác họa của các vật dẫn có điện thế tĩnh điện không đổi.

(a) Dựa trên hình 1.51 hãy rút ra biểu thức của điện thế tĩnh điện $\phi(x, y)$.

(b) Hãy tính lực tác dụng lên lưỡng cực đó.

(MIT)



Hình 1.51

Lời giải:

(a) Bất kì mặt phẳng nào đi qua trục z đều là một mặt đẳng thế có điện thế chỉ phụ thuộc vào góc θ mà nó tạo với mặt phẳng $y = 0$

$$\phi(x, y) = \phi(\theta).$$

Do đó phương trình Laplace chỉ dạng một chiều như sau

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = 0,$$

với nghiệm

$$\phi(\theta) = \frac{2V_0}{\pi} \theta,$$

ở đây đã tính đến các điều kiện biên $\phi = 0$ đối với $\theta = 0$ và $\phi = V_0$ đối với $\theta = \frac{\pi}{2}$. Phương trình này cũng có thể được viết lại trong hệ tọa độ Đề các như sau

$$\phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(b) Khi đó điện trường là

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{2V_0}{\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_x - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{e}_y \right).$$

Do đó, lực tác dụng lên lưỡng cực $(\mathbf{P}_x, 0, 0)$ là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} = P_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \\ &= \frac{2V_0 P_x}{\pi} \left(-\frac{2x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \mathbf{e}_x + \frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \mathbf{e}_y \right). \end{aligned}$$

1095

Bên trong một bộ ngưng tụ khối, một sợi dây dài bán kính R có một điện tích tĩnh điện λ Culông trên một đơn vị chiều dài. Hãy tìm lực hút giữa sợi dây này và một hạt khối hình cầu không tích điện, có hằng số điện môi ϵ và bán kính a trước khi hạt đó chạm tới sợi dây (giả thiết $a < R$). Hãy thảo luận về nguồn gốc của lực này.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Vì $a \ll R$, nên ta có thể xem hạt khối nằm trong một điện trường đều. Với hệ đơn vị Gauss, điện trường bên trong một chất điện môi hình cầu nằm trong một điện trường ngoài đều là (xem bài tập 1062)

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{2 + \epsilon} \mathbf{E}_{\text{ex}}.$$

Quả cầu nhỏ (do cảm ứng, điện tích có thể nằm ở hai phía) có thể coi như một lưỡng cực điện có mômen

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_{\text{ex}} = \frac{4\pi a^3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_{\text{ex}}.$$

Năng lượng của một hạt khối đã bị phân cực trong điện trường ngoài là

$$W = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{ex}} = -\frac{2\pi a^3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} E_{\text{ex}}^2.$$

E_{ex} có hướng bán kính từ trục của sợi dây và được tính bởi định lý Gauss là

$$\mathbf{E}_{\text{ex}} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r.$$

Do đó

$$W = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{2\pi(\varepsilon + 2)r^2},$$

và lực tác dụng lên hạt khối là

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{\pi(\varepsilon + 2)r^3} \mathbf{e}_r.$$

Ngay trước khi hạt đó chạm tới sợi dây, $r = R$ và lực đó là

$$\mathbf{F} = -\frac{(\varepsilon - 1)a^3\lambda^2}{\pi(\varepsilon + 2)R^3} \mathbf{e}_r.$$

Dấu âm chỉ ra rằng lực này là lực hút. Lực này được sinh ra bởi sự không đều của điện trường theo bán kính vì nó được cho bởi $-\nabla W$. Sự phân cực của hạt khối trong điện trường ngoài làm cho nó có tác dụng giống như một lưỡng cực điện, trong một điện trường không đều nó sẽ chịu một lực điện.

5. CÁC ỨNG DỤNG KHÁC (1096–1108)

1096

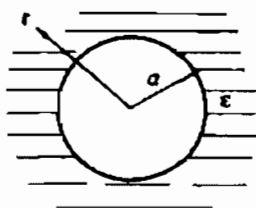
Một quả cầu bán kính a có một điện tích liên kết Q phân bố đồng đều trên khắp bề mặt của nó. Quả cầu này được bao quanh bằng một môi trường điện môi lỏng đồng đều với hằng số điện môi cố định ε như trên hình 1.52. Chất lỏng cũng chứa một mật độ điện tích tự do cho bởi công thức

$$\rho(\mathbf{r}) = -kV(\mathbf{r}),$$

trong đó k là hằng số và $V(\mathbf{r})$ là điện thế tại $\mathbf{r}$ so với vô cực.

(a) Hãy tính điện thế ở mọi nơi, lấy $V = 0$ tại $\mathbf{r} \rightarrow \infty$.

(b) Hãy tính áp suất trong chất điện môi như một hàm của r .



Hình 1.52

Lời giải:

Điện thế thoả mãn phương trình Poisson

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon} = \frac{kV(\mathbf{r})}{\epsilon}, \quad r > a. \quad (1)$$

Do tính đối xứng cầu của bài tập này chúng ta có $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Phương trình (1) khi này trở thành

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{k}{\epsilon} V(r), \quad r > a.$$

Viết $V = u/r$, ta có

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{k}{\epsilon} u. \quad (2)$$

Nghiệm của phương trình (2) có thể được phân loại theo giá trị của k

(1) Nếu $k > 0$, nghiệm sẽ là

$$u = A \exp \left(\pm \sqrt{\frac{k}{\epsilon}} r \right).$$

Do đó:

$$V = \frac{A}{r} \exp \left(\pm \sqrt{\frac{k}{\epsilon}} r \right).$$

Điều kiện $V = 0$ khi $r \rightarrow \infty$ chỉ ra rằng ở đây chỉ được phép lấy số mũ âm. Định lý Gauss đối với mặt cầu

$$-\oint_S \frac{\partial V}{\partial r} dS = Q,$$

suy ra

$$A = \frac{Qe^{\alpha a}}{4\pi(\alpha a + 1)},$$

trong đó $\alpha = \sqrt{k/\epsilon}$. Mặt khác, vì không có điện trường bên trong quả cầu, nên điện thế ở đó là một hằng số bằng với điện thế trên bề mặt. Do đó

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Qe^{\alpha(a-r)}}{4\pi(\alpha a + 1)r}, & r > a, \\ \frac{Q}{4\pi a(\alpha a + 1)}, & r \leq a. \end{cases}$$

Sự ổn định của chất lỏng có nghĩa là thỏa mãn biểu thức

$$p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \text{hằng số},$$

ở đó $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{T}$ là tenxơ ứng suất Maxwell. Nếu chất lỏng phẳng lặng, hằng số này bằng 0 và ta có

$$pe_r = -\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}.$$

Khi ϵ cố định, ta còn có

$$\mathbf{T} = \mathbf{DE} - \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{I} = \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} (\Delta V)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, áp suất sẽ là

$$p = -\frac{\epsilon}{2}(\nabla V)^2 = -\frac{\epsilon(1 + \alpha r)^2}{2r^2}V^2(r).$$

(2) Nếu $k < 0$, với $\beta^2 = -k/\epsilon$, nghiệm của phương trình (2) trở thành

$$V(r) = \frac{B}{r}e^{\beta r},$$

với phần thực

$$V(r) = \frac{B}{r} \cos(\beta r).$$

Thay vào định lý Gauss

$$-\oint_S \frac{\partial V}{\partial r} dS = Q$$

ta được

$$B = \frac{Q}{4\pi(\beta a \sin \beta a + \cos \beta a)}.$$

Do đó điện thế là

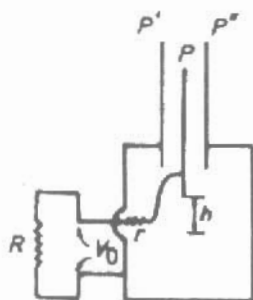
$$V = \begin{cases} \frac{Q \cos \beta a}{4\pi(\beta a \sin \beta a + \cos \beta a)r}, & r > a, \\ \frac{Q}{4\pi a(\beta a \tan \beta a + 1)}, & r \leq a, \end{cases}$$

và áp suất sẽ là

$$p = -\frac{\epsilon}{2}(\nabla V)^2 = -\frac{\epsilon}{2} \frac{(\beta r + \tan \beta r + 1)^2}{r^2} V^2(r).$$

1097

Các tấm kim loại phẳng P , P' , và P'' được để thẳng đứng (xem H. 1.53) và tấm P có khối lượng M chuyển động thẳng đứng giữa P' và P'' . Ba tấm tạo thành một đôi tụ điện phẳng mắc song song. Cho điện tích trên tụ điện này là q . Bỏ qua tất cả các hiệu ứng mép. Giả thiết rằng tụ điện này đang phóng điện qua một điện trở tải R bên ngoài và bỏ qua điện trở nội có giá trị nhỏ. Giả thiết rằng sự phóng điện đủ chậm sao cho hệ ở trong trạng thái cân bằng tĩnh tại mọi thời điểm.



Hình 1.53

(a) Năng lượng hấp dẫn của hệ phụ thuộc vào độ cao h của tấm P như thế nào?

(b) Năng lượng tĩnh điện của hệ phụ thuộc vào độ cao h và vào điện tích q như thế nào?

(c) Hãy xác định h như một hàm của q .

(d) Hiệu điện thế đầu ra tăng, giảm hay giữ ổn định khi tụ điện này phóng điện?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Năng lượng hấp dẫn của hệ là

$$W_g = Mgh.$$

(b) Giả thiết rằng khoảng cách giữa các tấm P và P' và khoảng cách giữa P và P'' đều là d . Cũng giả thiết rằng cả ba tấm đều có chiều rộng a và chiều dài l , và khi $h = h_0$ thì đỉnh của tấm P ngang hàng với đỉnh của các tấm P' và P'' . Hệ có thể coi như hai tụ điện mắc song song, mỗi tụ điện có diện tích $q/2$ và điện dung là

$$C = \frac{\epsilon_0 a(l + h - h_0)}{d}$$

khi chiều cao của tấm P là h .

Khi đó năng lượng tĩnh điện được trữ trong hệ là

$$W_e = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q}{2} \right)^2 \frac{1}{C} = \frac{q^2 d}{4\epsilon_0 a(l + h - h_0)}.$$

(c) Tổng năng lượng của hệ là

$$W = W_g + W_e = \frac{q^2 d}{4\epsilon_0 a(l + h - h_0)} + Mgh.$$

Vì quá trình phóng điện chậm, nên đối với mỗi q , P sẽ điều chỉnh đến một vị trí cân bằng h , ở đó năng lượng của hệ là tối thiểu. Như vậy đối với mỗi q , $\frac{\partial W}{\partial h}|_q = 0$ sẽ cho

$$h = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 a M g}} + h_0 - l.$$

Do đó ta thấy h thay đổi tuyến tính với q .

(d) Khi hệ đang phóng điện qua R , q giảm và h cũng giảm. Do đó hiệu điện thế đầu ra là

$$V_0 = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 a (l + h - h_0)}{d}} = \sqrt{\frac{Mgd}{\varepsilon_0 a}}$$

không thay đổi theo q , nghĩa là V_0 giữ không đổi khi tụ điện phóng điện.

1098

Một tụ điện bao gồm hai bản cực phẳng song song, đặt cách nhau một khoảng cách d , được nhúng thẳng đứng trong một chất lỏng điện môi có hằng số điện môi K và mật độ ρ . Hãy tính chiều cao mà chất lỏng đó dâng lên giữa hai bản cực,

(a) khi tụ điện được mắc với một ắc quy được giữ ở một hiệu điện thế không đổi V qua các bản cực,

(b) khi tụ điện mang một điện tích Q nhưng ngắt khỏi ắc quy. Hãy giải thích cơ chế vật lý của hiệu ứng và chỉ ra một cách rõ ràng nó được sử dụng trong tính toán của bạn như thế nào. (Có thể bỏ qua các hiệu ứng của sức căng bề mặt và kích thước hữu hạn của các bản cực).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Khi tụ điện được tích điện, nó có xu hướng hút chất lỏng điện môi. Khi lực hút tĩnh điện cân bằng với trọng lượng của chất lỏng điện môi dâng lên thì mức chất lỏng sẽ không dâng lên nữa. Như thấy trên hình 1.54, b là chiều rộng và a là chiều dài của các bản cực, x là chiều cao của phần tụ điện tiếp xúc với chất lỏng và h là chiều cao mà bề mặt chất lỏng dâng lên giữa các bản cực. Khi đó điện dung của tụ điện (trong đơn vị Gauss) sẽ là

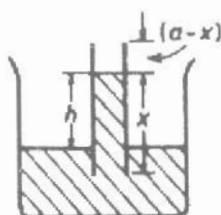
$$C = \frac{b}{4\pi d} [Kx + (a - x)] = \frac{b}{4\pi d} [(K - 1)x + a],$$

ở đó K là hằng số điện môi của chất lỏng.

(a) Nếu hiệu điện thế V không thay đổi, như đã thấy trong bài tập 1051(a), chất điện môi sẽ chịu tác dụng một lực hút tĩnh điện hướng lên trên

$$F_e = \frac{(K - 1)bV^2}{8\pi a}.$$

Lực này được cân bằng bởi trọng lượng $mg = \rho ghbd$ trong trạng thái cân



Hình 1.54

bằng. Do đó chiều cao chất lỏng dâng lên là

$$h = \frac{V^2(K-1)}{8\pi\rho g d^2}.$$

(b) Nếu thay vì diện tích Q đã được giữ không đổi thì theo bài tập 1051(b) lực hút tĩnh điện là

$$F = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{2\pi d Q^2 (K-1)}{b[(K-1)x + a]^2}.$$

Tại trạng thái cân bằng, mức chất lỏng sẽ đạt đến độ cao

$$h = \frac{2\pi Q^2 (K-1)}{\rho g b^2 [(K-1)x + a]^2}.$$

1099

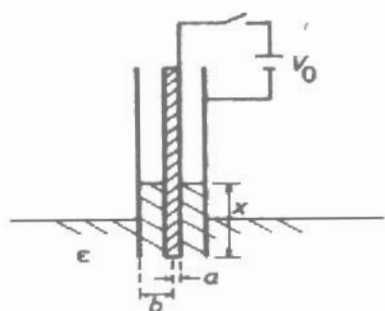
Một tụ điện trụ gồm một thanh dẫn điện dài bán kính a và một vỏ dẫn điện dài có bán kính trong là b . Một đầu của hệ được nhúng trong một chất lỏng có hằng số điện môi ϵ và mật độ ρ như trên hình 1.55. Một hiệu điện thế V_0 được đặt vào tụ điện. Giả thiết rằng tụ điện được cố định trong không gian và không có một dòng điện dẫn nào chạy qua chất lỏng. Hãy tính chiều cao cân bằng của cột chất lỏng trong ống.

(MIT)

Lời giải:

Gọi l là chiều dài của ống hình trụ và x là chiều cao của chất lỏng điện môi chứa trong hình trụ đó. Bỏ qua hiệu ứng rìa, điện dung của tụ điện là

$$C = \frac{2\pi[(\epsilon - \epsilon_0)x + \epsilon_0 l]}{\ln(b/a)}.$$



Hình 1.55

Vì hiệu điện thế V_0 đặt vào tụ điện được giữ không đổi, nên theo bài tập 1051 lực tác dụng lên chất điện môi hướng lên trên và có độ lớn là

$$F = \frac{V_0^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{\pi(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2}{\ln(b/a)}.$$

Lực này cân bằng với trọng lượng của cột chất lỏng

$$\frac{\pi(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2}{\ln(b/a)} = \rho g \cdot \pi(b^2 - a^2)h,$$

Suy ra

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2}{\rho g(b^2 - a^2)\ln(b/a)}.$$

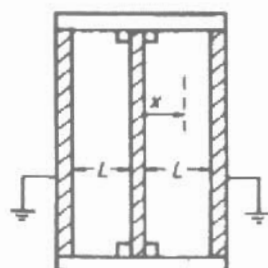
1100

Như thấy trên hình 1.56, tấm kim loại ở giữa chứa tổng điện tích Q có thể chuyển động được nhưng nó bị kín không cho khí lọt qua khi nó trượt theo thanh bình. Không khí ở hai phía của tấm kim loại có thể chuyển động đó ban đầu có cùng áp suất là p_0 . Hãy tìm (các) giá trị của x , ở đó tấm kim loại có thể ở trong trạng thái cân bằng ổn định.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Ban đầu, vì điện thế ở hai phía của tấm ở giữa như nhau, nên ta có thể coi ba tấm đó tạo nên hai tụ điện song song với điện dung C_1 và C_2 . Khi tấm giữa



Hình 1.56

được đặt tại vị trí x , Điện dung toàn phần của các tụ điện song song này là

$$C = C_1 + C_2 = \frac{A}{\varepsilon_0(L+x)} + \frac{A}{\varepsilon_0(L-x)} = \frac{2AL}{\varepsilon_0(L^2 - x^2)}.$$

Do đó năng lượng tĩnh điện của hệ là

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 Q^2 (L^2 - x^2)}{4AL}.$$

Vì điện tích Q được phân bố đều khắp tấm giữa nên khi tấm đó chuyển dịch đã thực hiện một công chống lại lực tĩnh điện. Do đó lực tĩnh điện được cho bởi

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{Q^2 \varepsilon_0 x}{2AL}.$$

Vì $F > 0$, lực này hướng theo chiều tăng x . Vì một vật dẫn điện cũng là vật dẫn nhiệt tốt nên sự chuyển động của tấm giữa được coi như đẳng nhiệt. Gọi áp suất do không khí sinh ra ở phía trái và phía phải của tấm giữa lần lượt là p_1 và p_2 . Theo định luật Boyle, ta có

$$p_1 = \frac{p_0 L}{L+x}, \quad p_2 = \frac{p_0 L}{L-x}.$$

Khi tấm giữa ở vị trí cân bằng, lực tĩnh điện được cân bằng với lực sinh ra do sự chênh lệch áp suất, tức là

$$F_e = (p_2 - p_1)A,$$

hay

$$\frac{Q^2 \varepsilon_0 x}{2AL} = \frac{2Ap_0 Lx}{L^2 - x^2}.$$

Vị trí cân bằng của tấm giữa là

$$x = \pm L \left(1 - \frac{4p_0 A^2}{\varepsilon_0 Q^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1101

Hãy quan sát một người ở gần bạn nhất. Thực chất anh ta (hoặc cô ta) không phải là dạng cầu nhưng giả thiết rằng anh ta (hoặc cô ta) là như vậy. Ấn định cho anh ta (hoặc cô ta) một bán kính hiệu dụng R và cần nhớ rằng anh ta (hoặc cô ta) là một vật dẫn điện khá tốt. Phòng ở trong trạng thái cân bằng tại nhiệt độ T và được che chắn điện từ. Hãy làm một ước lượng thô về giá trị căn quân bình phương (rms) của điện tích trên người đó.

(Princeton)

Lời giải:

Điện dung của một vật dẫn điện hình cầu bán kính R là $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Nếu quả cầu này chứa điện tích Q thì năng lượng điện của nó là $Q^2/2C$. Theo nguyên lý cổ điển về sự phân bố đều năng lượng

$$\frac{\overline{Q^2}}{2C} = \frac{1}{2}kT,$$

hay

$$\sqrt{\overline{Q^2}} = \sqrt{CkT},$$

trong đó k là hằng số Boltzman.

Lấy $R = 0.5 \text{ m}$, $T = 300 \text{ K}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{Q^2}} &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0 RkT} \\ &= \sqrt{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.5 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300} \\ &= 4.8 \times 10^{-16} \text{ C}. \end{aligned}$$

1102

Một quả cầu dẫn điện cô lập, bán kính a , có tâm đặt tại một khoảng cách z tính từ một tấm dẫn vô hạn (nổi đất). Giả thiết rằng $z \gg a$, hãy tìm:

(a) sự đóng góp chủ yếu vào điện dung giữa quả cầu và mặt phẳng dẫn điện.

(b) bổ chính bậc nhất (không triệt tiêu) vào giá trị ở câu (a) khi điện dung được biểu diễn dưới dạng khai triển chuỗi lũy thừa theo a/z .

(c) số hạng chính của lực tác dụng giữa quả cầu và mặt phẳng, khi quả cầu mang điện tích Q . Năng lượng để tách hoàn toàn quả cầu khỏi mặt phẳng dẫn điện đó là bao nhiêu? Năng lượng này như thế nào so với năng lượng để tách hoàn toàn hai quả cầu giống như vậy có điện tích $+Q$ và $-Q$, khoảng cách ban đầu giữa chúng là $2z$? Hãy giải thích sự khác nhau giữa hai giá trị đó.

(Columbia)

Lời giải:

(a) Để tìm bổ chính số hạng chủ yếu, ta có thể coi khoảng cách giữa quả cầu dẫn điện và mặt phẳng dẫn là vô hạn. Khi đó điện dung của toàn hệ tương ứng với điện dung của một quả cầu dẫn điện cô lập có bán kính a , giá trị của nó là

$$C = 4\pi\epsilon_0 a.$$

(b) Để tìm bổ chính bậc nhất, ta xét điện trường được thiết lập bởi một điện tích Q đặt tại tâm của quả cầu và một điện tích ảnh $-Q$ của nó đặt tại khoảng cách z tính từ phía kia của mặt phẳng. Tại một điểm trên đường thẳng đi qua tâm quả cầu và vuông góc với mặt phẳng, độ lớn của điện trường này là

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z-h)^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z+h)^2},$$

ở đây h là khoảng cách từ điểm này đến mặt phẳng. Điện thế của quả cầu khi đó là

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^{z-a} E dh = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z-h)} \Big|_0^{z-a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z+h)} \Big|_0^{z-a} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 - \frac{a}{2z-a} \right] \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{a}{2z} \right). \end{aligned}$$

Do đó điện dung là

$$C = \frac{Q}{V} \approx 4\pi\epsilon_0 a \left(1 + \frac{a}{2z} \right)$$

và bổ chính bậc nhất là $2\pi\epsilon_0 a^2/z$.

(c) Khi quả cầu mang điện tích Q , số hạng chính của lực giữa nó và mặt phẳng dẫn điện chỉ là lực hút giữa hai điện tích điểm Q và $-Q$ cách nhau một khoảng cách $2z$. Lực đó là

$$F = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 z^2}.$$

Năng lượng cần thiết để tách hoàn toàn quả cầu ra khỏi mặt phẳng là

$$W_1 = -\int_z^\infty F dr = \int_z^\infty \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 z}.$$

Mặt khác, năng lượng cần thiết để tách hoàn toàn hai điện tích Q và $-Q$ cách nhau một khoảng cách ban đầu $2z$ là

$$W_2 = -\int_{2z}^\infty F dr = \int_{2z}^\infty \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 z} = 2W_1.$$

Sự khác nhau về năng lượng cần thiết trong hai trường hợp này là do trong trường hợp đầu phải chuyển dịch Q từ z đến ∞ trong khi ở trường hợp thứ hai phải chuyển dịch Q từ z đến ∞ và $-Q$ từ $-z$ đến $-\infty$ với lực giống nhau, đều có giá trị bằng $-Q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ áp dụng cho cả ba điện tích.

1103

Một lưỡng cực có chiều dài cố định $2R$, có khối lượng m ở mỗi đầu và có điện tích $+Q_2$ ở một đầu, điện tích $-Q_2$ ở đầu kia. Lưỡng cực này ở trên một quỹ đạo bao quanh một điện tích điểm cố định $+Q_1$ (các đầu của lưỡng cực bị buộc phải nằm trong mặt phẳng quỹ đạo). Hình 1.57 cho định nghĩa của các tọa độ r, θ, α . Hình 1.58 cho các khoảng cách nối từ $+Q_1$ đến các đầu của lưỡng cực.

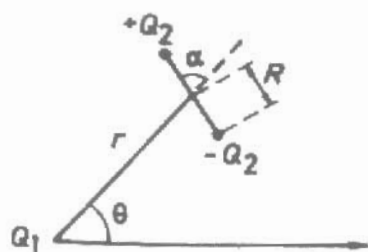
(a) Hãy sử dụng hình thức luận Lagrange để xác định các phương trình chuyển động trong hệ tọa độ (r, θ, α) , lấy gần đúng $r \gg R$ khi tính điện thế.

(b) Lưỡng cực ở trên một quỹ đạo hình tròn quanh Q_1 với $\dot{r} \approx \ddot{r} \approx \dot{\theta} \approx 0$ và $\alpha \ll 1$. Hãy tìm chu kỳ của các dao động nhỏ theo tọa độ α .

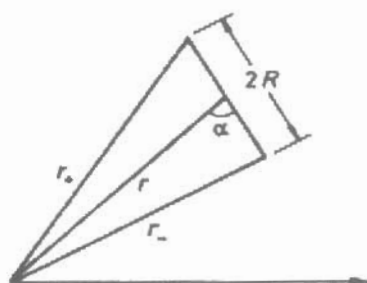
(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Góc giữa lưỡng cực và trục cực là $(\theta + \alpha)$, như vậy tốc độ góc của lưỡng cực quanh khối tâm của nó là $(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$. Khi đó động năng của lưỡng cực là



Hình 1.57



Hình 1.58

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \cdot 2mR^2 \cdot (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2$$

$$= m\dot{r}^2 + m(r^2 + R^2)\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\alpha}^2 + 2mR^2\dot{\theta}\dot{\alpha}.$$

Hơn nữa, thế năng của lưỡng cực là

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_+} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_-}.$$

Vì

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 + R^2 \pm 2rR \cos \alpha} = r \sqrt{1 \pm 2 \frac{R}{r} \cos \alpha + \left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

$$\approx r \sqrt{1 \pm 2 \frac{R}{r} \cos \alpha} \approx r \left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{R}{r} \cos \alpha\right) = r \pm R \cos \alpha,$$

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = -\frac{2R \cos \alpha}{r^2 - R^2 \cos^2 \alpha} \approx -\frac{2R \cos \alpha}{r^2},$$

và thế năng là

$$V = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2R \cos \alpha}{r^2}.$$

Từ các biểu thức trên tìm được Lagrange $L = T - V$. Phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

cho

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2R \cos \alpha}{r^2} = 0; \quad (1)$$

Từ các phương trình Lagrange khác

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cho

$$(r^2 + R^2)\ddot{\theta} + R^2\ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0, \quad (2)$$

và $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ cho

$$mR(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2} = 0. \quad (3)$$

Các phương trình (1)-(3) là các phương trình chuyển động của lưỡng cực.

(b) Khi $\dot{r} \approx \ddot{r} \approx 0$, r là một hằng số. Cũng với $\ddot{\theta} = 0$, $\alpha \ll 1$ (nghĩa là $\sin \alpha \approx \alpha$), phương trình (3) trở thành

$$mR\ddot{\alpha} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

Điều này cho thấy rằng chuyển động theo α là dao động điều hoà với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{mRr^2}}.$$

Chu kì của các dao động nhỏ này là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{Q_1 Q_2} \cdot mRr^2}.$$

1104

Khí quyển của trái đất là một vật dẫn điện vì nó chứa các hạt tải tự do được sinh ra do sự ion hoá của các tia vũ trụ. Hãy cho rằng mật độ các điện tích tự do này không đổi theo không gian và thời gian và không phụ thuộc vào vị trí nằm ngang.

(a) Hãy xây dựng các phương trình và các điều kiện biên để tính toán điện trường khí quyển như một hàm của độ cao so với mặt biển nếu điện trường ở gần mặt đất là một hằng số theo thời gian và có phương thẳng đứng, nó không thay đổi theo chiều nằm ngang và có độ lớn là 100 vôn/mét. Bạn có thể giả thiết rằng mặt đất là hoàn toàn phẳng nếu muốn.

(b) Hãy ước tính sự phụ thuộc vào độ cao so với mặt biển của độ dẫn.

(c) Giải các phương trình của phần (a).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Đây là bài tập về trường dừng trong một vật dẫn. Phương trình liên tục $\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ và định luật Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ cho phương trình cơ bản sau

$$\frac{dj}{dz} = 0, \quad (1)$$

lấy trục z theo chiều thẳng đứng.

Điều kiện biên được cho là

$$E|_{z=0} = 100 \text{ V/m}.$$

(b) Vì tần số va chạm giữa một điện tích tự do và những phân tử khí quyển tỉ lệ với mật độ của các phân tử khí quyển, trong khi độ dẫn tỉ lệ nghịch với tần số va chạm, nên độ dẫn sẽ tỉ lệ nghịch với mật độ của các phân tử khí quyển. Đối với một khí quyển đẳng nhiệt, mật độ của các phân tử khí quyển là

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}},$$

ở đây m là khối lượng trung bình của một phân tử, g là gia tốc trọng trường, k là hằng số Boltzman và T là nhiệt độ tuyệt đối. Ngoài ra, độ dẫn cũng tỉ lệ với mật độ của các điện tích tự do. Vì mật độ này được giả thiết là không phụ thuộc vào chiều cao so với mặt biển nên sự phụ thuộc chiều cao so với mặt biển của độ dẫn có thể được cho dưới dạng:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{mgz}{kT}}. \quad (2)$$

(c) Phương trình (1) cho

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{E}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz}.$$

Sử dụng phương trình (2) và tích phân ta có

$$E = E_0 e^{-\frac{mgz}{kT}},$$

trong đó $E_0 = 100 \text{ V/m}$.

1105

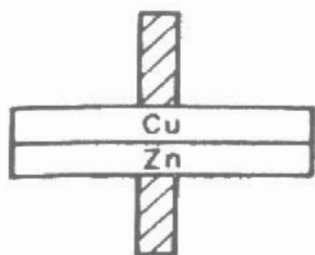
Hai tấm kim loại phẳng, mỗi tấm có đường kính 5 cm, một tấm bằng đồng, một tấm bằng kẽm (và cả hai được lắp cán cách điện), được đặt tiếp xúc với nhau (xem H. 1.59) và sau đó tách ra xa nhau thật nhanh.

(a) Hãy ước tính điện tích cực đại có thể chờ đợi tìm thấy trên từng tấm sau khi tách ra xa nhau ($\gg 5 \text{ cm}$).

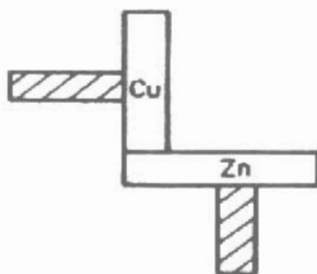
(b) Ông Volta trong thí nghiệm loại này (năm 1795) đã quan sát được điện tích có bậc độ lớn là 10^{-9} C . Hãy so sánh kết quả này với kết quả tính toán của bạn trong phần (a), giải thích sự khác nhau.

(c) Có thể mong đợi điện tích bằng bao nhiêu nếu các tấm kim loại đó, trước khi tách ra, được sắp xếp như trên hình 1.60.

(Columbia)



Hình 1.59



Hình 1.60

Lời giải:

(a) Khi hai tấm kim loại đang tiếp xúc, chúng có thể được coi như một tụ điện phẳng. Gọi δ là khoảng cách được tách ra giữa chúng và V là hiệu điện thế, độ lớn của điện tích trên từng tấm là

$$Q = CV = \frac{\pi \epsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2 V}{\delta}.$$

Vì $d = 0,05 \text{ m}$, lấy điện thế tiếp xúc $V \sim 10^{-3} \text{ V}$ và $\delta \sim 10^{-10} \text{ m}$, ta nhận được

$$Q \approx 1,7 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

(b) Các giá trị ước lượng ở trên lớn hơn so với kết quả thí nghiệm của Volta ($\approx 10^{-9} \text{ C}$). Điều này chắc chắn do những nguyên nhân sau đây. Đầu tiên, do độ gồ ghề của bề mặt các tấm kim loại, sự cách nhau trung bình của chúng phải lớn hơn 10^{-10} m . Thứ hai, trong quá trình tách ra các điện tích có thể tích tụ trên một vài đỉnh của tấm (cũng vì có độ gồ ghề), do vậy một vài điện tích có thể bị mất đi giữa hai tấm kim loại.

(c) Theo hình 1.60, điện tích tiếp xúc nhỏ hơn so với điện tích tiếp xúc trong trường hợp (a), do đó các điện tích tương ứng sau khi tách ra sẽ giảm đi nhiều.

1106

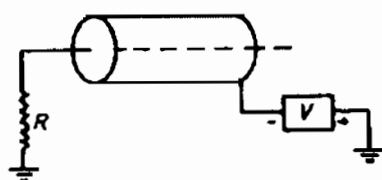
Một buồng ion hoá được chế tạo gồm một ống hình trụ bán kính a và chiều dài L với một sợi dây bán kính b dọc theo trục của hình trụ. Ống hình trụ được nối với một hiệu điện thế âm cao $-V_0$ và sợi dây được nối đất qua một điện trở R như thấy trên hình 1.61. Buồng ion hoá được chứa đầy khí argon tại áp suất không khí. Hãy mô tả (một cách định lượng) hiệu điện thế ΔV qua điện trở R như một hàm của thời gian đối với trường hợp, trong đó một hạt ion hoá di chuyển trong ống song song với trục tại khoảng cách $r = a/2$ tính từ trục giữa và tạo ra tổng số $N = 10^5$ cặp electron - ion.

Cho: $a = 1 \text{ cm}$, $b = 0,1 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $V_0 = 1000 \text{ V}$, $R = 10^5 \Omega$,

$$\text{Độ linh động của ion argon } \mu_+ = 1,3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{V}}.$$

$$\text{Độ linh động của electron } \mu_- = 6 \times 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{V}}.$$

(Gợi ý: Để làm gần đúng một cách hợp lý, bạn phải tính hằng số thời gian RC của hệ này)



Hình 1.61

Hiệu điện thế (1000 V) là không đủ để sinh ra sự nhân ion ở gần sợi dây (nghĩa là dây không phải là một máy đếm tỉ lệ). Lưu ý rằng hình dạng chi tiết của sườn xung lên là quan trọng

(Princeton)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, φ, z) với trục z dọc theo trục của ống hình trụ. Điện trường tại điểm (r, φ, z) thỏa mãn biểu thức $\mathbf{E} \propto \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$ theo định lý Gauss. Từ

$$-\int_b^a E(r) dr = -V_0$$

ta nhận được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V_0}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \mathbf{e}_r.$$

Nếu Q_0 là điện tích trên sợi dây, định lý Gauss cho

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0 L r} \mathbf{e}_r.$$

Theo đó điện dung của buồng là

$$\begin{aligned} C &= Q_0/V_0 = 2\pi\epsilon_0 L / \ln(a/b) \\ &= 2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 0,5 / \ln\left(\frac{1}{0,01}\right) \\ &= 6 \times 10^{-12} \text{ F}. \end{aligned}$$

Vì vậy hằng số thời gian của mạch điện là

$$RC = 10^5 \times 6 \times 10^{-12} = 6 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Độ linh động của một hạt tích điện được định nghĩa như sau $\mu = \frac{1}{E} \frac{dr}{dt}$, hoặc $dt = \frac{dr}{\mu E}$. Do đó thời gian cần để đẩy hạt từ r_1 tới r_2 là

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu_0 \frac{V_0}{r \ln(a/b)}} = \frac{\ln(a/b)}{2\mu V_0} (r_2^2 - r_1^2).$$

Đối với một electron, để đẩy từ $r = a/2$ đến sợi dây, ta cần có lượng thời gian

$$\begin{aligned} \Delta t_- &\approx \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 \right] \approx \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_- V_0} \cdot \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{\ln 100}{2 \times 6 \times 10^3 \times 10^{-4} \times 1000} \times \frac{10^{-4}}{4} = 9,6 \times 10^{-8} \text{ s} \end{aligned}$$

và đối với một ion dương để đạt đến thành của ống hình trụ, ta cần một thời gian

$$\begin{aligned} \Delta t_+ &= \frac{\ln(\frac{a}{b})}{2\mu_+ V_0} \left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] = \frac{\ln \frac{a}{b}}{2\mu_+ V_0} \cdot \frac{3a^2}{4} \\ &= \frac{\ln 100}{2 \times 1,3 \times 10^{-4} \times 1000} \times \frac{3 \times 10^{-4}}{4} = 1,3 \times 10^{-3} \text{ s}. \end{aligned}$$

Từ kết quả trên dẫn đến $\Delta t_- \ll RC \ll \Delta t_+$. Khi các electron đẩy từ $r = a/2$ đến sợi dây anode tại $r = b$ thì các ion dương về cơ bản ở trạng thái dừng tại $r = a/2$ và sự phóng điện qua điện trở R cũng được bỏ qua. Hiệu điện thế đầu ra ΔV của sợi dây anode tại $t \leq \Delta t_-$ (lấy $t = 0$ ngay khi các hạt tải gây ion hoá rơi vào buồng) có thể dẫn ra được từ nguyên lý bảo toàn năng lượng. Khi một điện tích q ở trong buồng dịch chuyển một đoạn thì công thực hiện bởi điện trường là $qE \cdot dr$ tương ứng với sự giảm của năng lượng lưu trữ trong điện dung $d(\frac{CV^2}{2})$. Do đó $CVdV = -qE \cdot dr = -qEdr$. Bởi vì $\Delta V \ll V_0, V \approx V_0$ nên ta có thể viết

$$CV_0 dV = -qE dr.$$

Lấy tích phân ta được

$$\begin{aligned} CV_0 \Delta V &= -q \int_{a/2}^r E dr = -q \int_{a/2}^r \frac{V_0}{r \ln(\frac{a}{b})} dr \\ &= -q \frac{V_0}{\ln(\frac{a}{b})} \ln \left(\frac{2r}{a} \right). \end{aligned}$$

Lưu ý rằng

$$\Delta t_- \approx \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\mu_- V_0} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 \right],$$

ta có

$$t = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\mu_- V_0} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - r^2 \right],$$

hay

$$r = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \frac{t}{\Delta t_-} \left(1 - \frac{2b}{a} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

và vì $q = -Ne$,

$$\Delta V = \frac{Ne}{C} \ln \left\{ 1 - \frac{[1 - (\frac{2b}{a})^2]t}{\Delta t_-} \right\}^{1/2} / \ln \left(\frac{a}{b} \right), \quad 0 \leq t \leq \Delta t_-.$$

tại $t = \Delta t_-$,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{Ne}{C} \ln \left(\frac{2b}{a} \right) / \ln \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= - \frac{10^5 \times 1,6 \times 10^{-19}}{6 \times 10^{-12}} \times \frac{\ln 50}{\ln 100} \\ &= -2,3 \times 10^{-3} \text{ V}. \end{aligned}$$

Khi đó, điện áp này được phóng điện qua mạch RC . Do đó sự thay đổi của ΔV theo thời gian như sau:

$$\Delta V = 5,86 \times 10^{-3} \ln \left[1 - \frac{(1 - \frac{1}{50^2})^{1/2} t}{9,6 \times 10^{-8}} \right] \text{ V}, \quad \text{với } 0 \leq t \leq 9,6 \times 10^{-8} \text{ s};$$

$$\Delta V = -2,3 \times 10^{-3} \exp \left(- \frac{t}{6 \times 10^{-7}} \right) \text{ V}, \quad \text{với } t > 9,6 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

Điều này có nghĩa là hiệu điện thế qua hai đầu của điện trở R giảm tới $-2,3$ mV trong thời gian Δt_- và sau đó tăng đến 0 với hằng số thời gian RC . Nhận xét cuối cùng là khi các ion được đẩy đi một cách từ từ và các điện tích cảm ứng trên hai điện cực của buồng ion hoá được phóng điện nhanh qua mạch RC thì ảnh hưởng của chúng lên dạng sóng của ΔV có thể hoàn toàn bỏ qua.

1107

Một chùm electron mang năng lượng cao có thể xuyên vuông góc qua một lá kim loại được nối đất. Chùm tia này bắt đầu phóng tại $t = 0$ với cường độ dòng điện $I = 3 \times 10^6$ amp và diện tích tiết diện của chùm là $A = 1000 \text{ cm}^2$. Sau khi chùm tia đã chạy qua trong 10^{-8} giây, hãy tính điện trường do điện tích không gian của chùm sinh ra tại điểm P trên mặt sau của lá kim loại và ở gần trục của chùm tia.

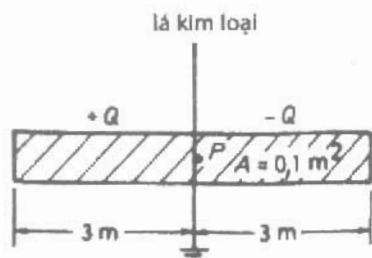
(Wisconsin)

Lời giải:

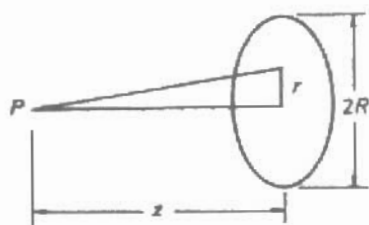
Tại $t = 10^{-8}$ s, chùm tia tạo thành một hình trụ điện tích ở phía phải của lá kim loại với diện tích tiết diện là $A = 1000 \text{ cm}^2$ như thấy trên hình 1.62. Chiều dài h của hình trụ là $ct = 3 \times 10^8 \times 10^{-8} = 3 \text{ m}$, khi giả thiết rằng các electron mang năng lượng đủ cao để cho tốc độ của chúng gần với tốc độ ánh sáng. Ta có thể coi điện tích toàn phần

$$-Q = -It = -3 \times 10^6 \times 10^{-8} = -3 \times 10^{-2} \text{ C}$$

phân bố đồng đều trong hình trụ này. Vì điện tích ở phía trái của lá kim loại không đóng góp vào điện trường tại điểm P (hiệu ứng che chắn) nên sự tác dụng của lá kim loại nối đất có thể được thay bằng một hình trụ điện tích ảnh. Hình trụ ảnh này và hình trụ thật đối xứng với nhau qua lá kim loại và điện tích của chúng trái dấu nhau (xem hình 1.62).



Hình 1.62



Hình 1.63

Trước hết, ta hãy tính điện trường tại điểm P trên trục của một đĩa tích điện đều có mật độ điện tích mặt σ như trên hình 1.63. Điện thế tại P là

$$\begin{aligned}\varphi_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma \pi dr^2}{\sqrt{z^2 + r^2}} \\ &= \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{z^2 + r^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} - z],\end{aligned}$$

và cường độ điện trường tại P là

$$E_P = -\frac{\partial\varphi_P}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right).$$

Bây giờ trở lại hình 1.62. Điện trường tại điểm P tạo ra bởi hình trụ điện tích bên phải là

$$\begin{aligned}E_P &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^h \left(\frac{Q}{h\pi R^2} dz \right) \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h R^2} \int_0^h \left(\frac{\frac{1}{2} dz^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - dz \right) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h R^2} \left[\sqrt{z^2 + R^2} \Big|_0^h - h \right] \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h R^2} \left[\sqrt{h^2 + R^2} - R - h \right].\end{aligned}$$

Do đó điện trường toàn phần tại P là

$$\begin{aligned}E_P &= \frac{-Q}{\pi\epsilon_0 h R^2} [R + h - \sqrt{R^2 + h^2}] \\ &= \frac{-3 \times 10^{-2}}{\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times \frac{0,1}{\pi}} \times \left[3 + \sqrt{\frac{0,1}{\pi}} - \sqrt{3^2 + \frac{0,1}{\pi}} \right] \\ &= -1,42 \times 10^9 \text{ V/m}.\end{aligned}$$

Dấu âm biểu thị rằng cường độ điện trường hướng về bên phải.

Hình 1.64 trình bày một phần cấu trúc tuần hoàn kiểu răng lược gồm các điện cực kim loại xen kẽ với các vùng trống trong một máy gia tốc tĩnh điện.

Điện thế trên một điện cực bất kì cao hơn điện thế ở điện cực trước nó là V_0 . Cấu trúc này là cấu trúc hai chiều trong đó các điện cực có kích thước vô hạn theo hướng z . Đối tượng của bài tập này là tìm điện trường trong vùng $|y| < W$.

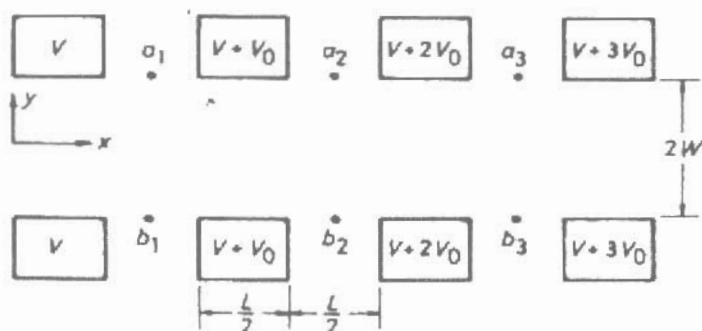
(a) Để đơn giản về mặt toán học, ta giả thiết rằng E dọc theo những đường thẳng, ví dụ như đường thẳng giữa các điểm a và b , là không đổi và không có thành phần y . Điều này ngụ ý gì về điện thế tĩnh điện giữa a và b ? Người ta phải làm như thế nào để đạt được điều kiện biên như vậy trong thực tiễn?

(b) Như một sự hướng dẫn cho các tính toán tiếp theo, hãy sử dụng các lập luận vật lý để vẽ phác các đường sức điện trường (có cả hướng) trong cấu trúc này.

(c) Hãy tìm biểu thức của điện thế tĩnh điện $\phi(x, y)$ trong vùng $|y| < W$ như là một tổng vô hạn các nghiệm riêng của phương trình Laplace.

(d) Hãy tìm điện trường $E(x, y)$.

(MIT)



Hình 1.64

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ toạ độ như trên hình 1.64. Điện trường giữa các điểm a_i và b_i là không đổi và không có thành phần y . Điều này chỉ ra rằng các đường sức điện trường giữa a_i và b_i là song song với trục x . Về phương diện toán học,

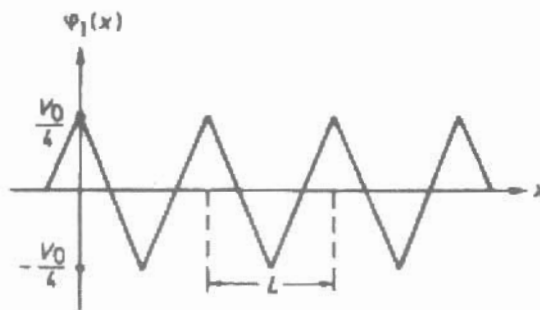
điện thế có thể biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}\varphi(x, \pm W) &= \begin{cases} V + nV_0, & x \in [\frac{2n}{2}L, \frac{2n+1}{2}L], \\ V - nV_0, & x \in [\frac{2n-1}{2}L, \frac{2n}{2}L], \end{cases} \\ &= \frac{V_0 x}{L} - \frac{V_0}{4} + V \\ &\quad + \begin{cases} nV_0 + \frac{V_0}{4} - \frac{V_0 x}{L}, & x \in [\frac{2nL}{2}, \frac{2n+1}{2}L] \\ -nV_0 + \frac{V_0}{4} + \frac{V_0 x}{L}, & x \in [-\frac{2n-1}{2}L, \frac{2nL}{2}] \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \\ &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x). \end{aligned}$$

Do đó $\varphi_2(x)$ biểu thị hình sóng răng cưa như trên hình 1.65. Chuỗi Fourier theo các hàm cosin của nó có chu kỳ L là

$$\begin{aligned}\varphi_2(x, \pm W) &= \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2m\pi x}{L} \int_0^L \varphi_2(x, \pm W) \cos \frac{2m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2V_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos \frac{2(2m+1)\pi x}{L}. \end{aligned}$$

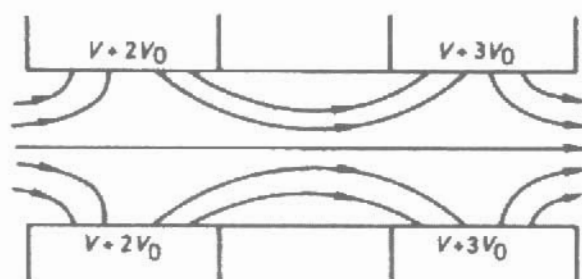
Để thực hiện được những điều này trong một máy gia tốc tĩnh điện, khoảng cách của các điện cực theo hướng y phải lớn hơn rất nhiều so với L .



Hình 1.65

(b) Các đường sức điện trường trong máy gia tốc được chỉ ra trên hình 1.66 (ở đây chúng tôi chỉ vẽ các đường sức giữa hai điện cực lân cận; bức tranh tổng thể sẽ được lập lại giống hệt như vậy).

(c) Điện thế trong vùng $|y| < W$ thỏa mãn phương trình và các điều kiện



Hình 1.66

biên sau

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = 0, \\ \phi(x, \pm W) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x). \end{cases}$$

Định nghĩa $\psi(x, y) = \phi(x, y) + V - \frac{V_0}{4} + \frac{V_0 x}{L}$, nó thoả mãn phương trình và điều kiện biên sau

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = 0, \\ \psi(x, \pm W) = \varphi_2(x). \end{cases}$$

Vì $\varphi_2(x)$ trong điều kiện biên là một hàm tuần hoàn chẵn với chu kì L (xem hình 1.65), nên cũng phải là hàm tuần hoàn chẵn của x . Do đó, ta có thể viết

$$\psi(x, y) = \psi_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \psi_m(y)$$

và thay nó vào phương trình của $\psi(x, y)$. Ta ngay lập tức nhận được

$$\psi_m(y) = a_m \cosh \frac{2m\pi y}{L} + b_m \sinh \frac{2m\pi y}{L}.$$

Cũng như vậy, thay $\psi(x, y)$ vào điều kiện biên và so sánh các hệ số, ta nhận được

$$\psi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi y\right]}{\cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi W\right]} \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L}\pi x\right].$$

Do đó

$$\phi(x, y) = V - \frac{V_0}{L} + \frac{V_0 x}{L} + \frac{2V_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi W\right]} \cdot \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi y\right] \cos\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi x\right].$$

(d) Sử dụng $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, ta nhận được các thành phần điện trường như sau

$$\begin{cases} E_x = -\frac{V_0}{L} + \frac{4V_0}{\pi L} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi y\right] \sin\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi x\right]}{(2n+1) \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi W\right]}, \\ E_y = -\frac{4V_0}{\pi L} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sinh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi y\right] \cos\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi x\right]}{(2n+1) \cosh\left[\frac{2(2n+1)}{L} \pi W\right]}. \end{cases}$$

PHẦN II

TỪ TRƯỜNG TĨNH VÀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ CHUẨN DỪNG

1. TỪ TRƯỜNG CỦA CÁC DÒNG ĐIỆN (2001–2038)

2001

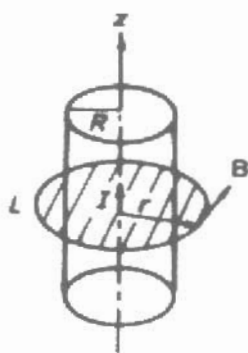
Một dây dẫn hình trụ có độ từ thẩm μ mang một dòng điện không đổi I . Nếu bán kính của dây dẫn là R , hãy tìm $\mathbf{B}$ và $\mathbf{H}$ bên trong và bên ngoài dây dẫn.

(Wisconsin)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ với trục z dọc theo trục của dây dẫn và hướng dương dọc theo chiều dòng điện như chỉ rõ trên hình 2.1. Vì sự phân bố đồng đều của dòng điện, nên mật độ dòng điện là

$$\mathbf{j} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z.$$



Hình 2.1

Xét một điểm ở khoảng cách r tính từ trục của dây dẫn. Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I,$$

với L là vòng tròn bán kính r có tâm nằm trên trục z , đối với $r > R$, ta có

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta,$$

hay

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$$

vì đối xứng nên $\mathbf{H}(r)$ và $\mathbf{B}(r)$ không phụ thuộc θ . Đối với $r < R$, ta có

$$I(r) = \pi r^2 j = \frac{I r^2}{R^2}$$

và định luật Ampe cho các kết quả sau

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I r}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\theta.$$

2002

Một vật dẫn hình trụ dài không nhiễm từ có bán kính trong là a và bán kính ngoài là b mang một dòng điện I . Mật độ dòng điện trong vật dẫn là đồng đều. Hãy tìm từ trường do dòng điện này sinh ra như một hàm của bán kính, trong các trường hợp sau:

- (a) bên trong không gian rỗng ($r < a$);
- (b) bên trong thành vật dẫn ($a < r < b$);
- (c) bên ngoài vật dẫn ($r > b$).

(Wisconsin)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ như trong bài tập 2001. Mật độ dòng điện trong vật dẫn là

$$j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Dòng điện chạy qua một tiết diện bao quanh bởi một vòng tròn bán kính r với $a < r < b$ là

$$I(r) = \pi(r^2 - a^2)j = \frac{I(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}.$$

Do đối xứng, định luật Ampe về lưu số cho các kết quả sau

- (a) $\mathbf{B} = 0$, ($r < a$).
- (b) $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \mathbf{e}_\theta$, ($a < r < b$).

$$(c) \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad (r > b).$$

2003

Hướng của từ trường do một dây dẫn thẳng, dài có mang một dòng điện sinh ra là

- (a) cùng hướng với dòng điện;
- (b) theo hướng bán kính;
- (c) dọc theo các vòng tròn bao quanh dòng điện.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

2004

Từ trường do một sợi cáp dài mang một dòng điện 30.000 A sinh ra tại một khoảng cách 1 m là bao nhiêu? Chọn trong các giá trị sau đây:

- (a) 3×10^{-3} Tesla, (b) 6×10^{-3} Tesla, (c) 0,6 Tesla.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2005

Một yếu tố dòng điện idl được đặt tại gốc tọa độ. Dòng điện có hướng theo trục z . Thành phần x của từ trường tại một điểm $P(x, y, z)$ là bao nhiêu trong các trường hợp sau?

- (a) 0, (b) $-iydl/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, (c) $ixdl/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2006

Xét 3 dây dẫn thẳng, dài vô hạn với bán kính bằng 0, đặt cách nhau những khoảng cách bằng nhau, mỗi sợi dây mang một dòng điện I có cùng hướng.

(a) Hãy xác định vị trí của hai điểm có từ trường bằng 0.

(b) Vẽ phác các đường sức từ trường.

(c) Nếu dây dẫn ở giữa được dịch lên phía trên một khoảng cách x rất nhỏ ($x \ll d$) trong khi 2 dây dẫn kia được giữ cố định. Hãy mô tả một cách định tính sự chuyển động tiếp theo của dây dẫn ở giữa.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Giả sử ba dây dẫn cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó các điểm có từ trường bằng 0 cũng phải nằm trong cùng mặt phẳng đó. Gọi khoảng cách của một điểm như vậy đến dây dẫn giữa là x . Khi đó khoảng cách của điểm này tới hai dây dẫn kia là $d \pm x$. Áp dụng định luật Ampe về lưu số ta nhận được vị trí của một điểm có từ trường bằng 0 từ phương trình

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)}.$$

Phương trình trên có hai nghiệm

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}d,$$

tương ứng với hai điểm nằm trong khoảng giữa dây dẫn giữa và một trong hai dây dẫn bên cạnh, cả hai điểm đều cách dây dẫn giữa một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}d$.

(b) Các đường sức từ trường được biểu diễn trên hình 2.2(a).

(c) Khi dây dẫn giữa được dịch đi một khoảng cách x nhỏ trong cùng mặt phẳng, lực tổng hợp tác dụng lên một đơn vị chiều dài của dây dẫn giữa là

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d+x)} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d-x)}.$$

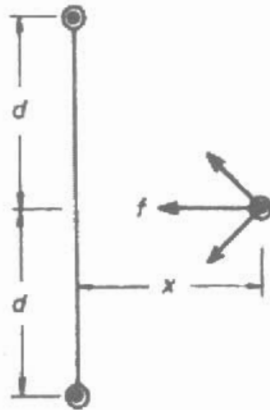
Vì $x \ll d$, lực này được tính gần đúng là

$$f \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2} x.$$



Hình 2.2 (a)

Như vậy, lực này tỉ lệ thuận nhưng ngược hướng với sự dịch chuyển. Do đó, dây dẫn giữa sẽ dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi m d}{\mu_0 I}}$, trong đó m là khối lượng trên một đơn vị chiều dài của dây dẫn giữa.



Hình 2.2 (b)

Tuy nhiên, đây mới chỉ là một trong các mode dao động chuẩn tắc của dây dẫn giữa. Một mode dao động khác được thấy khi dây dẫn này dịch chuyển một khoảng cách nhỏ x ra ngoài và vuông góc với mặt phẳng như trên hình 2.2(b). Lực tổng hợp tác dụng lên dây dẫn này có hướng $-x$, đó là

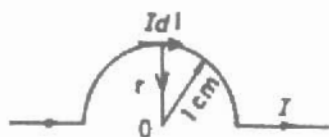
$$f = -2 \cdot \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{d^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2} x.$$

Chuyển động này cũng là một dao động điều hoà với cùng một chu kì như mode dao động tĩnh.

2007

Trên hình 2.3 một dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện $I = 1\text{A}$. Nó có được uốn sao cho có một nửa đường tròn bán kính 1 cm bao quanh gốc toạ độ. Hãy tính từ trường tại gốc toạ độ đó.

(UC, Berkeley)



Hình 2.3

Lời giải:

Các phần thẳng của dây dẫn không đóng góp vào từ trường tại gốc toạ độ O, bởi vì đối với chúng $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = 0$. Ta chỉ cần xét sự đóng góp của phần nửa vòng tròn. Từ trường tại O do phần tử dòng điện $I d\mathbf{l}$ sinh ra là

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Vì trên nửa vòng tròn này $I d\mathbf{l}$ và $\mathbf{r}$ vuông góc với nhau nên $d\mathbf{B}$ luôn luôn hướng vào trong trang giấy. Khi đó từ trường toàn phần do nửa vòng tròn sinh ra tại O là

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I}{4r}.$$

Với $I = 1\text{ A}$, $r = 10^{-2}\text{ m}$, cảm ứng từ tại O là

$$B = 3,14 \times 10^{-5}\text{ T},$$

nó có hướng vuông góc và đi vào phía trong trang sách.

2008

Một xôlênôit bán vô hạn, có bán kính R và n vòng dây trên một đơn vị dài mang một dòng điện I . Hãy tìm biểu thức của thành phần theo bán kính của từ trường $B_r(z_0)$ ở gần trục tại đầu của xôlênôit, ở đó $r \ll R$ và $z = 0$.

(MIT)

Lời giải:

Trước hết, ta tìm biểu thức của cảm ứng từ tại một điểm trên trục của xôlênôit. Như ta thấy trên hình 2.4, từ trường tại điểm z_0 trên trục được cho bởi công thức

$$B(z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2\pi R^2 n I dz}{[R^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}.$$

Đặt $z - z_0 = R \tan \theta$. Khi đó $dz = R \sec^2 \theta d\theta$ và ta nhận được

$$\begin{aligned} B(z_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi R^2 n I \cdot R \sec^2 \theta d\theta}{R^3 \sec^3 \theta} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi n I \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi n I \sin \theta \Big|_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Vì

$$R \tan \theta_0 = z_0,$$

ta có

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{1}{\cot^2 \theta_0 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{R}{z_0}\right)^2 + 1} = \frac{z_0^2}{R^2 + z_0^2},$$

hay

$$\sin \theta_0 = \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}.$$

do đó

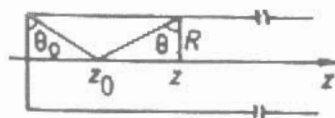
$$B(z_0) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(1 + \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right).$$

Tiếp theo, chúng ta hình dung một hình trụ ngắn dọc theo trục z có chiều dày dz_0 và bán kính r như trên hình 2.5. Áp dụng phương trình Maxwell

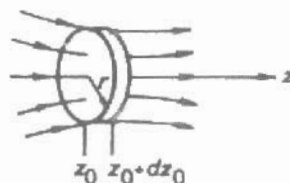
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

đối với bề mặt S của nó, ta nhận được

$$[B_z(z_0 + dz) - B_z(z_0)] \cdot \pi r^2 = B_r(z_0) 2\pi r dz_0.$$



Hình 2.4



Hình 2.5

Đối với $r \ll R$, chúng ta có thể lấy $B_z(z_0) = B(z_0)$. Khi đó phương trình trên cho

$$\frac{dB(z_0)}{dz_0} \pi r^2 = B_r(z_0) \cdot 2\pi r,$$

hay

$$B_r(z_0) = \frac{r}{2} \frac{dB(z_0)}{dz_0} = \frac{\mu_0 n I r R^2}{4(R^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Tại đầu của xôlênôit, tức $z_0 = 0$, thành phần theo bán kính của từ trường là

$$B_r(0) = \frac{\mu_0 n I r}{4R}.$$

2009

Một xôlênôit lõi không khí rất dài, bán kính b có n vòng/mét và mang một dòng điện $i = i_0 \sin \omega t$.

(a) Hãy viết biểu thức của từ trường B bên trong xôlênôit như một hàm của thời gian.

(b) Hãy viết biểu thức của điện trường E bên trong và bên ngoài xôlênôit như một hàm của thời gian (giả thiết rằng $B=0$ bên ngoài xôlênôit). Hãy vẽ phác dạng các đường sức của điện trường và vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của độ lớn của E vào khoảng cách tính từ trục của xôlênôit tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Bên trong xôlênôit, từ trường B là đều và có hướng theo trục, nghĩa là

$$\mathbf{B}(t) = \mu_0 n i(t) \mathbf{e}_z = \mu_0 n i_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

(b) Sử dụng phương trình Maxwell $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ và tính đối xứng trục, ta có thể tìm được điện trường tại các điểm cách trục một khoảng r bên trong và bên ngoài xôlênit. Đối với $r < b$, ta có $E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \cdot \mu_0 n i_0 \omega \cos \omega t$, hay

$$E(t) = -\frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \cos \omega t.$$

Đối với $r > b$, ta có $E \cdot 2\pi r = -\pi b^2 \cdot \mu_0 n i_0 \omega \cos \omega t$, hay

$$E(t) = -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \cos \omega t.$$

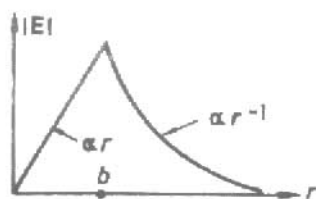
Viết dưới dạng vectơ, ta có

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta, & (r < b) \\ -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta, & (r > b) \end{cases}$$

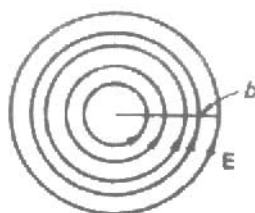
Tại $t = \frac{2\pi}{\omega}$, $\cos \omega t = 1$ và ta có

$$\mathbf{E}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} n i_0 \omega r \mathbf{e}_\theta & (r < b), \\ -\frac{b^2}{2r} n i_0 \omega \mathbf{e}_\theta & (r > b). \end{cases}$$

Mối quan hệ giữa $|E|$ và r được biểu diễn trên hình 2.6. Đối với $r \leq b$, các đường sức điện trường là các vòng tròn đồng tâm như trên hình 2.7.



Hình 2.6



Hình 2.7

2010

Giả thiết rằng từ trường của trái đất được sinh ra bởi một dòng điện tròn nhỏ đặt tại tâm của trái đất. Cho rằng từ trường ở gần cực trái đất là 0,8 gauss,

bán kính của trái đất là $R = 6 \times 10^6 \text{ m}$ và $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, hay sử dụng định luật Biot Savart để tính độ lớn mômen từ của dòng điện nhỏ đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Giả thiết rằng trục của dòng điện tròn có bán kính nhỏ a trùng với trục quay của trái đất được lấy là trục z như trên hình 2.8. Sự đóng góp của một yếu tố dòng điện $I dl$ vào cảm ứng từ trường $\mathbf{B}$ tại một điểm trên trục z , theo định luật Biot-Savart sẽ là

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

$d\mathbf{B}$ ở trong mặt phẳng chứa trục z và $\mathbf{r}$ và vuông góc với $\mathbf{r}$. Lấy tổng sự đóng góp của tất cả các yếu tố dòng điện, do tính đối xứng, $\mathbf{B}$ tổng hợp sẽ nằm dọc theo trục z , nghĩa là

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z, \quad \text{hay}$$

$$dB_z = dB \cdot \frac{a}{r}.$$

Tại cực trái đất, $z = R$. Do $R \gg a$, $r = \sqrt{R^2 + a^2} \approx R$ và

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{R^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{R^3} \cdot 2\pi a \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{R^3}, \end{aligned}$$

Ở đó $S = \pi a^2$ là diện tích của dòng điện tròn.

Mômen từ của dòng điện tròn là $\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_z$, do đó

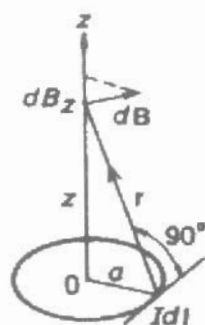
$$m = \frac{2\pi R^3}{\mu_0} B_z.$$

Sử dụng dữ liệu đã cho $R = 6 \times 10^6 \text{ m}$, $B_z = 0,8 \text{ Gs}$, ta nhận được độ lớn của mômen từ là

$$m \approx 8,64 \times 10^{-26} \text{ Am}^2.$$

2011

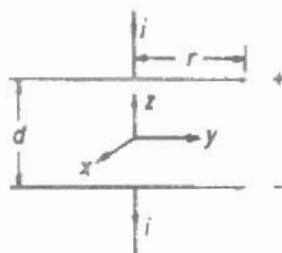
Một tụ điện (trong chân không) bao gồm hai bản kim loại tròn song song, mỗi bản có bán kính r đặt cách nhau một khoảng cách nhỏ d . Một dòng điện



Hình 2.8

điện tích cho tụ điện. Hãy sử dụng vectơ Poynting để chỉ ra rằng tốc độ mà trường điện từ cung cấp năng lượng cho tụ điện chính là tốc độ năng lượng trường tĩnh điện trữ trong tụ điện thay đổi theo thời gian. Chứng minh rằng năng lượng đầu vào cũng là iV , ở đó V là hiệu điện thế giữa các bản kim loại. Giả thiết rằng điện trường là đều ra đến tận mép của các bản cực.

(Wisconsin)



Hình 2.9

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như trong hình 2.9. Khi bản cực dương chứa điện tích Q , điện trường giữa các bản cực là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\pi r^2 \epsilon_0} (-\mathbf{e}_z).$$

Vì Q thay đổi, E cũng thay đổi, làm sinh ra một từ trường giữa các bản cực.

Áp dụng biểu thức

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

đối với đường tích phân C là vòng tròn ở giữa các bản cực có diện tích S song song và bằng diện tích của các bản cực. Do tính đối xứng, ta thu được

$$H \cdot 2\pi r = \frac{dQ}{dt} = i,$$

hay

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r}(-\mathbf{e}_\theta).$$

Do đó, vectơ Poynting của trường điện từ là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}(-\mathbf{e}_z) \times \frac{i}{2\pi r}(-\mathbf{e}_\theta) = -\frac{iQ}{2\pi^2 r^3 \varepsilon_0} \mathbf{e}_r.$$

Thông lượng năng lượng nạp vào tụ điện đi qua mặt cong bao quanh tụ điện. Tốc độ cung cấp năng lượng cho tụ điện là

$$P = \mathbf{N} \cdot 2\pi r d = \frac{iQ}{\pi r^2 \varepsilon_0} d.$$

Năng lượng tĩnh điện trữ trong tụ điện được tính như sau

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot \pi r^2 d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0} \right)^2 \pi r^2 d = \frac{Q^2 d}{2\pi r^2 \varepsilon_0},$$

và tốc độ tăng của năng lượng trong tụ điện là

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{d}{2\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot 2Q \frac{dQ}{dt} = \frac{iQ}{\pi r^2 \varepsilon_0} d.$$

Như vậy ta có

$$P = \frac{dW_e}{dt}.$$

mặt khác $Q = CV = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V$, hay $\frac{Qd}{\varepsilon_0 \pi r^2} = V$, do đó $P = iV$.

2012

Một tụ điện phẳng song song được chế tạo bằng hai bản cực tròn như trên hình 2.10. Hiệu điện thế giữa các bản cực (được cung cấp bằng các dây dẫn

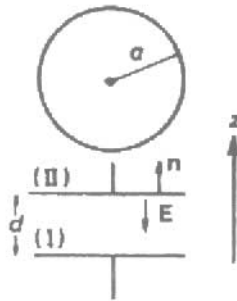
dài không có điện trở) phụ thuộc thời gian theo quy luật $V = V_0 \cos \omega t$. Giả thiết rằng $d \ll a \ll c/\omega$ sao cho hiệu ứng mép của điện trường và sự trễ có thể bỏ qua.

(a) Hãy sử dụng các phương trình Maxwell và lập luận đối xứng để xác định điện trường và từ trường trong vùng I như một hàm của thời gian.

(b) Hãy xác định dòng điện trong dây dẫn và mật độ dòng điện trong các bản cực như một hàm của thời gian?

(c) Từ trường trong vùng II là bao nhiêu? Tìm mối quan hệ giữa sự biến thiên của B qua một bản cực với dòng điện bề mặt trong bản cực đó.

(CUSPEA)



Hình 2.10

Lời giải:

(a) Vì $d \ll a$ nên điện trường trong vùng I được tính gần đúng là $\mathbf{E}^{(I)} = E_z^{(I)} \mathbf{e}_z$, với

$$E_z^{(I)} = -\frac{V_0}{d} \cos \omega t$$

tại thời điểm t .

Áp dụng phương trình Maxwell

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

đối với đường cong tích phân L là vòng tròn bán kính r có tâm đặt trên đường thẳng nối các tâm các bản cực. Do đối xứng $\mathbf{B}^{(I)} = B_\phi^{(I)} \mathbf{e}_\phi$ (tức $B^{(I)}$ là tiếp tuyến với vòng tròn L), ta có

$$2\pi r B_\phi^{(I)} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \left(\frac{V_0 \omega}{d} \sin \omega t \right),$$

hay

$$B_{\phi}^{(I)} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0 \omega}{2d} r \sin \omega t.$$

(b) Gọi σ là mật độ điện tích mặt của bản cực phía trên, bản này là mặt tiếp xúc giữa vùng I và vùng II. Ta có

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_z^{(I)} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} \cos \omega t.$$

Khi đó điện tích toàn phần trên bản cực đó là

$$Q = \pi a^2 \sigma = -\frac{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0}{d} \cos \omega t.$$

Lưu ý rằng σ là đồng đều vì $E_z^{(I)}$ tại bất kỳ thời điểm t nào. Sự thay đổi theo thời gian của Q chỉ ra rằng một dòng điện chạy qua các dây dẫn là dòng điện xoay chiều

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\pi a^2 \varepsilon_0 V_0 \omega}{d} \sin \omega t.$$

Vì điện tích Q trên bản cực thay đổi liên tục theo thời gian, nên sẽ có dòng điện bề mặt trong bản cực. Như thấy trên hình 2.11, dòng điện này chảy về tâm của bản cực theo các hướng bán kính. Dòng điện toàn phần chảy qua vòng tròn đã được tô đậm là

$$i = -\frac{d}{dt} [\pi(a^2 - r^2)\sigma] = \frac{\pi(a^2 - r^2)\varepsilon_0 V_0 \omega}{d} \sin \omega t.$$

Do đó, mật độ dòng tuyến tính (dòng trên một đơn vị dài) trong bản cực là

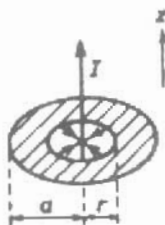
$$\mathbf{j}_l(r) = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{e}_r = \frac{(a^2 - r^2)\varepsilon_0 V_0 \omega}{2dr} \sin(\omega t) \mathbf{e}_r.$$

(c) Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{B}^{(II)} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

Hướng của I và chiều của vòng tròn L tuân theo quy tắc vặn ốc vít. Tại thời gian t , I chảy theo hướng $-z$ và do tính đối xứng trục nên

$$\mathbf{B}^{(II)} = B_{\phi}^{(II)} \mathbf{e}_{\phi}.$$



Hình 2.11

do đó

$$B_{\phi}^{(II)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 a^2 V_0 \omega}{2dr} \sin \omega t.$$

Như vậy,

$$\mathbf{B}_{\phi}^{(II)} - \mathbf{B}_{\phi}^{(I)} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 (a^2 - r^2) V_0 \omega}{2dr} \sin(\omega t) \mathbf{e}_r = \mu_0 \mathbf{j},$$

hay

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}^{(II)} - \mathbf{B}^{(I)}) = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Đây chính là điều kiện biên đối với cường độ từ trường

$$H_t^{(II)} - H_t^{(I)} = j_l.$$

2013

Một tụ điện có các bản cực hình đĩa tròn bán kính R và khoảng cách giữa các bản cực $d \ll R$ chứa đầy một vật liệu có hằng số điện môi K_r . Một hiệu điện thế thay đổi theo thời gian $V = V_0 \cos \omega t$ được đặt trên tụ điện.

(a) Hãy tìm điện trường như một hàm của thời gian (độ lớn và hướng) và tìm mật độ điện tích mặt tự do trên các bản cực tụ điện (bỏ qua hiệu ứng từ và hiệu ứng mép).

(b) Hãy tìm độ lớn và hướng của từ trường giữa các bản cực như một hàm của khoảng cách tính từ trục của đĩa bản cực.

(c) Hãy tính thông lượng của vectơ Poynting từ các cạnh hở của tụ điện.

(Wisconsin)

Lời giải:

Bài tập này tương tự bài tập 2012. Câu trả lời đối với (a) và (b) là

$$(a) \quad \mathbf{E} = \frac{V_0}{d} \cos(\omega t) \mathbf{e}_z, \quad \sigma = \pm k_e \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \cos(\omega t),$$

$$(b) \quad \mathbf{B} = \frac{k_e \varepsilon_0 \mu_0 \omega V_0}{2d} r \sin(\omega t) \mathbf{e}_\theta.$$

(c) Vectơ Poynting tại $r = R$ là

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})|_{r=R} = -\frac{k_e \varepsilon_0 \omega V_0^2 R}{2d^2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \mathbf{e}_r.$$

Như vậy $\mathbf{N}$ có phương theo bán kính trong toạ độ trụ. Do đó thông lượng của vectơ Poynting từ các cạnh hở của tụ điện (nghĩa là mặt cong của hình trụ có chiều cao d và bán kính R) là

$$\phi = 2\pi R d N = \frac{\pi k_e \varepsilon_0 \omega V_0^2 R^2 \sin 2\omega t}{2d}.$$

2014

Một tụ điện phẳng có các bản cực hình tròn bán kính R và đặt cách nhau một khoảng cách $d \ll R$. Hiệu điện thế V trên các bản cực thay đổi theo quy luật $V = V_0 \sin \omega t$. Giả thiết rằng điện trường giữa các bản cực là đều và bỏ qua hiệu ứng rìa và sự bức xạ.

(a) Hãy tìm hướng và độ lớn của cảm ứng từ $\mathbf{B}$ tại điểm P ở khoảng cách r ($r < R$) tính từ trục của tụ điện.

(b) Giả thiết rằng bạn muốn đo từ trường $\mathbf{B}$ tại điểm P bằng cách sử dụng một đoạn dây và một máy hiện sóng nhạy có trở kháng cao. Hãy vẽ phác bố trí thí nghiệm của bạn và ước lượng tín hiệu thu được từ máy hiện sóng.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Theo bài tập 2012, cảm ứng từ tại điểm P là

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 V_0 \omega r}{2d} \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta.$$

(b) Hình 2.12 chỉ ra sơ đồ bố trí thí nghiệm. Một vòng hình vuông nhỏ có diện tích ΔS làm từ một dây dẫn có hai đầu được nối với máy hiện sóng được

đặt tại P sao cho mặt phẳng của vòng đó chứa trục của tụ điện. Một sóng hình sin sẽ xuất hiện trên máy hiện sóng, nó có biên độ và tần số đo được. Các biên độ và tần số này tương ứng với biên độ và tần số của một suất điện động $\mathcal{E}$. Khi đó từ biểu thức

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| = \omega |B| \Delta S$$

ta có thể tìm được biên độ của cảm ứng từ B .



Hình 2.12

2015

Tốc độ trôi của các electron trong 1 mm dây Cu mang dòng điện 10 A là bao nhiêu? 10^{-5} , 10^{-2} , 10^1 , 10^5 cm/s.

(Columbia)

Lời giải:

Là 10^{-2} cm/s.

2016

Tốc độ ngẫu nhiên trung bình của các electron tử trong một vật dẫn là bao nhiêu? 10^2 , 10^4 , 10^6 , 10^8 cm/s.

(Columbia)

Lời giải:

Là 10^6 cm/s.

2017

Nêu điều kiện biên chính xác trong tĩnh từ học tại biên giữa hai môi trường khác nhau?

- (a) Thành phần của $\mathbf{B}$ vuông góc với bề mặt có giá trị như nhau.
- (b) Thành phần của $\mathbf{H}$ vuông góc với bề mặt có giá trị như nhau.
- (c) Thành phần của $\mathbf{B}$ song song với bề mặt có giá trị như nhau.

(CCT)

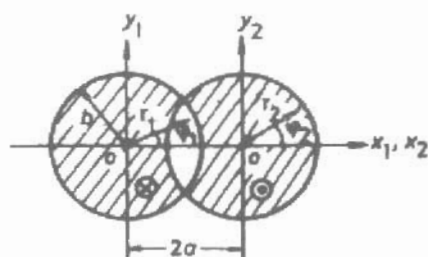
Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2018

Một hệ các vật dẫn có tiết diện được xác định bởi giao tuyến của hai vòng tròn bán kính b có tâm đặt cách nhau một khoảng cách $2a$, như trên hình 2.13. Phần dẫn điện được gạch chéo, vùng không gạch chéo có dạng thấu kính là vùng chân không. Vật dẫn bên trái chứa một dòng điện phân bố đồng đều có mật độ J đi vào phía trong trang sách và vật dẫn bên phải chứa một dòng điện phân bố đồng đều có mật độ J đi ra từ trang sách. Giả thiết rằng độ từ thẩm của vật dẫn giống như độ từ thẩm của chân không. Hãy tìm từ trường các điểm (x, y) bất kì trong vùng chân không giữa hai vật dẫn.

(MIT)



Hình 2.13

Lời giải:

Khi độ từ thẩm của vật dẫn giống độ từ thẩm của chân không, ta có thể coi rằng vùng có dạng thấu kính chứa đầy vật dẫn tương tự mà không ảnh

hưởng đến tính chất từ của hệ dẫn và cũng không ảnh hưởng đến sự phân bố từ trường của hệ. Khi đó ta có thể coi vùng này có hai dòng điện có mật độ $\pm J$ đi qua, nghĩa là hai dòng điện có độ lớn như nhau nhưng ngược hướng. Như vậy, ta có hai vật dẫn hình trụ, mỗi vật có dòng điện phân bố đều và cảm ứng từ trong vùng là tổng các phần đóng góp của chúng. Trong hệ tọa độ trụ riêng của chúng, định luật Ampe về lưu số cho ta các biểu thức

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2} J r_1 \mathbf{e}_{\varphi_1}, \quad (r_1 \leq b)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J r_2 \mathbf{e}_{\varphi_2}. \quad (r_2 \leq b)$$

Vì

$$\mathbf{e}_{\varphi_1} = (-\sin \varphi_1, \cos \varphi_1) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\varphi_2} = (-\sin \varphi_2, \cos \varphi_2) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix},$$

ta có

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} J (y_1 \mathbf{e}_x - x_1 \mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J (-y_2 \mathbf{e}_x + x_2 \mathbf{e}_y).$$

Sử dụng phép biến đổi

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 2a \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

ta có

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J [-y_1 \mathbf{e}_x + (x_1 - 2a) \mathbf{e}_y].$$

Do đó cảm ứng từ trong vùng có dạng thấu kính là

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J [(y_1 - y_2) \mathbf{e}_x + (x_1 - x_2 - 2a) \mathbf{e}_y] = -\mu_0 a J \mathbf{e}_y.$$

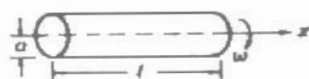
Điều này nghĩa là từ trường là đều và có hướng $-\mathbf{e}_y$.

2019

Một vỏ mỏng hình trụ chứa điện tích có chiều dài l và bán kính a , với $l \gg a$. Mật độ điện tích mặt trên vỏ trụ này là σ . Vỏ đó quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω tăng từ từ theo thời gian với $\omega = kt$, trong đó k là hằng số và $t \geq 0$ như trên hình 2.14. Bỏ qua các hiệu ứng rìa, hãy xác định:

- (a) Từ trường bên trong hình trụ.
 (b) Điện trường bên trong hình trụ.
 (c) Năng lượng điện trường toàn phần và năng lượng từ trường toàn phần bên trong hình trụ.

(Wisconsin)



Hình 2.14

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (ρ, φ, z) với trục z dọc theo trục của hình trụ. Mật độ dòng điện bề mặt (dòng bề mặt trên một đơn vị chiều rộng) trên vỏ hình trụ là $\alpha = \sigma \omega a \mathbf{e}_\varphi$. Nó có thể được biểu thị như một mật độ dòng khối (dòng trên một đơn vị diện tích tiết diện) $\mathbf{J} = \sigma \omega a \delta(\rho - a) \mathbf{e}_\varphi$. Do tính đối xứng, ta có $\mathbf{B} = B_z(\rho) \mathbf{e}_z$. Khi đó phương trình $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ rút gọn về dạng

$$-\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \mu_0 \sigma \omega a \delta(\rho - a).$$

Nó cho ta

$$\mathbf{B}(\rho) = \mu_0 \sigma \omega a \mathbf{e}_z, \quad (\rho < a).$$

(b) Áp dụng phương trình Maxwell

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

đối với L là một vòng tròn bán kính ρ trong mặt phẳng vuông góc với trục z và có tâm tại trục. Trên vòng tròn này $\mathbf{E}$ là thành phần tiếp tuyến và có cùng độ lớn, nghĩa là, $\mathbf{E} = E(\rho) \mathbf{e}_\varphi$. Do đó, lưu ý là $\omega = kt$, ta có

$$\mathbf{E}(\rho) = -\frac{\mu_0 \sigma a k \rho}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (\rho < a)$$

$$(c) U_E = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 l \int_0^a \left(\frac{\mu_0 \sigma a k \rho}{2} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi \epsilon_0 \mu_0^2 \sigma^2 k^2 a^6 l}{16}.$$

$$U_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 \sigma \omega a)^2 \cdot \pi a^2 l = \frac{\pi \mu_0 \sigma^2 a^4 k^2 l t^2}{2}.$$

2020

Một hình trụ điện môi rắn, dài, bán kính a được phân cực vĩnh cửu sao cho sự phân cực theo hướng bán kính ở khắp mọi nơi với độ lớn tỉ lệ thuận với khoảng cách tính từ trục của hình trụ, nghĩa là $\mathbf{P} = \frac{1}{2}P_0 r \mathbf{e}_r$.

(a) Hãy tìm mật độ điện tích trong hình trụ.

(b) Nếu hình trụ được quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω không đổi mà không làm thay đổi $\mathbf{P}$, hãy xác định từ trường trên trục của hình trụ tại những điểm không quá gần các đầu của nó.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) , ta có $P = P_r = P_0 r/2$. Mật độ điện tích liên kết là

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{P_0 r}{2} \right) = -P_0.$$

(b) Khi $\omega = \omega \mathbf{e}_z$, mật độ dòng điện khối tại một điểm $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ trong hình trụ là

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} = \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -P_0 \omega \mathbf{e}_z \times (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z) = -P_0 \omega r \mathbf{e}_\theta.$$

Trên bề mặt của hình trụ cũng có một sự phân bố điện tích bề mặt, có mật độ

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{P_0 \mathbf{r}}{2} \Big|_{r=a} = \frac{P_0 a}{2}.$$

sự phân bố này tạo ra một mật độ dòng mặt là

$$\boldsymbol{\alpha} = \sigma \mathbf{v} = \frac{P_0}{2} \omega a^2 \mathbf{e}_\theta.$$

Để tìm từ trường tại một điểm trên trục của hình trụ mà không quá gần các đầu của nó, vì hình trụ rất dài, ta có thể lấy điểm này như gốc tọa độ và coi như hình trụ là dài vô hạn. Khi đó cảm ứng từ tại gốc tọa độ sẽ là

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dV' + \int_S \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dS' \right).$$

trong đó V và S lần lượt là thể tích và diện tích mặt cong của hình trụ và $\mathbf{r}' = (r, \theta, z)$ là một điểm nguồn. Nhớ rằng dấu âm xuất hiện vì $\mathbf{r}'$ hướng từ điểm trường tới một điểm nguồn. Xét tích phân

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dV' &= \int_V \frac{-P_0 \omega r \mathbf{e}_\theta \times (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r dr d\theta dz \\ &= P_0 \omega \left[\int_V \frac{r^3 dr d\theta dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z - \int_V \frac{r^2 dr d\theta dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_r \right].\end{aligned}$$

Vì hình trụ có thể coi là dài vô hạn, do tính đối xứng, tích phân thứ hai ở biểu thức trên bằng không. Đối với tích phân thứ nhất, ta đặt $z = r \tan \beta$. Khi đó ta có

$$\int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}'}{r'^3} dV' = P_0 \omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \mathbf{e}_z = 2\pi P_0 \omega a^2 \mathbf{e}_z.$$

Tương tự, tích phân mặt cho

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}'}{r'^3} dS' &= \int_S \frac{\frac{P_0}{2} \omega a^2 \mathbf{e}_\theta \times (a \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dS' \\ &= -\frac{P_0}{2} \omega a^4 \int_S \frac{d\theta dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = -2\pi P_0 \omega a^2 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Như vậy, cảm ứng từ $\mathbf{B}$ bằng không tại các điểm của trục hình trụ không quá gần các đầu của nó.

2021

Một hình trụ bán kính R và chiều dài vô hạn được làm từ chất điện môi phân cực vĩnh cửu. Vectơ phân cực $\mathbf{P}$ tỉ lệ với vectơ bán kính $\mathbf{r}$, $\mathbf{P} = a\mathbf{r}$, trong đó a là một hằng số dương. Hình trụ quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω . Xét trường hợp phi tương đối, $\omega R \ll c$.

(a) Hãy tìm điện trường $\mathbf{E}$ ở một bán kính r cả bên trong và bên ngoài hình trụ.

(b) Hãy tìm từ trường $\mathbf{B}$ ở một bán kính r cả bên trong và bên ngoài hình trụ.

(c) Tính năng lượng điện từ toàn phần lưu trữ được trên một đơn vị chiều dài của hình trụ trong các trường hợp sau:

(i) Trước khi hình trụ bắt đầu quay.

(ii) Trong khi nó quay.
 Năng lượng tăng thêm được lấy từ đâu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) với trục của hình trụ nằm dọc theo hướng z , tốc độ góc quay của hình trụ là $\omega = \omega \mathbf{e}_z$. Mật độ điện tích khối bên trong hình trụ là

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (a\mathbf{r}) = -2a.$$

Khi đó mật độ điện tích mặt trên hình trụ là

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_r \cdot (a\mathbf{r})|_{r=R} = aR.$$

Do đó điện tích toàn phần trên một đơn vị chiều dài là $-2a \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot aR = 0$. Từ định lý Gauss $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0$ và tính đối xứng trục, ta tính được

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{ar}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r, & r < R, \\ 0 & r > R. \end{cases}$$

(b) Mật độ dòng khối là $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = -2a\omega r \mathbf{e}_\theta$, và mật độ dòng bề mặt là $\alpha = \sigma \mathbf{v} = a\omega R^2 \mathbf{e}_\theta$. Nếu hình trụ dài vô hạn, do tính đối xứng, $\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_z$. Phương trình và điều kiện biên của $\mathbf{B}$ là

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \alpha.$$

trong đó $\mathbf{B}_1$ và $\mathbf{B}_2$ lần lượt là cảm ứng từ ở bên trong và bên ngoài hình trụ. Từ hai phương trình suy ra

$$-\frac{\partial B_1}{\partial r} = -2\mu_0 a\omega r, \quad -\frac{\partial B_2}{\partial r} = 0.$$

Như vậy B_2 là một hằng số. Vì $B_2 \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow \infty$, nên hằng số đó bằng 0. Điều kiện biên tại $r = R$,

$$-[B_2(R) - B_1(R)] = \mu_0 a\omega R^2,$$

dẫn đến

$$B_1(R) = \mu_0 a\omega R^2.$$

Tích phân phương trình vi phân đối với B_1 từ r tới R , ta nhận được

$$B_1(r) = B_1(R) - \mu_0 a\omega (R^2 - r^2) = \mu_0 a\omega r^2.$$

Do đó từ trường bên trong và bên ngoài hình trụ là

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 a \omega r^2 \mathbf{e}_z & r < R, \\ 0 & r > R. \end{cases}$$

(c) (i) Trước khi hình trụ bắt đầu quay, chỉ có điện năng tồn tại

$$W_e = \int_{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV.$$

Như vậy năng lượng trữ trên một đơn vị chiều dài của hình trụ là

$$\frac{dW_e}{dz} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{ar}{\epsilon_0} \right)^2 r dr = \frac{\pi a^2 R^2}{4\epsilon_0}.$$

(ii) Khi hình trụ quay, cả hai năng lượng điện và từ cùng tồn tại. Năng lượng điện giống như trường hợp (i) và năng lượng từ trữ trên một đơn vị chiều dài của hình trụ là

$$\frac{dW_m}{dz} = \int_{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 a \omega r^2)^2 r dr = \frac{\pi \mu_0 a^2 \omega^2 R^6}{6}.$$

Do đó năng lượng toàn phần lưu trữ trên một đơn vị chiều dài là

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{dW_e}{dz} + \frac{dW_m}{dz} = \frac{\pi a^2 R^4}{4\epsilon_0} + \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega^2 R^6}{6} \\ &= \frac{\pi a^2 R^4}{4\epsilon_0} \left[1 + \frac{2\omega^2 R^2}{3c^2} \right]. \end{aligned}$$

Năng lượng tăng thêm phải cung cấp thêm là năng lượng từ, được sinh ra từ công thực hiện bởi ngoại lực để làm cho hình trụ quay từ trạng thái đứng yên.

2022

Một dây cáp đồng trục bao gồm một vật dẫn rắn hình trụ bên trong bán kính R_1 và một vỏ mỏng dẫn điện hình trụ bên ngoài bán kính R_2 . Tại một đầu hai vật dẫn nối với nhau bởi một điện trở và tại đầu kia chúng được nối với một ắc quy. Do đó, có một dòng điện i trong các vật dẫn và một hiệu điện thế V giữa chúng. Bỏ qua điện trở của bản thân dây cáp.

(a) Hãy tìm từ trường $\mathbf{B}$ và điện trường $\mathbf{E}$ trong vùng $R_2 > r > R_1$, nghĩa là, trong vùng giữa các vật dẫn.

(b) Hãy tìm năng lượng từ và năng lượng điện trên một đơn vị chiều dài trong vùng giữa các vật dẫn.

(c) Giả thiết rằng năng lượng từ trong vật dẫn bên trong được bỏ qua, hãy tìm độ tự cảm L trên một đơn vị chiều dài và điện dung C trên một đơn vị chiều dài.

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) trong đó trục z nằm dọc theo trục của dây cáp và chiều dương của nó cùng chiều với dòng điện trong vật dẫn bên trong. Từ $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$ và tính đối xứng trục, ta có

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.$$

Từ $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ và tính đối xứng trục, ta có

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r,$$

trong đó λ là điện tích trên một đơn vị chiều dài của vật dẫn bên trong. Hiệu điện thế giữa hai vật dẫn là $V = -\int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, cho

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 V / \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Do đó

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_r.$$

(b) Mật độ năng lượng từ là $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{i}{2\pi r} \right)^2$. Do đó năng lượng từ trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dW_m}{dz} = \int w_m dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{i}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Mật độ năng lượng điện là $w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \right)^2$. Do đó năng lượng điện trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dW_e}{dz} = \int w_e dS = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

(c) Từ $\frac{dW_m}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dI}{dz} \right) I^2$, độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dL}{dz} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Từ $\frac{dW_e}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dC}{dz} \right) V^2$, điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$\frac{dC}{dz} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

2023

Các vật dẫn của một dây cáp đồng trục được nối với một ắc quy và điện trở như trên hình 2.15. Xuất phát từ các phương trình Maxwell, hãy tìm trong vùng giữa r_1 và r_2 ,

(a) điện trường theo V, r_1 và r_2 ,

(b) từ trường theo V, R, r_1 và r_2 ,

(c) vectơ Poynting.

(d) bằng cách tích phân vectơ Poynting chứng minh rằng công suất giữa r_1 và r_2 là V^2/R .

(Wisconsin)



Hình 2.15

Lời giải:

(a), (b) Theo bài tập 2022 ta có

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta.$$

Vì $I = V/R$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 V}{2\pi r R} \mathbf{e}_\theta.$$

$$(c) \mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_r \times \frac{V}{2\pi r R} \mathbf{e}_\theta = \frac{V^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{r_2}{r_1}} \mathbf{e}_z.$$

$$(d) P = \int_{r_1 < r < r_2} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{V^2}{2\pi R \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{V^2}{R}.$$

2024

Giả thiết rằng từ trường trên trục của một ống hình trụ tròn, thẳng là

$$\mathbf{B} = B_0(1 + \nu z^2)\mathbf{e}_z.$$

Giả thiết thành phần θ của $\mathbf{B}$ là bằng 0 bên trong ống hình trụ.

(a) Hãy tính thành phần bán kính $B_r(r, z)$ của từ trường tại các điểm gần trục.

(b) Mật độ dòng $\mathbf{j}(r, z)$ cần thiết phải như thế nào ở bên trong hình trụ nếu từ trường mô tả còn đúng với mọi bán kính r ?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Như ta trên hình 2.16, hãy xét một hình trụ nhỏ có chiều dày dz , bán kính r , vuông góc với trục z và áp dụng phương trình Maxwell $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Vì r rất nhỏ ta có

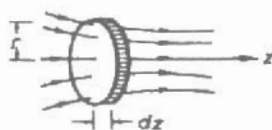
$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z).$$

do đó

$$[B_z(0, z + dz) - B_z(0, z)]\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz = 0,$$

hay

$$-\frac{\partial B(0, z)}{\partial z} dz \cdot \pi r^2 = B_r(r, z) \cdot 2\pi r dz,$$



Hình 2.16

Suy ra

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B(0, z)}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{d}{dz} [B_0(1 + \nu z^2)] = -\nu B_0 r z.$$

(b) Giả thiết những phương trình dưới đây có hiệu lực ở mọi nơi

$$\begin{aligned} B_r(r, z) &= -\nu B_0 r z, \\ B_z(r, z) &= B_0(1 + \nu z^2). \end{aligned}$$

Đối với một vật dẫn, $\vec{D}$ có thể bỏ qua được và phương trình Maxwell sẽ trở về dạng đơn giản $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$. Lưu ý rằng $B_\theta = 0$, $\frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = 0$, ta có

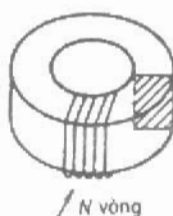
$$\vec{j}(r, z) = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_r}{\partial z} \vec{e}_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \nu B_0 r \vec{e}_\theta.$$

Đây là mật độ dòng điện phải tìm.

2025

Một ống dây hình xuyến có một lõi sắt tiết diện hình vuông (H. 2.17) và độ từ thẩm μ được quấn N vòng dây sát nhau mang dòng điện I . Hãy tìm độ lớn của độ từ hoá M ở mọi nơi trong lõi sắt.

(Wisconsin)



Hình 2.17

Lời giải:

Theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI,$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r},$$

trong đó $d = 2 \text{ cm}$ là chiều rộng của khe hở. Do đó

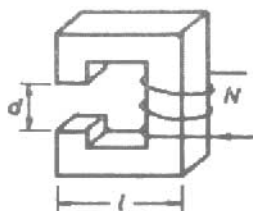
$$\begin{aligned} N &= \frac{B}{\mu_0 I} \left[d + \frac{1}{\mu_r} (4l - d) \right] \\ &= \frac{100 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1} \left(0,02 + \frac{0,2 \times 4 - 0,02}{3000} \right) \\ &= 161 \text{ vòng} \end{aligned}$$

Đây là kết quả cần tìm.

2027

Một nam châm điện được chế tạo bằng cách quấn N vòng dây mang dòng điện lên một lõi sắt có hình chữ C ($\mu \gg \mu_0$) như trên hình 2.19. Nếu diện tích tiết diện của lõi sắt là A , dòng điện là i , chiều rộng của khe hở là d và chiều dài từng cạnh của "C" là l , hãy tìm từ trường B trong khe hở.

(Columbia)



Hình 2.19

Lời giải:

Đặt $\mu_r = \mu/\mu_0$ vào kết quả của bài tập 2026, ta tìm được

$$B = \frac{NI\mu_0\mu}{d(\mu - \mu_0) + 4l\mu_0}.$$

2028

Hãy thiết kế một nam châm (sử dụng một khối lượng đồng tối thiểu) để tạo ra một từ trường là 10.000 gauss trong 0,1 m khe hở có diện tích 1 m^2

2 m. Giả thiết rằng độ từ thẩm của sắt rất cao. Hãy tính công suất và trọng lượng của đồng cần thiết phải dùng. (Điện trở suất của đồng là $2 \times 10^{-6} \Omega\text{-cm}$; khối lượng riêng của nó là 8 g/cm^3 và mật độ dòng điện cực đại của nó là 1000 A/cm^2). Lực hút giữa các cực của nam châm là bao nhiêu?

(Princeton)

Lời giải:

Gọi L là chu vi của một tiết diện của nam châm song song với mặt phẳng của biểu đồ như trên hình 2.20. Định luật Ampe về lưu số trở thành

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B}{\mu_0}x + \frac{B}{\mu}(L-x) = NI,$$

trong đó x là chiều rộng của khe hở. Vì $\mu \gg \mu_0$, thành phần thứ hai trong phương trình trên có thể bỏ qua. Kí hiệu tiết diện của sợi dây đồng là S , dòng điện chạy qua S là $I = jS$. Đồng thời ta có

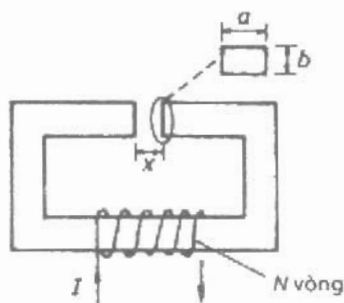
$$N = \frac{Bx}{\mu_0 j S}.$$

Công suất tiêu hao trong sợi dây chính là công suất cần thiết, nó được tính như sau

$$P = I^2 R = I^2 \rho \frac{2N(a+b)}{S} = 2j\rho(a+b) \frac{B}{\mu_0} x,$$

trong đó ρ là điện trở suất của đồng. Sử dụng các dữ kiện đã cho ta nhận được

$$P = 9,5 \times 10^3 \text{ W}.$$



Hình 2.20

Gọi δ là khối lượng riêng của đồng, khi đó trọng lượng cần thiết của đồng là

$$2N(a+b)S\delta = 2(a+b)\frac{B}{j\mu_0}x\delta = 3,8 \text{ kg}.$$

Tiết diện của khe hở là $A = a \cdot b$. Do đó lực hút giữa các cực là

$$F = \frac{AB^2}{2\mu_0} = 8 \times 10^5 \text{ N}.$$

2029

Một thanh sắt mềm hình trụ có chiều dài L và đường kính d được uốn cong thành dạng hình tròn bán kính R để lại một khe hở sao cho hai đầu của thanh hầu như gặp nhau. Khoảng cách khe hở s không đổi so với bề mặt các đầu của thanh. Giả thiết $s \ll d, d \ll R$. N vòng dây được quấn chặt quanh thanh sắt và một dòng điện I chạy qua dây dẫn. Độ từ thẩm tương đối của sắt là μ_r . Bỏ qua hiện tượng rò rỉ, từ trường B trong khe hở là bao nhiêu?

(MIT)

Lời giải:

Khi $s \ll d \ll R$, sự rò rỉ từ ở trong khe hở có thể bỏ qua. Khi đó từ trường trong khe hở giống như từ trường trong thanh sắt. Từ định luật Ampe về lưu số

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

ta nhận được

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)s}.$$

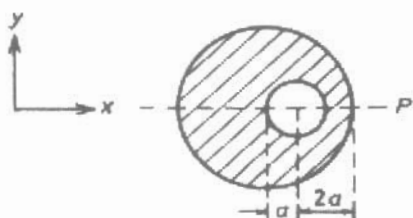
2030

Hình 2.21 cho thấy tiết diện của một ống hình trụ tròn dài vô hạn có bán kính $3a$ với một lỗ hổng hình trụ dài vô hạn bán kính a được đặt sao cho tâm của nó cách tâm của hình trụ lớn một khoảng cách a . Phần rắn của hình trụ mang một dòng điện I , phân bố đồng đều trên tiết diện và có chiều đi ra từ mặt phẳng của tờ giấy.

(a) Hãy tìm từ trường tại tất cả các điểm trên mặt phẳng P chứa các trục của hai hình trụ.

(b) Xác định từ trường trong lỗ hổng. Từ trường này có đặc tính đặc biệt đơn giản.

(UC, Berkeley)



Hình 2.21

Lời giải:

(a) Theo nguyên lý chồng chập, từ trường có thể được coi như hiệu từ trường $\mathbf{H}_2$ và $\mathbf{H}_1$, trong đó $\mathbf{H}_2$ là từ trường được tạo ra bởi hình trụ rắn (không có lỗ) bán kính $3a$ và $\mathbf{H}_1$ là từ trường tạo ra bởi hình trụ bán kính a tại vị trí của lỗ hổng. Dòng điện trong từng hình trụ phân bố đồng đều trên tiết diện. Các dòng I_1 và I_2 trong hình trụ nhỏ và hình trụ lớn có mật độ dòng tương ứng là $-j$ và $+j$. Sau đó, vì $I = I_2 - I_1 = 9\pi a^2 j - \pi a^2 j = 8\pi a^2 j$, ta có $j = \frac{I}{8\pi a^2}$ và

$$I_1 = \pi a^2 j = \frac{I}{8}, \quad I_2 = 9\pi a^2 j = \frac{9}{8}I.$$

Lấy trục z dọc theo trục của hình trụ lớn với hướng dương của nó theo hướng của I_2 mà ta đã giả thiết là đi ra từ mặt phẳng của tờ giấy. Lấy trục x đi qua trục của hình trụ nhỏ như thấy trên hình 2.21. Khi đó mặt phẳng P là mặt phẳng xz , nghĩa là mặt phẳng $y = 0$. Định luật Ampe cho $\mathbf{H}_1$ và $\mathbf{H}_2$ như sau (lưu ý rằng $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ lần lượt là các khoảng cách tương ứng của điểm trường đến hình trụ và lỗ hổng)

$$H_{2x} = -\frac{Iy}{16\pi a^2}, \quad H_{2y} = \frac{Ix}{16\pi a^2}, \quad (r \leq 3a)$$

$$H_{2x} = -\frac{9Iy}{16\pi(x^2 + y^2)}, \quad H_{2y} = \frac{9Ix}{16\pi(x^2 + y^2)}, \quad (r > 3a)$$

$$H_{1x} = -\frac{Iy}{16\pi a^2}, \quad H_{1y} = \frac{I(x-a)}{16\pi a^2}, \quad (r_1 \leq a)$$

$$H_{1x} = -\frac{Iy}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]}, \quad H_{1y} = \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]}, \quad (r_1 > a).$$

Trên mặt phẳng P , $H_{2x} = H_{1x} = 0$. Do đó $H_x = 0$, $H_y = H_{2y} - H_{1y}$. Do đó ta có

(1) Bên trong lỗ hổng ($0 < x < 2a$),

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi a^2} = \frac{Ia}{16\pi a^2} = \frac{I}{16\pi a}.$$

(2) Bên trong phần rắn ($2a \leq x \leq 3a$ hoặc $-3a \leq x \leq 0$),

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]} = \frac{I(x^2 - ax - a^2)}{16\pi a^2(x-a)}.$$

(3) Bên ngoài hình trụ ($|x| > 3a$),

$$H_y = \frac{9Ix}{16\pi(x^2 + y^2)} - \frac{I(x-a)}{16\pi[(x-a)^2 + y^2]} = \frac{(8x-9a)I}{16\pi x(x-a)}.$$

(b) Từ trường tại tất cả các điểm ở bên trong lỗ hổng ($r_1 \leq a$) là

$$H_x = -\frac{Iy}{16\pi a^2} + \frac{Iy}{16\pi a^2} = 0,$$

$$H_y = \frac{Ix}{16\pi a^2} - \frac{I(x-a)}{16\pi a^2} = \frac{I}{16\pi a}.$$

Từ trường này là đều bên trong lỗ hổng và có hướng theo hướng y dương.

2031

(a) Một quả cầu bán kính r có điện thế V được nhúng trong một môi trường dẫn điện có độ dẫn σ . Hãy tính dòng điện chạy từ quả cầu đến vô hạn.

(b) Hai quả cầu với điện thế $+V$ và 0 có tâm tại vị trí $x = \pm d$, với $d \gg r$. Hãy tính mật độ dòng điện đối với những điểm cách đều hai quả cầu (nghĩa là trên mặt phẳng yz) và các điểm ở xa ($\gg d$).

(c) Đối với hình học như trong câu (b) hãy tính từ trường trên mặt phẳng yz đối với những điểm ở xa.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Nếu quả cầu chứa điện tích Q , điện thế trên bề mặt nó sẽ là

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

Nghĩa là, $Q = 4\pi\epsilon_0 rV$. Khi quả cầu được nhúng trong một môi trường dẫn điện có độ dẫn điện σ , thì dòng điện bắt đầu chạy ra từ quả cầu là

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi\sigma rV,$$

trong đó S là mặt cầu và chúng ta giả thiết rằng môi trường là có điện trở thuần. Nếu điện thế V được duy trì thì dòng điện I sẽ là không đổi.

(b) Vì $d \gg r$ chúng ta coi các quả cầu như các điện tích điểm. Giả thiết rằng quả cầu với điện tích V mang một điện tích $+Q$ và quả cầu với điện thế bằng 0 mang điện tích $-Q$. Lấy đường thẳng nối tâm hai quả cầu là trục x và điểm giữa của đường thẳng này là gốc tọa độ. Khi đó điện thế của một điểm bất kì trên đường thẳng đó là

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x} \right).$$

Khi đó hiệu điện thế giữa hai mặt cầu là

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x} \right) \Big|_{-d+r}^{d-r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4(d-r)}{r(2d-r)} \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

vì $d \gg r$ do đó

$$Q = 2\pi\epsilon_0 rV.$$

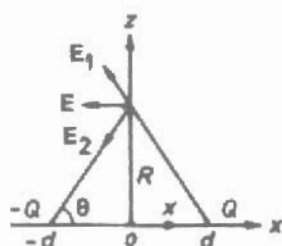
Trên mặt phẳng yz các điểm cùng khoảng cách tính từ hai quả cầu sẽ tạo thành một vòng tròn có tâm tại gốc tọa độ. Do tính đối xứng, độ lớn của điện trường và từ trường tại các điểm này sẽ giống nhau, như vậy chúng ta chỉ cần tính cho 1 điểm, ví dụ giao điểm của vòng tròn và trục z (xem hình 2.22). Gọi R là bán kính của vòng tròn, $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ là điện trường tương ứng sinh ra bởi $+Q$ và $-Q$. Tổng hợp của các trường này theo hướng $-x$ là

$$\mathbf{E} = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + d^2)} \cos\theta \mathbf{e}_x = -\frac{Qd}{2\pi\epsilon_0(R^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x.$$

Khi đó mật độ dòng điện tại điểm đã chọn này là

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma Qd}{2\pi\epsilon_0(R^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x = -\frac{Vrd}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x.$$

Vì chọn trục z là bất kì, nên các kết quả trên áp dụng được cho mọi điểm của vòng tròn.



Hình 2.22

(c) Sử dụng một vòng tròn bán kính R làm đường lấy tích phân L , theo định luật Ampe về lưu số

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}' = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}', \quad d\mathbf{S}' = r' dr' d\theta' \mathbf{e}_x,$$

ta có

$$\begin{aligned} 2\pi R B &= -\mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \frac{V r d}{(r'^2 + d^2)^{3/2}} dr' \\ &= 2\pi \mu_0 V r d \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} - \frac{1}{d} \right). \end{aligned}$$

Đối với các điểm ở xa, $R \gg d$, ta nhận được kết quả khá chính xác là

$$B = \frac{\mu_0 V r}{R}.$$

Lưu ý rằng B là tiếp tuyến đối với vòng tròn R và theo chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía x dương.

2032

Xét một vỏ cầu mỏng điện môi có bán kính R và quay với tốc độ góc ω . Các điện tích có mật độ mặt không đổi σ trên mặt cầu sinh ra một từ trường đều tỉ lệ thuận với ω . Giả thiết rằng khối lượng của vỏ cầu này có thể bỏ qua.

(a) Hãy tìm từ trường ở bên trong và bên ngoài vỏ cầu quay đó.

(b) Một mômen lực không đổi N được đặt song song với ω . Sau bao nhiêu lâu thì nó sẽ làm cho vỏ cầu dừng lại?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

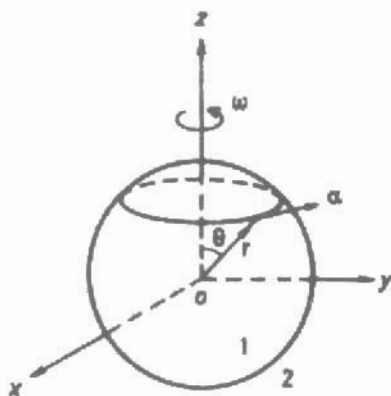
Sử dụng hệ toạ độ với trục z là trục quay và gốc toạ độ tại tâm của quả cầu (H. 2.23). Mật độ dòng điện trên bề mặt vỏ cầu trong hệ toạ độ cầu là

$$\alpha = R\sigma\omega \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$$

hoặc biểu thị như mật độ dòng điện khối

$$\mathbf{J} = \alpha \delta(r - R).$$

Khi đó mômen lưỡng cực từ của quả cầu là



Hình 2.23

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV' = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \int \int r \cdot R\sigma\omega \sin\theta \delta(r - R) \\ &\quad \cdot 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta \cdot dr \cdot \sin\theta \\ &= \mathbf{e}_z \pi R^4 \sigma \omega \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \omega \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng đối với bất kì cặp điểm đối xứng nào trên vòng tròn như ta thấy trên hình 2.23, tổng các đóng góp vào $\mathbf{m}$ là theo hướng z , do đó phải có thêm một thừa số $\sin\theta$ vào trong tích phân trên. Độ từ hoá của quả cầu là

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \sigma \omega R \mathbf{e}_z.$$

Vì không có dòng điện tự do trong và ngoài quả cầu, ta có thể áp dụng phương pháp về thế vô hướng từ. Các thế bên trong và bên ngoài thoả mãn phương trình Laplace

$$\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = 0.$$

Chúng ta yêu cầu rằng $\varphi_1|_0$ là có hữu hạn và $\varphi_2|_\infty \rightarrow 0$. Bằng cách tách biến số ta nhận được các nghiệm sau

$$\varphi_1 = \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta), \quad \varphi_2 = \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Trên mặt cầu, áp dụng các điều kiện sau

$$\varphi_1 = \varphi_2|_{r=R}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}|_{r=R} = -\sigma R \omega \cos \theta.$$

ta được

$$a_1 = \frac{\sigma R \omega}{3}, \quad b_1 = \frac{\sigma R^3 \omega}{3},$$

còn tất cả các hệ số khác bằng 0. Khi đó, các thế vô hướng từ sẽ là

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} \sigma R \omega \cdot \mathbf{r}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3} \sigma R^3 \omega \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Do đó, các từ trường bên trong và bên ngoài quả cầu là

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= -\nabla \varphi_1 = -\frac{1}{3} \sigma R \omega \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B}_1 &= \mu_0 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \mathbf{e}_z, \quad (r \leq R) \\ \mathbf{B}_2 &= \mu_0 \mathbf{H}_2 = -\nabla \varphi_2 = \frac{\mu_0}{3} \sigma R^3 \left(\frac{3(\omega \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\omega}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 R^4}{3} \sigma \omega (3 \cos \theta \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z), \quad (r > R). \end{aligned}$$

Trước khi tác dụng mômen lực không đổi N, năng lượng từ toàn phần của hệ là

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_{V_{\text{in}}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV + \int_{V_{\text{out}}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \right)^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{3} R^4 \sigma \omega \right)^2 \int_{V_{\text{out}}} \frac{(1 + 3 \cos^2 \theta)}{r^6} dV, \end{aligned}$$

trong đó V_{in} và V_{out} là không gian bên trong và bên ngoài quả cầu. Lưu ý rằng

$$\int_{V_{\text{out}}} \left(\frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{r^6} \right) dV = \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1 + 3 \cos^2 \theta)}{r^4} \sin \theta = \frac{4\pi}{3R^4},$$

ta có

$$W_m = \frac{4\pi}{9} \mu_0 \sigma^2 \omega^2 R^5.$$

Giả thiết rằng sự quay dừng lại sau thời gian t do tác dụng của mômen lực không đổi N . Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{dW_m}{dt} = N\omega.$$

Với N không đổi, ta nhận được thời gian cần tính

$$t = \frac{W_m}{N\omega} = \frac{4\pi\mu_0\sigma^2\omega R^5}{N}.$$

2033

Một vỏ cầu mỏng bán kính R chứa một mật độ điện tích mặt đồng đều σ . Vỏ cầu được quay với tốc độ góc không đổi ω quanh một đường kính.

(a) Hãy viết các điều kiện biên có liên hệ với các từ trường ở ngay bên trong và từ trường ở ngay bên ngoài vỏ cầu.

(b) Từ trường thoả mãn các điều kiện biên này là đều ở trong vỏ cầu và có dạng lưỡng cực ở ngoài vỏ cầu. Hãy xác định độ lớn của từ trường bên trong. (CUSPEA)

Lời giải:

(a) Gọi miền bên trong vỏ cầu là vùng 1, bên ngoài là vùng 2. Lấy trục quay là trục z . Mật độ dòng trên vỏ cầu là

$$\alpha = \sigma R \omega \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Các hệ thức biên trên mặt cầu là như sau

$$\text{Theo hướng tiếp tuyến: } B_{1r} = B_{2r} \Big|_{r=R},$$

$$\text{Theo hướng vuông góc: } \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) \Big|_{r=R} = \alpha, \text{ hay}$$

$$B_{2\theta} - B_{1\theta}|_{r=R} = \mu_0 \sigma \omega R \sin \theta.$$

(b) Theo bài tập 2032 ta thấy rằng từ trường bên trong và bên ngoài vỏ cầu sẽ là

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \mathbf{e}_z, \quad (r \leq R) \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{3} \sigma R^4 \left(\frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right), \quad (r > R) \quad (2)$$

trong đó $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Lưu ý rằng từ trường bên trong vỏ cầu là một từ trường đều. Đồng thời, vì từ trường tạo ra bởi một lưỡng cực từ có mômen $\mathbf{m}$ được biểu thị như là $\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]$, nên phương trình (2) chỉ ra rằng từ trường bên ngoài vỏ cầu là từ trường của một lưỡng cực có mômen

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} \sigma R^4 \omega \mathbf{e}_z.$$

Từ $\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$, chúng ta có thể viết lại phương trình (1) và (2) như sau

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta),$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta).$$

Rõ ràng là các biểu thức này thoả mãn những điều kiện biên được đưa ra trong phần (a).

2034

Hãy xét một thể tích cầu có bán kính R bên trong nó được thiết kế để có một từ trường đều $\mathbf{B}$ như mong muốn. Cần phân bố dòng điện như thế nào trên mặt cầu để sinh ra từ trường này?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Bằng suy luận tương tự với một quả cầu phân cực đều, ta suy ra rằng từ trường bên trong một quả cầu được từ hoá đồng đều là một từ trường đều. Gọi $\mathbf{M}$ là độ từ hoá, khi đó mật độ dòng bề mặt là $\boldsymbol{\alpha}_S = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}$. Lấy trục z dọc theo $\mathbf{M}$ sao cho $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$. Trong hệ toạ độ cầu

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (\mathbf{n} = \mathbf{e}_r),$$

sao cho

$$\alpha_S = -\mathbf{e}_r \times M(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) = M \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Khi đó sử dụng thể vô hướng từ chúng ta sẽ tìm được từ trường bên trong quả cầu: $\mathbf{B} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}$ (xem bài tập 2033). Do đó

$$\alpha_S = \frac{3B}{2\mu_0} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

2035

Trên hình 2.24 là một vỏ cầu mỏng bán kính R có một điện tích cố định $+q$ phân bố đồng đều trên khắp bề mặt.

(a) Một tiết diện tròn nhỏ (bán kính $r \ll R$) của điện tích được lấy đi khỏi mặt cầu. Hãy tìm điện trường ở ngay bên trong và ở ngay bên ngoài mặt cầu tại lỗ rỗng đó.

Phần cắt được đặt trở lại và cho quả cầu quay với tốc độ góc không đổi $\omega = \omega_0$ quanh trục z .

(b) Hãy tính tích phân đường của điện trường dọc theo trục z từ $-\infty$ đến $+\infty$.

(c) Hãy tính tích phân đường của từ trường theo đường giống như trên. Bây giờ tốc độ góc của quả cầu tăng tuyến tính với thời gian

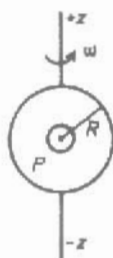
$$\omega = \omega_0 + kt.$$

(d) Hãy tính tích phân đường của điện trường quanh đường tròn P (như thấy trên hình 2.25) đặt tại tâm của quả cầu. Giả thiết rằng pháp tuyến của mặt phẳng chứa đường tròn đó hướng dọc theo trục $+z$ và bán kính của đường tròn đó là $r_P \ll R$.

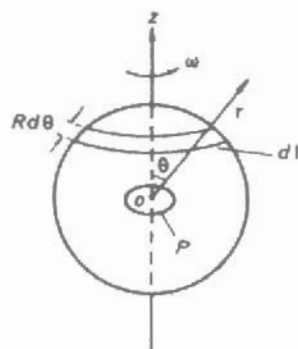
(Chicago)

Lời giải:

(a) Trước khi phần tròn nhỏ của điện tích được lấy đi, từ trường bên trong quả cầu bằng 0, trong khi điện trường bên ngoài quả cầu là $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Theo bài tập 1021, điện trường đã được tạo ra bởi phần cắt nhỏ này là $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$. Do đó, sau khi phần cắt nhỏ lấy đi, điện trường chính xác bên trong và bên ngoài quả cầu tại lỗ rỗng đều là $\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$.



Hình 2.24



Hình 2.25

(b) Do tính đối xứng $\int_{-\infty}^{\infty} E dz = 0$.

(c) Định luật Ampe về lưu số cho

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{\infty} B dz = \mu_0 I.$$

Vì dòng điện là $I = \frac{q\omega_0}{2\pi}$, ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} B dz = \frac{q\mu_0\omega_0}{2\pi}.$$

(d) Xét một vành tròn với bề rộng $Rd\theta$ như trên hình 2.25. Mật độ dòng điện mặt trên vành là $\frac{q}{4\pi R^2} \cdot \omega R \sin \theta$. Sự đóng góp của một cặp điểm đối xứng trên vành đó vào từ trường tại tâm của quả cầu sẽ được cộng lại để tạo cho kết quả theo hướng z . Như vậy tổng đóng góp của vành vào từ trường được tính theo định luật Biot - Savart như sau

$$\begin{aligned} dB_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{q}{4\pi R^2} \omega R \sin \theta \cdot \frac{R}{R^3} \sin \theta R d\theta \cdot R \sin \theta d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 q \omega}{8\pi R} \sin^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Do đó

$$B_z = \frac{\mu_0 q \omega}{8\pi R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 q \omega}{6\pi R}.$$

Vì $r_P \ll R$, cảm ứng từ có thể coi là đồng đều trong vòng tròn P . Khi đó từ thông qua P là

$$\phi = \pi r_P^2 B = \frac{\mu_0 r_P^2 \omega q}{6R} = \frac{\mu_0 q r_P^2 (\omega_0 + kt)}{6R}.$$

Do đó

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 k \tau_P^2 q}{6R}.$$

2036

Một quả cầu dẫn điện cô lập có bán kính R , được tích điện đến điện thế V và quay quanh một đường kính với tốc độ góc ω .

(a) Hãy tìm cảm ứng từ $\mathbf{B}$ tại tâm của quả cầu.

(b) Mômen lưỡng cực từ của quả cầu quay này là bao nhiêu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Sử dụng đáp số trong bài tập 2035, từ trường tại tâm quả cầu là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi R} \mathbf{e}_z,$$

trong đó Q là tổng điện tích của quả cầu và $\mathbf{e}_z$ là một vectơ đơn vị theo trục quay. Từ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, ta nhận được $Q = 4\pi\epsilon_0 R V$. Do đó

$$B = \frac{2}{3} \epsilon_0 \mu_0 \omega V.$$

(b) Theo bài tập 2032, mômen lưỡng cực từ của quả cầu là

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \omega \mathbf{e}_z,$$

trong đó σ là mật độ điện tích mặt

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 V}{R}.$$

Do đó

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi \epsilon_0 R^3 \omega V \mathbf{e}_z.$$

2037

Một điện tích Q được phân bố đều trên bề mặt của một quả cầu bán kính r_0 . Vật liệu bên trong và bên ngoài quả cầu là chân không.

(a) Hãy tính năng lượng tĩnh điện trong toàn không gian.

(b) Hãy tính lực tác dụng lên một đơn vị diện tích mặt cầu do sự có mặt của điện tích đó. Đối với $Q = 1C$ và $r_0 = 1$ cm, hãy tính trị số của lực đó.

(c) Quả cầu quay quanh một trục đi qua một đường kính với tốc độ góc không đổi ω . Hãy tính từ trường tại tâm của quả cầu.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

$$(a) W = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}.$$

(b) Mật độ điện tích mặt là $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$ và điện trường bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \mathbf{e}_r.$$

Sử dụng đáp số trong bài tập 1021, lực điện tác dụng lên một đơn vị diện tích trên mặt ngoài là

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{2} \Big|_{r=r_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r_0^4} \mathbf{e}_r.$$

Với dữ liệu đã cho, ta có

$$f = 3,6 \times 10^{12} \text{ N/cm}^2.$$

(c) Sử dụng đáp số trong bài tập 2035, ta có

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \omega}{6\pi r_0} \mathbf{e}_z$$

trong đó $\mathbf{e}_z$ là một vectơ đơn vị theo trục quay.

2038

Một ống hình trụ tròn, thẳng, rỗng, dài được chế tạo bằng sắt có độ từ thẩm μ được đặt sao cho trục của nó vuông góc với từ trường đều $\mathbf{B}_0$ ban đầu.

Giả thiết rằng B_0 đủ nhỏ sao cho nó không làm bão hoà sắt và độ từ thẩm μ không đổi trong vùng từ trường mà chúng ta quan tâm.

(a) Hãy vẽ phác các đường sức từ trong toàn bộ vùng đang xét trước và sau khi ống hình trụ đó được đặt vào từ trường.

(b) Gọi đường kính trong và đường kính ngoài của ống hình trụ lần lượt là b và a . Tìm biểu thức của $\mathbf{B}$ bên trong ống hình trụ. Lưu ý rằng trong hệ toạ độ trụ, ta có

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

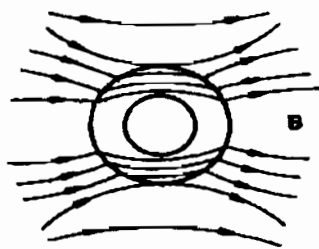
(Columbia)

Lời giải:

(a) Từ trường là đều trước khi ống hình trụ được đưa vào nên các đường sức từ như trong hình 2.26. Sau khi ống hình trụ được đặt trong từ trường, từ trường sẽ bị méo đi và các đường sức từ được thấy như trên hình 2.27.



Hình 2.26



Hình 2.27

(b) Chúng ta đưa vào thế vô hướng từ ϕ , thoả mãn phương trình $\mathbf{H} = -\nabla\phi$. Vì không có dòng điện tự do nên ta có $\nabla^2\phi = 0$. Trong hệ toạ độ trụ (r, θ, z) , với trục z trùng với trục của hình trụ thì thế vô hướng từ thoả mãn phương trình

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \phi = 0. \quad (1)$$

Do tính đối xứng trục $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$. Đặt

$$\phi(r, \theta) = R(r)S(\theta).$$

Khi đó phương trình trên sẽ được viết lại như sau

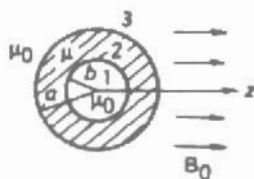
$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = \text{constant} = m^2,$$

Sở dĩ viết được như vậy, đó là vì sự thay đổi của r không ảnh hưởng đến biểu thức có chứa S . Điều này dẫn đến nghiệm tổng quát

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{-m}) (g_m \cos m\theta + h_m \sin m\theta). \quad (2)$$

Do tính đối xứng, $\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta)$ sao cho các hàm sin sẽ bị loại đi bằng cách đặt $h_m = 0$. Chia không gian thành ba phần như trên hình 2.28 và viết nghiệm tổng quát đối với chúng như sau

$$\phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} (c_{im} r^m + d_{im} r^{-m}) \cos m\theta, \quad (i = 1, 2, 3)$$



Hình 2.28

Tại các điểm ở xa hình trụ, $-\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = H_0$, hay $\phi_3 = -H_0 z = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta$. So sánh các hệ số của $\cos m\theta$ ta có

$$c_{31} = -\frac{B_0}{\mu_0}, \quad c_{3m} = d_{3m} = 0 \quad (m \neq 1).$$

Do đó

$$\phi_3 = -\left(\frac{B_0 r}{\mu_0} - \frac{d_{31}}{r} \right) \cos \theta.$$

Chúng ta cũng đòi hỏi ϕ_1 có giá trị hữu hạn khi $r \rightarrow 0$. Do đó $d_{1m} = 0$ đối với mọi m và

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} r^m \cos m\theta.$$

Tiếp theo, xét các điều kiện biên tại $r = a$ và b . Ta có

$$\begin{aligned}\mu_0 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}, \\ \mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b}, \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=b} ;\end{aligned}$$

Những điều kiện biên này cùng cho $c_{1m} = c_{2m} = d_{2m} = 0$ đối với $m \neq 1$ và đồng thời cho các phương trình sau

$$\begin{cases} B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{a^2} = \mu \left(-c_{21} + \frac{d_{21}}{a^2} \right), \\ -B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{a^2} = \mu_0 \left(c_{21} + \frac{d_{21}}{a^2} \right), \\ \mu \left(c_{21} - \frac{d_{21}}{b^2} \right) = \mu_0 c_{11}, \\ c_{21} + \frac{d_{21}}{b^2} = c_{11}. \end{cases}$$

Giải ra đối với c_{11} ta được

$$c_{11} = \frac{4\pi a^2 B_0}{b^2(\mu - \mu_0)^2 - a^2(\mu + \mu_0)^2},$$

Suy ra

$$\phi_1 = c_{11} r \cos \theta.$$

Cường độ từ trường bên trong ống hình trụ sẽ là

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= -\nabla \phi_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \\ &= -c_{11} (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= -c_{11} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{4\mu a^2}{a^2(\mu + \mu_0)^2 - b^2(\mu - \mu_0)^2} \mathbf{B}_0.\end{aligned}$$

Nếu $\mu \gg \mu_0$, từ trường trở thành

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4}{\mu} \frac{\mathbf{B}_0}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Hiển nhiên, giá trị của μ càng lớn bao nhiêu thì sự che chắn từ càng mạnh bấy nhiêu.

2. CẢM ỨNG ĐIỆN TỪ (2039 2063)

2039

Một cuộn dây hình trụ đồng đều, trong chân không, có $r_1 = 1$ m, $l_1 = 1$ m và có 100 vòng. Đồng trục và đặt tại tâm của cuộn này là một cuộn dây nhỏ hơn, có $r_2 = 10$ cm, $l_2 = 10$ cm và có 10 vòng. Hãy tính độ hồ cảm của hai cuộn dây đó.

(Columbia)

Lời giải:

Giả thiết dòng điện I_1 chạy qua cuộn dây ngoài, khi đó cảm ứng từ do nó tạo ra là

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1}.$$

Vì $r_2 \ll r_1, l_2 \ll l_1$, ta có thể coi từ trường B_1 là từ trường đều xuyên qua cuộn bên trong. Do đó từ thông qua cuộn bên trong là

$$\psi_{12} = N_2 B_1 S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I_1}{l_1} \pi r_2^2,$$

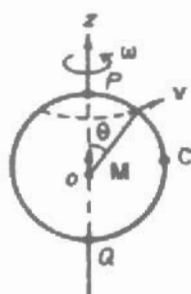
Từ thông này cho độ hồ cảm của hai cuộn dây là

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} \pi r_2^2 \approx 39,5 \text{ } \mu\text{H}.$$

2040

Một vòng dây tròn có bán kính R quay đều với tốc độ góc ω quanh đường kính PQ như trên hình 2.29. Tại tâm của vòng dây và nằm dọc theo đường kính này là một nam châm nhỏ có mômen từ toàn phần là M . Suất điện động cảm ứng là bao nhiêu giữa điểm P (hoặc Q) và một điểm ở giữa của vòng dây nối điểm P và điểm Q ?

(Columbia)



Hình 2.29

Lời giải:

Tại một điểm cách tâm của quả cầu một khoảng r , từ trường do nam châm nhỏ sinh ra là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right], \quad \mathbf{M} = M\mathbf{e}_z.$$

Lấy C là điểm giữa của cung $\widehat{PQ}$. Tốc độ của một điểm trên cung $\widehat{PC}$ là $\mathbf{v} = \omega R \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$. Suất điện động cảm ứng giữa các điểm P và C dọc theo cung $\widehat{PC}$ được cho bởi

$$\varepsilon_{PC} = \int_P^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad \text{với } d\mathbf{l} = R d\theta \mathbf{e}_\theta.$$

Vì $\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$, ta có

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega R M \sin \theta}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r)$$

và

$$\varepsilon_{PC} = \frac{\mu_0 M \omega}{4\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 M \omega}{4\pi R}.$$

2041

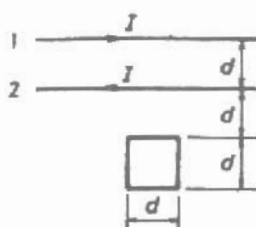
Hai dây dẫn dài vô hạn song song đặt cách nhau một khoảng cách d mang các dòng điện I bằng nhau nhưng ngược hướng nhau, trong đó I với tốc độ $\frac{dI}{dt}$. Một vòng dây hình vuông có chiều dài một cạnh là d nằm trong mặt phẳng

của các dây dẫn và cách một trong hai sợi dây song song một khoảng bằng d như trên hình 2.30.

(a) Hãy tìm suất điện động cảm ứng trên vòng dây hình vuông.

(b) Dòng điện cảm ứng theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ? Tại sao?

(Wisconsin)



Hình 2.30

Lời giải:

(a) Từ trường do một dây dẫn thẳng, dài vô hạn mang dòng điện I sinh ra tại một điểm cách dây dẫn một khoảng cách r , theo định luật Ampe về lưu số, là

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

Từ trường này có hướng vuông góc với sợi dây. Như vậy từ thông do dây dẫn 1 gửi qua vòng dây là

$$\phi_1 = \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$$

hướng của nó đi vào phía trong trang sách. Ngược lại, dây dẫn 2 ở gần vòng dây hơn, cho từ thông

$$\phi_2 = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln 2$$

hướng của nó đi ra ngoài trang sách. Do đó, từ thông toàn phần gửi qua vòng dây là

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{4}{3}$$

hướng đi ra ngoài trang sách. Do đó suất điện động cảm ứng trong vòng dây hình vuông là

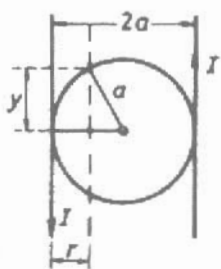
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{dI}{dt}.$$

(b) Từ trường do dòng điện cảm ứng sinh ra có xu hướng chống lại sự biến thiên của từ thông, sao cho từ trường này có hướng đi vào phía trong trang sách. Sau đó sử dụng quy tắc bàn tay phải ta thấy dòng điện cảm ứng chạy theo chiều kim đồng hồ.

2042

Hai dây dẫn có chiều dài vô hạn mang một dòng điện I . Hai dây dẫn này song song với nhau và cách nhau một khoảng bằng $2a$. Một vòng tròn dẫn điện bán kính a nằm trong mặt phẳng của hai dây dẫn, giữa hai dây dẫn và cách điện với chúng (H. 2.31). Hãy tìm hệ số hỗ cảm giữa vật dẫn hình tròn và hai dây dẫn thẳng.

(UC, Berkeley)



Hình 2.31

Lời giải:

Từ trường tại một điểm nằm giữa hai dây dẫn và cách một trong hai dẫn đó khoảng với khoảng r được tính như sau

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) \mathbf{e}_\theta.$$

Như vậy từ thông gửi qua diện tích của vòng tròn là

$$\begin{aligned}\phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_0^a B(r) \cdot 2\pi r dr \\ &= 2 \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a-r} \right) \cdot 2\pi \sqrt{a^2 - (a-r)^2} dr.\end{aligned}$$

Đặt $x = a - r$ và lấy tích phân

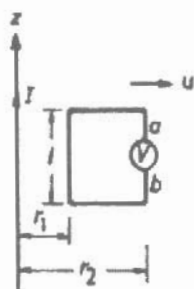
$$\begin{aligned}\phi &= 2 \int_0^a \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4\mu_0 I a}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2\mu_0 I a.\end{aligned}$$

Do đó hệ số hỗ cảm là

$$M = \frac{\phi}{I} = 2\mu_0 a.$$

2043

Trên hình 2.32, một dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện I hướng theo chiều $+z$. Một vòng dây hình chữ nhật có cạnh l được nối với một vôn kế và dịch chuyển với vận tốc u đi xa sợi dây. Hãy cho biết đầu nào của vôn kế (a hoặc b) là dương. Hãy tính số chỉ của vôn kế theo các khoảng cách r_1, r_2 và l . (Wisconsin)



Hình 2.32

Lời giải:

Từ trường tại một điểm có khoảng cách theo bán kính r là:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

hướng của nó vuông góc với tờ giấy và đi vào phía bên trong tờ giấy. Suất điện động cảm ứng trong vòng hình chữ nhật (cũng chính là số chỉ của của vôn kế) là:

$$V = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I u l}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

nếu chúng ta lấy tích phân theo chiều kim đồng hồ. Chú ý rằng $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ có hướng như $+z$. Vì $V > 0$, nên dấu a là dương.

2044

Một lõi sắt hình trụ dài, đồng đều nhưng từ những lá xếp lại, có bán kính 0,1 m được cuốn dây một cách đồng đều, tạo ra trong nó một từ trường đều có độ lớn $B(t) = \frac{1}{\pi} \sin(400t)$ Wb/m².

(a) Xác định điện áp trên một vòng trong cuộn dây.

(b) Xác định thể vectơ $\mathbf{A}(r)$ do lõi sắt này sinh ra tại những điểm $r > 0,1$ m?

(c) Xác định $\mathbf{B}(r, t)$ do lõi sắt sinh ra tại những điểm $r > 0,1$ m?

(d) Xác định $\mathbf{A}(r, t)$ do lõi sắt này sinh ra tại những điểm $r < 0,1$ m?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Điện áp trên một vòng trong cuộn dây phải cân bằng với suất điện động cảm ứng, nghĩa là

$$\begin{aligned} V &= -\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \\ &= 400R^2 \cos(400t) = 4 \cos(400t) \text{ V.} \end{aligned}$$

(b) Xét một đường hình tròn C có bán kính $r > 0,1$ m với trục nằm dọc theo trục của lõi sắt. Do đối xứng, ta thấy rằng độ lớn của $\mathbf{A}(r)$ giống nhau ở mọi điểm trên vòng tròn và có hướng tiếp tuyến với vòng tròn (cùng hướng với dòng điện). Sử dụng $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ trong định lý Stoke, ta có

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Vì $\mathbf{B}$ bằng không ở bên ngoài một xôlênoit dài và có giá trị đồng đều ở bên trong nó, nên vế bên phải của phương trình trên sẽ là

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot \pi R^2 = 0,01 \sin(400t).$$

Khi đó định lý Stoke quy về phương trình $2\pi r A(r, t) = 0,01 \sin(400t)$, từ đó tính được

$$A(t, r) = \frac{1}{200\pi r} \sin(400t) \quad \text{Wb/m}.$$

(c) Từ trường do lõi sắt gây ra bằng 0 đối với $r > 0,1$ m. (Nói đúng ra, có một từ trường rất nhỏ bên ngoài xôlênoit có phương tiếp tuyến với vòng tròn trong câu (b) và có độ lớn $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, I là dòng điện trong lõi sắt, nhưng từ trường này thông thường được bỏ qua)

(d) Đối với $r < 0,1$ m, định lý Stocke, ta có

$$2\pi r A(r, t) = \pi r^2 B = \pi r^2 \cdot \frac{1}{\pi} \sin(400t)$$

Từ đó suy ra

$$A(r, t) = \frac{r}{2\pi} \sin(400t) \quad \text{Wb/m}.$$

2045

Một vành sắt có bán kính 10 cm và diện tích tiết diện là 12 cm^2 được quấn đều 1200 vòng dây dẫn cách điện. Có một khe hở không khí trong vành sắt với 1 mm. Độ từ thẩm của sắt là 700 và giả thiết không phụ thuộc vào từ trường; hiện tượng trễ được bỏ qua.

(a) Hãy tính từ trường trong khe hở khi dòng điện là 1 A chạy qua cuộn dây.

(b) Hãy tính độ tự cảm của cuộn dây (với lõi sắt này).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng kết quả của bài tập 2029 ta có

$$(a) B = \frac{\mu_0 N I}{\frac{2\pi R-d}{\mu_r} + d} = 0,795 \text{ T.}$$

$$(b) L = \frac{BAN}{I} = 1,14 \text{ H.}$$

2046

Hai vòng dây tròn được lắp đặt như trên hình 2.33. Hãy tìm độ hồ cảm giữa hai vòng dây này, giả thiết $b \ll a$.

(Wisconsin)

Lời giải:

Khi $b \ll a$, từ trường tại vòng dây nhỏ do vòng lớn tạo ra sẽ được coi gần đúng như từ trường trên trục của vòng lớn, cụ thể là

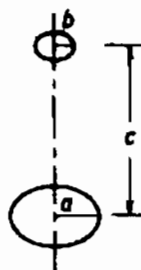
$$B = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + c^2)^{3/2}},$$

trong đó I là dòng điện trong vòng dây lớn. Do đó, từ thông đi qua vòng dây nhỏ là

$$\psi_{12} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + c^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2$$

và độ hồ cảm là

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I} = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2}{2(a^2 + c^2)^{3/2}}.$$



Hình 2.33

2047

Một cuộn dây có diện tích 4 cm^2 , gồm 160 vòng dây được quấn chặt và điện trở 50Ω . Cuộn dây này được nối với một điện kế xung kích có điện trở 30Ω . Khi cuộn dây quay nhanh từ vị trí song song với một từ trường đều đến vị trí vuông góc với từ trường đó thì điện kế chỉ một điện tích là $4 \times 10^{-5} \text{ C}$. Tính cảm ứng từ của từ trường đó.

(Wisconsin)

Lời giải:

Giả thiết rằng cuộn dây dò quay từ một vị trí song song với một từ trường đều đến vị trí vuông góc với từ trường đó trong khoảng thời gian Δt . Vì Δt rất ngắn, ta có thể viết

$$\epsilon = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = i(R + r).$$

Vì $q = i\Delta t$, nên sự tăng của từ thông là

$$\Delta \phi = q(R + r) = BAN,$$

bởi vì cuộn dây bây giờ vuông góc với từ trường. Do đó cảm ứng từ là

$$B = \frac{(R + r)q}{AN} = \frac{(50 + 30) \times (4 \times 10^{-5})}{4 \times 10^{-4} \times 160} \\ = 0,05 \text{ T} = 50 \text{ Gs}.$$

2048

Hai cuộn dây tròn đồng trục có bán kính a và b đặt cách nhau một khoảng cách x và mang các dòng điện i_a và i_b tương ứng. Giả thiết $a \gg b$.

(a) Độ hồ cảm là bao nhiêu?

(b) Lực tương tác giữa hai dòng điện này là bao nhiêu?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Như trong bài tập 2046, độ hồ cảm là

$$M_{12} = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

(b) Coi cuộn nhỏ b như một mômen lưỡng cực từ $m_b = \pi b^2 i_b$. Lực tác dụng làm nó được cho bởi

$$F = m_b \left| \frac{\partial B_a}{\partial x} \right| = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2 i_a i_b}{2} \cdot \frac{3x}{(a^2 + b^2)^{5/2}}$$

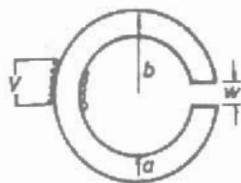
Nếu các dòng điện trong hai cuộn dây có cùng hướng thì lực sẽ là lực hút. Nếu hướng của các dòng điện trái nhau thì lực sẽ là lực đẩy.

2049

Một nam châm điện một chiều được tạo ra bằng cách quấn chặt N vòng dây trên một lõi sắt có dạng tựa một ống hình xuyên được cắt một miếng nhỏ để tạo thành một khe hở như trên hình 2.34. Các bán kính của hình xuyên này là a và b , bề rộng của khe hở là w . Độ từ thẩm μ đối với sắt có thể giả thiết là lớn và không đổi. Dây dẫn dùng trong nam châm này có bán kính r và điện trở suất ρ . Nam châm hoạt động bằng cách đặt vào hai đầu cuộn dây một hiệu điện thế hiệu V . Để đơn giản, giả thiết rằng $b/a \gg 1$ và $a/r \gg 1$. Tìm biểu thức đối với các đại lượng sau:

- Giá trị của từ trường trong khe hở.
- Giá trị của công suất đã tiêu hao trong cuộn dây.
- Hằng số thời gian chi phối đáp ứng của dòng điện trong cuộn dây đối với sự thay đổi đột ngột của V .

(UC, Berkeley)



Hình 2.34

Lời giải:

(a) Trong trạng thái dừng, vì $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ và tiết diện của lõi sắt giống nhau ở mọi nơi nên B phải không đổi trong lõi sắt. Áp dụng phương trình

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$ đối với ống hình xuyên, ta có

$$\frac{B}{\mu}(2\pi b - W) + \frac{B}{\mu_0}W = NI,$$

Rút ra

$$B = \frac{NI\mu_0\mu}{\mu_0(2\pi b - W) + \mu W} \approx \frac{NI\mu_0\mu}{\mu_0 2\pi b + \mu W}.$$

Vì

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho \frac{N 2\pi a}{\pi r^2}} = \frac{V r^2}{2a\rho N},$$

giá trị ở trạng thái dừng đối với từ trường trong khe hở là

$$B = \frac{\mu_0\mu V r^2}{2a\rho(2\pi b\mu_0 + W\mu)}.$$

(b) Giá trị ở trạng thái dừng đối với công suất đã tiêu hao trong cuộn dây là

$$P = IV = \frac{V^2 r^2}{2a\rho N}.$$

(c) Độ tự cảm của cuộn dây là

$$L = \frac{NB\pi a^2}{I} = \frac{N^2\mu_0\mu\pi a^2}{\mu_0 2\pi b + \mu W},$$

Như vậy, hằng số thời gian chi phối đáp ứng của dòng điện trong cuộn dây đối với sự thay đổi đột ngột của V là

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{N^2\mu_0\mu\pi a^2}{\mu_0 2\pi b + \mu W} \bigg/ \frac{\rho N 2\pi a}{\pi r^2} = \frac{N\mu_0\mu a \pi r^2}{2\rho(\mu_0 2\pi b + \mu W)}.$$

2050

Một xônônôit rất dài có n vòng trên một đơn vị chiều dài mang một dòng điện tăng đều theo với thời gian, $i = Kt$.

(a) Hãy tính từ trường bên trong xônônôit tại thời điểm t (bỏ qua sự trễ).

(b) Hãy tính điện trường bên trong xônônôit.

(c) Xét một hình trụ có chiều dài l , bán kính bằng với bán kính của xôlênoit và đồng trục với xôlênoit. Hãy tìm tốc độ năng lượng chảy vào trong thể tích của hình trụ và chứng minh rằng nó bằng $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}lLi^2)$, với L là độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của xôlênoit.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) với trục z dọc theo trục của xôlênoit.

(a) Áp dụng định luật Ampe về lưu số $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i$ đối với một hình chữ nhật có các cạnh dài song song với trục z , một cạnh nằm ở bên trong và cạnh kia ở bên ngoài xôlênoit, ta nhận được $H = ni$, hay

$$\mathbf{B} = \mu_0 n K t \mathbf{e}_z.$$

(b) Phương trình Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ cho

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\mu_0 n K.$$

Lưu ý rằng, do đối xứng, E không phụ thuộc vào θ và lấy tích phân, ta có

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 n K r}{2} \mathbf{e}_\theta.$$

(c) Vectơ Poynting là

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{\mu_0 n^2 K^2}{2} r t \mathbf{e}_r.$$

Như vậy năng lượng chảy vào trong ống hình trụ dọc theo hướng bán kính. Khi đó năng lượng chảy vào trong một đơn vị thời gian là

$$\frac{dW}{dt} = 2\pi r l N = \mu_0 V n^2 K^2 t,$$

ở đó V là thể tích của hình trụ. Độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của xôlênoit là

$$L = \frac{nB\pi r^2}{i} = \mu_0 n \pi r^2.$$

Do đó

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l L i^2 \right) = \mu_0 V n^2 K^2 t = \frac{dW}{dt}.$$

2051

Xét một vòng dây hình chữ nhật có chiều rộng a và chiều dài b , quay với tốc độ góc ω quanh trục PQ và nằm trong một từ trường đều phụ thuộc vào thời gian $B = B_0 \sin \omega t$ vuông góc với mặt phẳng vòng dây tại $t = 0$ (xem H. 2.35). Hãy tìm suất điện động cảm ứng trong vòng dây, và chứng minh rằng nó đổi chiều với tần số gấp đôi tần số $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

(Columbia)



Hình 2.35

Lời giải:

Từ thông đi qua vòng dây là

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B_0 ab \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} B_0 ab \sin(2\omega t).$$

Do đó, suất điện động cảm ứng là

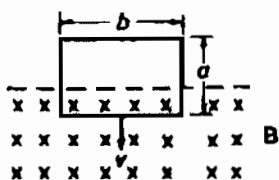
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 ab \omega \cos(2\omega t).$$

Tần số xoay chiều của nó là $\frac{2\omega}{2\pi} = 2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = 2f$.

2052

Một cuộn dây hình chữ nhật điện trở R có các kích thước a và b dịch chuyển với tốc độ v không đổi vào trong từ trường $\mathbf{B}$ như trên hình 2.36. Tìm một biểu thức của lực tác dụng lên cuộn dây theo các thông số đã cho.

(Wisconsin)



Hình 2.36

Lời giải:

Khi cuộn dây bắt đầu cắt qua các đường sức từ, trong cuộn dây xuất hiện một suất điện động cảm ứng có độ lớn

$$\varepsilon = - \int \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = -Bvb$$

và tạo ra trong cuộn dây một dòng điện

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Bvb}{R}.$$

Dấu âm cho thấy dòng điện chạy ngược chiều kim đồng hồ. Lực tác dụng lên cuộn dây là

$$F = \left| \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right| = IbB = \frac{vb^2 B^2}{R}.$$

hướng của lực này ngược với hướng của $\mathbf{v}$. Nghĩa là, lực này chống lại sự dịch chuyển có xu hướng làm tăng sự cắt các đường sức từ trường.

2053

Một lực không đổi F đặt lên một dây dẫn trượt có khối lượng m . Dây dẫn đó bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên vào một vùng có từ trường không đổi B . Giả thiết rằng tiếp xúc trượt không có ma sát và độ tự cảm của dây dẫn đó có thể bỏ qua.

(a) Hãy tính tốc độ của dây dẫn như một hàm của thời gian.

(b) Hãy tính dòng điện đi qua điện trở R như một hàm của thời gian. Hướng của dòng điện như thế nào?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Khi dây dẫn dịch chuyển qua từ trường đều, trong dây sẽ xuất hiện một suất điện động cảm ứng $\varepsilon = Blv$, trong đó l là chiều dài của sợi dây trong từ trường và v là tốc độ của nó. Suất điện động này gây ra một dòng điện chạy trong sợi dây có độ lớn $I = \varepsilon/R$, R là điện trở của sợi dây, do đó có một lực từ $|I\mathbf{dl} \times \mathbf{B}| = IlB$ tác động lên sợi dây. Lực này ngược chiều chuyển động của sợi dây. Như vậy phương trình chuyển động của dây dẫn trượt là

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Giải phương trình này ta có

$$v(t) = \frac{RF}{B^2 l^2} + C \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right).$$

Vì $v = 0$ tại $t = 0$, ta tìm được $C = -\frac{RF}{B^2 l^2}$. Do đó

$$v(t) = \frac{FR}{B^2 l^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)\right].$$

(b) Dòng điện là

$$I(t) = \frac{Blv(t)}{R} = \frac{F}{Bl} \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right)\right].$$

2054

Một hình chữ nhật làm bằng dây dẫn điện hoàn hảo có các cạnh a và b , khối lượng M và độ tự cảm L , chuyển động với tốc độ ban đầu v_0 trong mặt phẳng của nó, hướng dọc theo cạnh dài từ miền từ trường bằng 0 vào miền có từ trường đều B_0 , vuông góc với mặt phẳng của hình chữ nhật. Mô tả chuyển động của hình chữ nhật như một hàm của thời gian.

(Columbia)

Lời giải:

Lấy $b > a$, hình chữ nhật sẽ chuyển động theo cạnh b và phương trình chuyển động là

$$m \frac{dv}{dt} = -B_0 a I,$$

trong đó I là dòng điện cảm ứng trong dây dẫn được xác định bởi phương trình

$$L \frac{dI}{dt} = B_0 a v.$$

Kết hợp hai phương trình vi phân trên ta được

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v = 0$$

với $\omega = \frac{B_0 a}{\sqrt{mL}}$. Giải phương trình này ta nhận được tốc độ của hình chữ nhật

$$v = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Vì $v = v_0$ tại $t = 0$ suy ra $C_2 = v_0$; và vì $I = 0$ tại $t = 0$, suy ra $C_1 = 0$. Do đó

$$v = v_0 \cos \omega t.$$

Độ dịch chuyển của hình chữ nhật làm bằng dây dẫn (với $s = 0$ tại $t = 0$) là

$$s = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

2055

Một vòng dây hình chữ nhật với các cạnh l và w tại $t = 0$ được buông ra từ trạng thái đứng yên ở bên trên một miền trong đó có từ trường B_0 như thấy trên hình 2.37. Vòng dây có điện trở R , độ tự cảm L và khối lượng m . Xét vòng dây trong thời gian mà đầu trên của nó còn nằm trong vùng từ trường bằng 0.

(a) Giả thiết rằng độ tự cảm có thể bỏ qua nhưng điện trở thì không. Hãy tìm dòng điện và tốc độ của vòng dây như một hàm của thời gian.

(b) Giả thiết rằng điện trở có thể bỏ qua nhưng độ tự cảm thì không. Hãy tìm dòng điện và tốc độ của vòng dây như một hàm của thời gian.

(MIT)

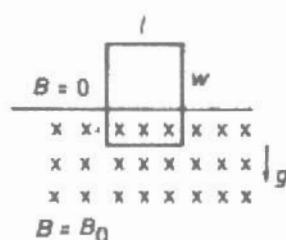
Lời giải:

Trong thời gian nêu trong đề bài ta có

$$\varepsilon = Blv,$$

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR,$$

$$F = mg - BIl = m \frac{dv}{dt}.$$



Hình 2.37

(a) Sử dụng kết quả của bài tập 2053, ta có

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left[1 - \exp \left(- \frac{B^2 l^2}{mR} t \right) \right],$$

$$I = \frac{mg}{Bl} \left[1 - \exp \left(- \frac{B^2 l^2}{mR} t \right) \right].$$

(b) $R = 0$. Ta có $L \frac{dI}{dt} = mlv$ và phương trình chuyển động bây giờ là

$$m \frac{dv}{dt} = mg - BIl.$$

Từ hai phương trình trên ta có

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v = 0,$$

với $\omega^2 = \frac{B^2 l^2}{mL}$. Nghiệm tổng quát là

$$v = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Vì $v = 0, I = 0$ tại $t = 0$, ta tìm được $c_1 = 0, c_2 = \frac{g}{\omega}$. Do đó

$$v = \frac{g}{\omega} \sin \omega t,$$

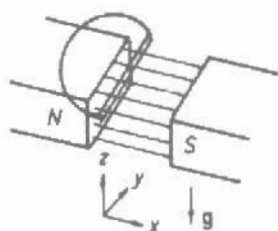
$$I = \frac{mg}{Bl} (1 - \cos \omega t),$$

với $\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$.

2056

Trong hình 2.38 một dây dẫn thẳng dài hướng theo chiều y nằm trong một từ trường đều $B\mathbf{e}_x$. Khối lượng trên một đơn vị dài và điện trở trên một đơn vị dài của dây dẫn lần lượt là ρ và λ . Sợi dây có thể coi như kéo dài đến mép của từ trường, ở đó hai đầu của dây dẫn thẳng này được nối với nhau bằng một dây dẫn hoàn hảo, không khối lượng và nằm ngoài từ trường. Các hiệu ứng rìa có thể bỏ qua. Nếu dây dẫn thẳng được phép rơi dưới ảnh hưởng của trọng lực ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$) thì tốc độ cuối của nó là bao nhiêu khi nó rời qua từ trường?

(MIT)



Hình 2.38

Lời giải:

Khi dây dẫn thẳng cắt qua các đường sức từ thì trong dây dẫn này xuất hiện một suất điện động cảm ứng và tạo ra dòng điện. Giả thiết chiều dài của sợi dây là l và tốc độ cuối là $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$. Như vậy dòng điện cảm ứng được cho bởi

$$\int_l \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = i\lambda l.$$

Suy ra

$$i = -\frac{vBl}{\lambda l} = -\frac{vB}{\lambda},$$

chạy theo hướng $-y$. Lực từ tác dụng lên dây dẫn thẳng là

$$\mathbf{F} = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = iBl\mathbf{e}_z = \frac{vB^2l}{\lambda}\mathbf{e}_z.$$

Khi tốc độ cuối đạt được, lực này cân bằng với trọng lực. Do đó tốc độ cuối của sợi dây được cho bởi

$$\frac{vB^2l}{\lambda} = \rho l g.$$

nghĩa là

$$v = \frac{\rho g \lambda}{B^2}$$

hay

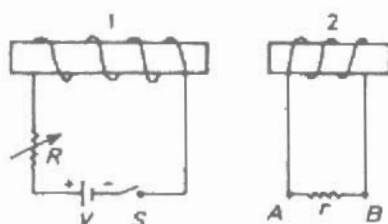
$$\mathbf{v} = -\frac{\rho g \lambda}{B^2} \mathbf{e}_z$$

2057

Trong hình 2.39, hướng của dòng điện trong điện trở r là như thế nào (từ A tới B hay từ B tới A) khi thực hiện những tác động sau? Trong từng trường hợp, hãy đưa ra những giải thích ngắn gọn cho lập luận của bạn.

- (a) Công tắc S đóng.
- (b) Cuộn 2 dịch chuyển lại gần cuộn 1.
- (c) Điện trở R giảm.

(Wisconsin)



Hình 2.39

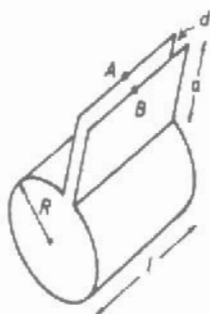
Lời giải:

Trong cả ba trường hợp, từ trường tại cuộn 2 do cuộn 1 tạo ra đều tăng. Định luật Lenz đòi hỏi từ trường do dòng điện cảm ứng sinh ra trong cuộn 2 phải ngăn cản được sự tăng của từ trường qua cuộn 2. Áp dụng quy tắc bàn tay phải chúng ta thấy rằng hướng của dòng điện trong điện trở r là từ B tới A .

2058

Một miếng đồng lá được uốn cong thành hình có dạng như trên hình 2.40. Giả thiết $R = 2 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $d = 0,4 \text{ cm}$. Hãy ước lượng tần số cộng hưởng thấp nhất của cấu trúc này và độ tự cảm đo được giữa các điểm A và B, khi độ tự cảm được đo tại một tần số thấp hơn rất nhiều so với tần số cộng hưởng.

(UC, Berkeley)



Hình 2.40

Lời giải:

Xét dòng điện trong lá đồng. Vì $d \ll R$, ta có thể coi các dòng điện trong hai phía của hình trụ là cùng pha. Tức là dòng điện đi vào từ một phía và đi ra ở phía kia với cùng một độ lớn. Theo đó, bước sóng cực đại là $2\pi R$. Dọc theo hướng trục, các mật độ dòng điện đều bằng 0 tại cả hai đầu của hình trụ sao cho nửa bước sóng cực đại là l , hay bước sóng cực đại là $2l$. Vì $2l \gg 2\pi R$, bước sóng cực đại là $2l = 20 \text{ cm}$, hay tần số cộng hưởng thấp nhất là

$$f_0 = \frac{c}{2l} = \frac{3 \times 10^{10}}{20} = 1,5 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

Khi tần số thấp hơn nhiều so với f_0 ta có thể coi như dòng điện phân bố đều trên bề mặt hình trụ và thay đổi chậm theo thời gian. Kết quả là, về cơ bản chúng ta đang giải quyết một vấn đề về trạng thái tĩnh. Bỏ qua các hiệu ứng rìa, cảm ứng từ bên trong cấu trúc là

$$B = \mu_0 i = \frac{\mu_0 I}{l}.$$

Từ thông đi qua tiết diện của cấu trúc là

$$\phi = BS = \frac{\mu_0 I}{l} (\pi R^2 + ad),$$

Từ đó suy ra độ tự cảm là

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{l}(\pi R^2 + ad) \\ = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (\pi \times 0,02^2 + 0,02 \times 0,004)}{0,1} = 1,68 \times 10^{-8} \text{ H.}$$

2059

Một vật dẫn điện hình cầu không tích điện, được từ hoá, bán kính R có từ trường bên trong là

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = A r_{\perp}^2 \hat{\mathbf{K}},$$

trong đó A là hằng số, $\hat{\mathbf{K}}$ là một vectơ đơn vị không đổi qua tâm của quả cầu và $r_{\perp}$ là khoảng cách từ điểm $\mathbf{r}$ đến trục $\hat{\mathbf{K}}$. (Trong một hệ toạ độ Đề các như trên hình 2.41, $\hat{\mathbf{K}}$ hướng theo trục z , tâm quả cầu ở tại gốc toạ độ và $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$). Bây giờ quả cầu được quay tròn xung quanh trục z (một cách phi tương đối) với tần số góc ω .

(a) Xác định từ trường (trong “hệ phòng thí nghiệm”) tồn tại bên trong quả cầu quay.

(b) Sự phân bố điện tích thể nào? (Không tính bất kì điện tích bề mặt nào).

(c) Sự sụt thế được đo bởi một vôn kế tĩnh là bao nhiêu, khi một đầu của vôn kế đặt tại cực của quả cầu quay và đầu kia chạm vào đường xích đạo chuyển động của quả cầu? (hình 2.42).

(CUSPEA)

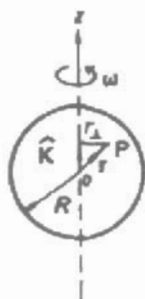
Lời giải:

(a) Tại điểm P của vectơ bán kính $\mathbf{r}$ từ trường là $\mathbf{B} = A r_{\perp}^2 \mathbf{e}_z$. Tốc độ của P là

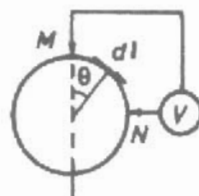
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}.$$

Đối với một điện tích tự do q để giữ nguyên trạng thái dừng bên trong quả cầu thì tổng hợp lực tác dụng lên nó, $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, phải bằng không. Như vậy, cường độ từ trường tại P là

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -A\omega r_{\perp}^2 (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}_z \\ = -A\omega(x^2 + y^2)(x\mathbf{e}_z + y\mathbf{e}_y).$$



Hình 2.41



Hình 2.42

(b) Từ phương trình $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$, ta nhận được mật độ điện tích khối bên trong quả cầu

$$\rho = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -4 \frac{A\omega r^2}{\epsilon},$$

trong đó ϵ là hằng số điện môi của vật dẫn.

(c) Để tìm V ta tích phân từ N đến M dọc theo một đường tròn lớn bán kính R (xem H. 2.42)

$$V = - \int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Trong hệ tọa độ cầu $d\mathbf{l} = R d\theta \mathbf{e}_\theta$ và đối với một điểm (x, y, z) , $r_\perp = r \sin \theta$, $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = r_\perp (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta)$. Như vậy, điện trường trên mặt cầu là

$$\mathbf{E} = -A\omega R^3 \sin^3 \theta (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta),$$

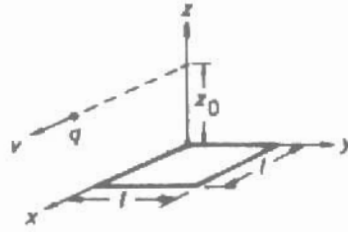
Từ đó suy ra

$$V = A\omega R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \frac{A\omega R^3}{4}.$$

2060

Xét một vòng dây hình vuông có chiều dài cạnh là l nằm trong mặt phẳng x, y như trong hình 2.43. Giả thiết rằng một hạt điện tích q chuyển động với tốc độ không đổi v , $v \ll c$, trong mặt phẳng xz cách mặt phẳng xy một khoảng z_0 (giả thiết hạt này chuyển động theo hướng x dương). Giả thiết rằng hạt điện tích đi qua trục z tại $t = 0$. Hãy biểu diễn suất điện động cảm ứng xuất hiện trong vòng dây như một hàm của thời gian.

(Columbia)



Hình 2.43

Lời giải:

Tại thời điểm t , vị trí của q là $(vt, 0, z_0)$. Vectơ bán kính $\mathbf{r}$ từ q đến một điểm điện trường (x, y, z) là $(x - vt, y, z - z_0)$. Khi $v \ll c$, điện từ trường do điện tích q chuyển động đều gây ra là

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} [(x - vt)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^3} (-(z - z_0)\mathbf{j} + y\mathbf{k}),\end{aligned}$$

với

$$r = [(x - vt)^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Suất điện động cảm ứng trong vòng dây được cho bởi tích phân

$$\varepsilon = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

trong đó S là diện tích của vòng dây và $d\mathbf{S} = dxdy\mathbf{k}$. Như vậy

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{\mu_0 q v}{4\pi} \int_0^l dx \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l dy \frac{y}{[(x - vt)^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 q v}{4\pi} \int_0^l dx \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (z - z_0)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + l^2 + (z - z_0)^2}} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \int_0^l dx \left[\frac{x - vt}{[(x - vt)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{x - vt}{[(x - vt)^2 + l^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \Bigg] \\
& = - \frac{\mu_0 q v^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{v^2 t^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l - vt)^2 + (z - z_0)^2}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(l + vt)^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{v^2 t^2 + l^2 + (z - z_0)^2}} \right\}.
\end{aligned}$$

2061

Một ống hình trụ cách điện rất dài (hằng số điện môi ϵ) có chiều dài L và bán kính R ($L \gg R$) có một điện tích Q phân bố đều trên mặt ngoài của nó. Một điện trường ngoài đều đặt vuông góc với trục của hình trụ: $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$ (xem H. 2.44). Bỏ qua các hiệu ứng rìa.

(a) Hãy tính điện thế ở mọi nơi (nghĩa là ở cả bên trong và bên ngoài hình trụ).

Bây giờ điện trường E_0 bị bỏ đi và ống hình trụ được quay với tốc độ góc ω .

(b) Hãy tìm từ trường (độ lớn và hướng) bên trong hình trụ.

(c) Một vòng dây có bán kính $2R$ và điện trở ρ được quấn quanh hình trụ như trên hình 2.45 và sự quay của hình trụ được làm chậm lại một cách tuyến tính ($\omega(t) = \omega_0(1 - t/t_0)$) như một hàm của thời gian. Độ lớn của dòng điện cảm ứng trong vòng dây là bao nhiêu? Dòng đó chạy theo hướng nào?

(d) Thay cho vòng dây ở phần (c), một vòng dây được đặt qua ống hình trụ như trên hình 2.46 và hình trụ quay này được làm chậm lại như trước. Bây giờ dòng điện chạy trong vòng dây là bao nhiêu?

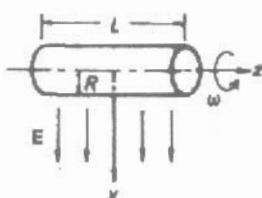
(Princeton)

Lời giải:

(a) Theo nguyên lý chồng chập, điện thế được coi như tổng các điện thế do Q và $\mathbf{E}$ sinh ra. Điện thế do Q sinh ra là

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r}{R}, & r > R. \end{cases}$$

Ở đây điện thế được lấy bằng 0 tại tâm hình trụ. Gọi φ_2 là điện thế do điện



Hình 2.44

trường đều E gây ra. Khi đó $\nabla^2 \varphi_2 = 0$ ($r \neq R$), hay trong hệ tọa độ trụ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} = 0.$$

Dùng phương pháp tách biến số ta nhận được nghiệm tổng quát

$$\varphi_2 = \begin{cases} \sum_n [r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)], & r < R \\ \sum_n [r^n (e_n \cos n\theta + f_n \sin n\theta) + \frac{1}{r^n} (g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta)], & r > R. \end{cases}$$

Từ điều kiện biên $\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta$ đối với $r \rightarrow \infty$ ta nhận được $e_1 = -E_0$, $f_1 = 0$, $e_n = f_n = 0$ đối với $n \neq 1$. Từ điều kiện $\varphi_2 = 0$ đối với $r \rightarrow 0$ ta nhận được $c_n = d_n = 0$ đối với mọi n . Khi $r = R$, ta có các điều kiện biên

$$\varphi_2 \Big|_{r=R^-} = \varphi_2 \Big|_{r=R^+}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R^+},$$

từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sum_n R^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) &= -RE_0 \cos \theta \\ &+ \sum_n \frac{1}{R^n} (g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta), \\ \varepsilon \sum_n n R^{n-1} (a_n \cos \theta + b_n \sin \theta) &= -\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \\ &- \varepsilon_0 \sum_n \frac{n}{R^{n+1}} (g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta). \end{cases}$$

Các phương trình này có nghiệm là

$$a_1 = -\frac{2E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}, \quad g_1 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)R^2 E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}, \quad b_1 = h_1 = 0, \\ a_n = b_n = g_n = h_n = 0 \quad \text{với } n \neq 1.$$

Như vậy

$$\varphi_2 = \begin{cases} -\frac{2E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} r \cos \theta, & r < R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)R^2 E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}, & r > R. \end{cases}$$

Do đó tổng điện thế là

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \begin{cases} -\frac{2E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} r \cos \theta, & r < R \\ -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{r}{R} - E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{R^2 E_0}{r} \cos \theta, & r > R. \end{cases}$$

(b) Với E đã bỏ đi và hình trụ quay quanh trục của nó với tốc độ góc ω , một mật độ dòng điện mặt $\frac{Q}{2\pi RL} \cdot \omega R = \frac{Q\omega}{2\pi L}$ được sinh ra. Theo định luật Ampe về lưu số, ta tìm được từ trường

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi L} \mathbf{e}_z$$

ở bên trong hình trụ.

(c) Từ thông gửi qua vòng dây trên hình 2.45 là

$$\phi = \pi R^2 B = \frac{\mu_0 Q \omega R^2}{2L}.$$

vì không có từ thông bên ngoài hình trụ. Do đó suất điện động cảm ứng là

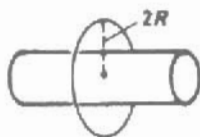
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 Q R^2}{2L} \left(-\frac{d\omega}{dt} \right) = \frac{\mu_0 Q R^2 \omega_0}{2L t_0}$$

và dòng điện cảm ứng là

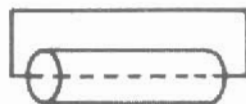
$$i = \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{\mu_0 Q R^2 \omega_0}{2\rho L t_0}.$$

Theo định luật Lenz hướng của i là hướng quay của hình trụ.

(d) Không có từ thông gửi qua vòng dây trên hình 2.46, do đó không có dòng điện cảm ứng trong vòng dây đó.



Hình 2.45



Hình 2.46

2062

Xét một mạch kín của một dây dẫn được quấn thành một cuộn dây N vòng với bán kính a , điện trở R và độ tự cảm L . Cuộn dây quay trong từ trường đều $\mathbf{B}$ quanh một đường kính vuông góc với trường.

(a) Hãy tìm dòng điện bên trong cuộn dây như một hàm của θ trong quá trình quay với tốc độ góc không đổi ω , ở đây $\theta(t) = \omega t$ là góc giữa mặt phẳng của cuộn dây và $\mathbf{B}$.

(b) Hãy tìm mômen ngoại lực cần thiết để giữ sự quay đều này. (Trong cả hai phần bạn nên giả thiết rằng các hiệu ứng quá độ không còn nữa.)

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Suất điện động cảm ứng trong cuộn dây được cho bởi

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Lưu ý rằng vì vectơ $d\mathbf{S}$ vuông góc với mặt phẳng của cuộn dây, nên $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) dS$, với $\theta = \omega t$, ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d}{dt} \int_S B \sin(\omega t) dS = -\frac{d}{dt} [\pi a^2 N B \sin(\omega t)] \\ &= -\pi a^2 \omega N B \cos(\omega t) \\ &= -\text{Re} [\pi a^2 \omega N B \exp(i\omega t)]. \end{aligned}$$

Dòng điện trong mạch được xác định từ phương trình

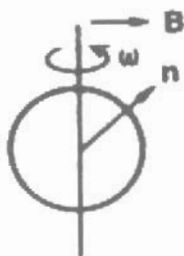
$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon.$$

Đặt $I = I_0 \exp(i\omega t)$, thay vào phương trình trên ta được

$$I_0 = \frac{-\pi a^2 \omega N B}{i\omega L + R} = \frac{\pi a^2 \omega N B}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \varphi)},$$

với $\varphi = \arctan(\frac{\omega L}{R})$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\pi a^2 \omega N B}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi a^2 \omega N B}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$



Hình 2.47

(b) Mômen lưỡng cực từ của cuộn dây là

$$\mathbf{m} = I\pi a^2 N \mathbf{n},$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với cuộn dây. Tại thời điểm t mômen lực tác dụng lên cuộn dây $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ có độ lớn

$$\tau = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = I\pi a^2 N B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{(\pi a^2 N B)^2 \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi).$$

2063

Bạn được trang bị các nguồn dòng và một xưởng để chế tạo các linh kiện điện tuyến tính đơn giản ví dụ như: cuộn dây, cuộn cảm, tụ điện và điện trở. Bạn có những dụng cụ để đo các lực cơ học nhưng không có các dụng cụ đo điện. Hãy xây dựng một thí nghiệm để đo ampe (cường độ dòng điện) dựa vào những thiết bị trên và những hiểu biết của bạn về những phương trình cơ bản của điện và từ.

(Chicago)

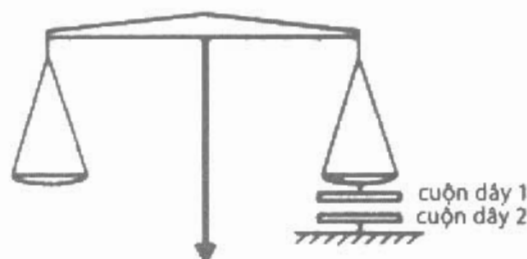
Lời giải:

Tạo hai cuộn dây tròn giống hệt nhau và sắp xếp chúng đồng trục dưới một đĩa của một cái cân để tạo nên một cái cân Ampe như được vẽ phác trên hình 2.48. Độ hồ cảm giữa các cuộn dây là $M_{12}(z)$. Các cuộn dây được nối với cùng một nguồn dòng. Với những quả cân chuẩn đặt trên các đĩa cân, lực F_{12} giữa hai cuộn dây có thể đo được. Khi các cuộn dây được nối với cùng một nguồn dòng, phần hồ cảm của năng lượng từ được tích trữ trong hai cuộn dây là

$$W_{12} = M_{12}I_1I_2 = M_{12}I^2,$$

Do đó lực tương tác là

$$F_{12} = \frac{\partial W_{12}}{\partial z} = I^2 \frac{\partial M_{12}(z)}{\partial z}.$$



Hình 2.48

Sử dụng giá trị lực đo được nhờ cân Ampe và tính $\frac{\partial M_{12}(z)}{\partial z}$, sẽ xác định được I .
Sử dụng hệ đơn vị MKSA giá trị của dòng xác định được theo ampe.

3. TÁC DỤNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ LÊN CÁC VẬT DẪN CÓ DÒNG ĐIỆN VÀ CÁC HẠT TÍCH ĐIỆN (2064 2090)

2064

Hai dây dẫn song song mang các dòng điện i_1 và i_2 chạy theo cùng một hướng. Các dây dẫn này sẽ:

- (a) hút lẫn nhau.
- (b) đẩy nhau.
- (c) không có lực tác dụng lên nhau.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2065

Hai dây dẫn dài vuông góc đặt cách nhau một khoảng cách a và mang các dòng điện I_1 và I_2 . Xét một đoạn dây đặt đối xứng $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ trên sợi dây mang dòng điện I_2 có chiều dài $l \ll a$ như trên hình 2.49.

(a) Hãy xác định lực tổng cộng và mômen lực tổng cộng tác dụng lên đoạn.

(b) Nếu các dây dẫn này quay tự do quanh đường thẳng nối a thì chúng sẽ có cấu hình như thế nào? Điều này tương ứng với năng lượng cực đại hay cực tiểu được tích trữ trong từ trường?

(Wisconsin)

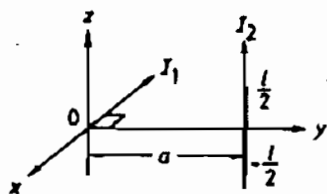
Lời giải:

(a) Từ trường do I_1 sinh ra tại điểm $(0, a, z)$ là

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}} \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \mathbf{e}_y - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \mathbf{e}_z \right],$$

sao cho một yếu tố dòng điện nhỏ $(z, z + dz)$ trên I_2 sẽ chịu tác dụng một lực

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{21} &= I_2 dz \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 = I_2 dz \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{a^2 + z^2}} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} (-\mathbf{e}_x) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 z dz}{2\pi(a^2 + z^2)} (-\mathbf{e}_x). \end{aligned}$$



Hình 2.49

Như vậy, lực tác dụng lên đoạn dây nhỏ $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ là

$$\mathbf{F}_{21} = \int_{-l/2}^{l/2} d\mathbf{F}_{21} = 0$$

vị tích phân là một hàm lẻ của z , và mômen lực tác dụng lên nó là:

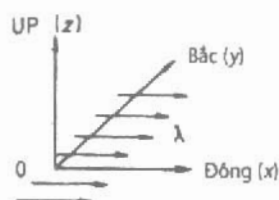
$$\begin{aligned}\tau &= \int_{-l/2}^{l/2} z \mathbf{e}_z \times d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{z^2 dz}{a^2 + z^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) \\ &\approx \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a^2} \cdot \frac{1}{3} z^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{24\pi a^2} l^3 \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Từ điều này rút ra kết luận là nếu dòng điện I_2 quay tự do quanh đoạn thẳng a thì cuối cùng nó sẽ định vị song song với dòng I_1 sao cho hướng của cả hai dòng I_1 và I_2 đều như nhau. Rõ ràng, vị trí này tương ứng với năng lượng cực tiểu được tích trữ trong từ trường.

2066

Một tấm kim loại mỏng có cường độ dòng điện mặt λ (ampe trên mét theo hướng y) chạy theo hướng đông (hướng x) trên mặt phẳng nằm ngang ($z = 0$) như trên hình 2.50. Độ lớn và hướng của lực tác dụng lên những vật sau đây là bao nhiêu?

(a) Một đoạn dây dẫn nằm ngang chiều dài l ở bên trên tấm kim loại một khoảng cách R , mang một dòng điện i (đo bằng ampe) chạy theo hướng bắc.



Hình 2.50

(b) Một đoạn dây dẫn tương tự nhưng được định hướng sao cho mang một dòng điện chạy theo hướng tây.

(c) Một vòng dây có bán kính r , với tâm ở bên trên tấm kim loại một khoảng cách R ($r < R$), mang một dòng điện i có mômen từ quay về hướng đông.

(d) Một vòng dây tương tự nhưng với mômen từ của nó hướng lên trên.

(e) Một vòng dây tương tự nhưng với mômen từ của nó hướng xuống dưới.

Hãy trình bày một cách ngắn gọn nguyên nhân cho từng câu trả lời của bạn.

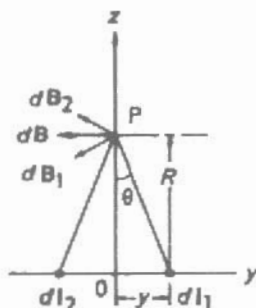
(Wisconsin)

Lời giải:

Tấm kim loại có dòng điện bề mặt đó có thể chia ra thành những dải hẹp có chiều rộng dy và mỗi dải được coi như có một dòng điện $dI = \lambda dy$. Xét điểm P tại $(0, 0, R)$. Theo định luật Ampe về lưu số hai dải dòng điện dI_1 và dI_2 nằm đối xứng trên hai phía của điểm 0 sẽ sinh ra các cảm ứng từ dB_1 và dB_2 , được tổng hợp thành dB theo hướng $-y$ (xem H. 2.51)

$$dB = -\frac{2\mu_0\lambda dy}{2\pi(y^2 + R^2)^{1/2}} \cos\theta \mathbf{e}_y,$$

trong đó $\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{y^2 + R^2}}$.



Hình 2.51

Gọi $2L$ là chiều rộng của tấm có dòng điện. Từ trường toàn phần tại điểm P là

$$\mathbf{B} = \int dB = -\frac{\mu_0\lambda R}{\pi} \int_0^L \frac{dy}{y^2 + R^2} \mathbf{e}_y = -\frac{\mu_0\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_y.$$

(a) Yếu tố dòng điện tại P là $idl = il\mathbf{e}_y$ do đó lực tác dụng lên nó sẽ là

$$\mathbf{F} = il\mathbf{e}_y \times \mathbf{B} = 0.$$

(b) Yếu tố dòng điện $idl = -il\mathbf{e}_x$ và lực tác dụng lên nó là

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 il\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 li\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{R}\right) \mathbf{e}_z.$$

(c) Vòng dây mang dòng điện i có mômen lưỡng cực từ là $\mathbf{m} = \pi r^2 i \mathbf{e}_x$. Lực do từ trường $\mathbf{B}$ tác dụng lên vòng dây là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(m B \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) = 0.$$

(d) $\mathbf{m} = \pi r^2 i \mathbf{e}_y$, và lực tác dụng lên nó được viết ở dạng sau

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\mu_0 \lambda r^2 i \frac{\partial}{\partial R} \left(\arctan \frac{L}{R} \right) \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 \lambda r^2 i R^2}{R^2 + L^2} \mathbf{e}_z.$$

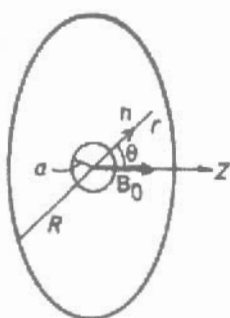
(e) $\mathbf{m} = \pi r^2 i \mathbf{e}_z$ và lực tác dụng lên nó là

$$\mathbf{F} = \nabla(m B \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y) = 0.$$

2067

Một dây dẫn tròn có bán kính R mang một dòng điện i . Một quả cầu bán kính a ($a \ll R$) được làm bằng vật liệu thuận từ có độ từ thẩm μ được đặt sao cho tâm của nó nằm tại tâm của mạch điện (xem H. 2.52). Hãy xác định mômen lưỡng cực từ của quả cầu do từ trường của dòng điện sinh ra. Hãy xác định lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên quả cầu.

(UC, Berkeley)



Hình 2.52

Lời giải:

Lấy tâm của vòng dây tròn làm gốc toạ độ và trục của nó làm trục z . Từ trường tại gốc toạ độ do dòng điện i trong sợi dây sinh ra là

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{2R} \mathbf{e}_z.$$

Vì bán kính của quả cầu nhỏ $a \ll R$, ta có thể coi quả cầu ở trong một từ trường đều $\mathbf{B}_0$ và sử dụng thế vô hướng từ φ . Gọi φ_1 và φ_2 là thế từ ở bên ngoài và bên trong quả cầu. Chúng thoả mãn phương trình $\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = 0$ vì bên trong và bên ngoài quả cầu độ từ hoá là đồng đều. Ta đòi hỏi

$$\varphi_1 \approx \varphi_0 = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta$$

đối với $r \rightarrow \infty$ và φ_2 là hữu hạn khi $r \rightarrow 0$. Hơn nữa, tại $r = R$ ta có các điều kiện biên

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}.$$

Giải phương trình Laplace bằng phương pháp tách biến số và làm theo trình tự giải bài tập 1062, ta nhận được

$$\varphi_2 = -\frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} r \cos \theta.$$

Khi đó cảm ứng từ bên trong quả cầu là

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla \varphi_2 = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{B}_0.$$

Gọi độ từ hoá của quả cầu nhỏ là $\mathbf{M}$. Vì theo định nghĩa $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$ nên ta có

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)} \mathbf{B}_0 = \frac{3(\mu - \mu_0)i}{2(\mu + 2\mu_0)R} \mathbf{e}_z.$$

Mômen lưỡng cực từ của quả cầu khi đó là

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi a^3 \mathbf{M} = \frac{2(\mu - \mu_0) \pi a^3 i}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{e}_z.$$

Mật độ dòng điện bề mặt trên quả cầu được xác định bởi điều kiện biên

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1).$$

Vì

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

nên ta có

$$\alpha_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = \frac{3(\mu - \mu_0)i}{2(\mu + 2\mu_0)R} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Cuối cùng, lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên quả cầu là

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \alpha_M \times \mathbf{B}_0 = \frac{3(\mu - \mu_0)i}{2(\mu + 2\mu_0)R} \sin \theta \cdot \frac{\mu_0 i}{2R} (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{3\mu_0(\mu - \mu_0)i^2}{4(\mu + 2\mu_0)R} \sin \theta (\cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \mathbf{e}_r). \end{aligned}$$

2068

Một dòng dây điện kín có mômen từ $\mathbf{m}$. Mômen lực $\mathbf{N}$ do từ trường $\mathbf{B}$ tác dụng lên dòng điện đó là bao nhiêu?

$$(a) \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (b) \mathbf{N} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad (c) \mathbf{N} = 0.$$

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2069

Một thỏi nam châm trong từ trường trái đất sẽ

- (a) chuyển động về phía cực Bắc.
- (b) chuyển động về phía cực Nam.
- (c) chịu một mômen lực.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (c).

2070

Một đồng xu bằng đồng được đặt đứng trên cạnh của nó trong một từ trường thẳng đứng có $B = 20$ kGs. Đẩy nhẹ đồng xu để nó đổ xuống. Hãy ước lượng thời gian nó đổ xuống là bao nhiêu lâu. (Gợi ý: Độ dẫn và khối lượng riêng của Cu là $6 \times 10^5 \Omega \text{cm}^{-1}$ và 9gcm^{-3}).

(Princeton)

Lời giải:

Vì Cu là một vật dẫn điện tốt, thế năng của đồng xu Cu sẽ được chuyển đổi chủ yếu thành nhiệt năng khi nó đổ xuống trong một từ trường mạnh như vậy. Chúng ta có thể giả thiết rằng trong quá trình đổ mômen của lực từ luôn luôn cân bằng với mômen của trọng lực. Gọi θ là góc giữa mặt phẳng của đồng xu Cu và trục thẳng đứng. Khi ta xét một vành tròn có bán kính r và $r + dr$, thì từ thông đi qua diện tích của vành này là $\phi(\theta) = \pi r^2 B \sin \theta$. Suất điện động cảm ứng trong vành này là

$$\varepsilon = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \pi r^2 B \dot{\theta} \cos \theta$$

và dòng điện cảm ứng là

$$di = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi r^2 B \dot{\theta} \cos \theta}{R},$$

với R là điện trở của vành. Gọi h là chiều dày của đồng xu. Khi đó ta có

$$R = \frac{2\pi r}{\sigma h dr}.$$

Do đó,

$$di = \frac{Br \dot{\theta} \cos \theta \sigma h dr}{2}.$$

Mômen từ của vành là

$$dm = \pi r^2 di = \frac{\pi r^3 B \dot{\theta} \cos \theta \sigma h dr}{2},$$

và mômen của lực từ là

$$d\tau_m = |\mathbf{dm} \times \mathbf{B}| = \frac{\pi r^2 B^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta \sigma h dr}{2}.$$

Gọi bán kính của đồng xu là r_0 , khi đó mômen lực từ tác dụng lên cả đồng xu là

$$\tau_m = \int d\tau_m = \int_0^{r_0} \frac{\pi B^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta \sigma h}{2} r^3 dr = \frac{\pi r_0^4 B^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta \sigma h}{8}$$

Mật khác, mômen của trọng lực là

$$\tau_g = mgr_0 \sin \theta = \pi r_0^3 \rho h g \sin \theta.$$

Từ $\tau_m = \tau_g$, ta nhận được

$$dt = \frac{B^2 r_0 \sigma}{8g\rho} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Giả thiết đồng xu bắt đầu đổ xuống tại $\theta = \theta_0$, khi đó thời gian đổ xuống sẽ là

$$\begin{aligned} T &= \int dt = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{B^2 r_0 \sigma}{8g\rho} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{B^2 \sigma r_0}{8g\rho} \left[-\cos \theta_0 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sử dụng các số liệu đã cho và lấy $r_0 = 0,01$ m, $\theta_0 = 0,1$ rad., ta có ước lượng

$$T \approx 6,8 \text{ s}.$$

Từ đây ta có thể kết luận rằng thế năng chuyển đổi chủ yếu thành nhiệt năng bởi vì thời gian cần thiết để đổ xuống trong một từ trường mạnh dài hơn nhiều so với thời gian nó đổ khi không có từ trường.

2071

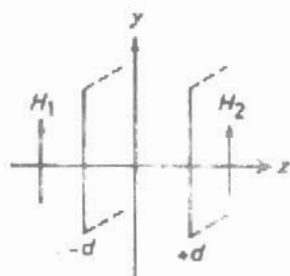
Giả thiết rằng bên trong một vật liệu các phương trình sau

$$c\nabla \times \lambda \mathbf{j} = -\mathbf{H}, \quad (\lambda \text{ không đổi})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda \mathbf{j}) = \mathbf{E},$$

được thoả mãn chứ không phải định luật Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. (Các phương trình này được biết đến như các phương trình London). Xét một thanh vô hạn của vật liệu này có chiều dày $2d$ ($-d < z < d$). Bên ngoài thanh này là một từ trường không đổi song song với bề mặt của thanh, $H_x = H_z = 0$, $H_y = H_1$ đối với $z < -d$ và $H_y = H_2$ đối với $z > d$, đồng thời $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$ ở mọi nơi như chỉ ra trên hình 2.53. Giả thiết rằng không có các dòng điện bề mặt và các điện tích mặt.

(a) Hãy tìm $\mathbf{H}$ bên trong thanh đó.



Hình 2.53

(b) Hãy tìm j bên trong thanh đó.

(c) Hãy tìm lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên bề mặt của thanh.
(Princeton)

Lời giải:

Chúng ta sẽ sử dụng đơn vị Gauss đối với bài tập này. Trong điện động lực học siêu dẫn có hai phương pháp miêu tả. Ở đây ta sử dụng phương pháp dòng chứ không dùng phương pháp xử lý vật liệu như một môi trường. Các phương trình Maxwell có liên quan là

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Vì $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{j}$ là một dòng không đổi và từ trường là dừng. Phương trình Maxwell thứ nhất cho

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j},$$

nghĩa là

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j}.$$

Sử dụng $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ và các phương trình London ở trên đối với vật liệu đó, ta được

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{4\pi}{\lambda c^2} \mathbf{H} = 0.$$

Từ sự đối xứng chúng ta có thể giả thiết rằng $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z)$ và chỉ có thành phần y tồn tại, nghĩa là $\mathbf{H} = H_y(z) \mathbf{e}_y$. Khi đó phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - \frac{4\pi}{\lambda c^2} H_y = 0.$$

Nghiệm tổng quát là $H_y = Ae^{-kz} + Be^{kz}$. Sử dụng các điều kiện biên đã cho ta có

$$\begin{cases} H_y(d) = Ae^{-kd} + Be^{kd} = H_2, \\ H_y(-d) = Ae^{kd} + Be^{-kd} = H_1, \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$A = \frac{H_1 e^{kd} - H_2 e^{-kd}}{e^{2kd} - e^{-2kd}}, \quad B = \frac{H_2 e^{kd} - H_1 e^{-kd}}{e^{2kd} - e^{-2kd}}.$$

(a) Bên trong thanh vật liệu chỉ có thành phần y xuất hiện. Đó là

$$\begin{aligned} H_y(z) &= Ae^{-kz} + Be^{kz} \\ &= \frac{H_2 \sinh[k(z+d)] - H_1 \sinh[k(z-d)]}{\sinh(2kd)}. \end{aligned}$$

(b) Từ phương trình Maxwell $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H}$ và $\mathbf{H} = H_y(z)\mathbf{e}_y$ ta có $\mathbf{j} = j_x \mathbf{e}_x$ với

$$j_x = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{k \{ H_2 \cosh[k(z+d)] - H_1 \cosh[k(z-d)] \}}{\sinh(2kd)}.$$

(c) Lực tác dụng lên thanh vật liệu đó là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \times \mathbf{H} dV \\ &= \frac{\mathbf{e}_z}{c} \int \left(-\frac{c}{4\pi} \right) \frac{\partial H_y}{\partial z} H_y dz dS. \end{aligned}$$

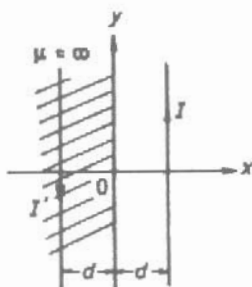
Do đó lực tác dụng lên một đơn vị diện tích trên bề mặt là

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\frac{\mathbf{e}_z}{4\pi} \int H_y \frac{\partial H_y}{\partial z} dz = -\frac{\mathbf{e}_z}{4\pi} \int H_y dH_y \\ &= -\frac{1}{8\pi} (H_2^2 - H_1^2) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

2072

Một dây dẫn mỏng, dài mang một dòng điện I nằm song song với một tấm sắt bán vô hạn và cách tấm sắt đó một khoảng cách d như thấy trên hình 2.54. Giả thiết sắt có độ từ thẩm vô hạn, hãy xác định độ lớn và hướng của lực tác dụng lên một đơn vị chiều dài trong dây dẫn.

(UC, Berkeley)



Hình 2.54

Lời giải:

Sử dụng phương pháp ảnh. Dòng điện ảnh là I' được đặt tại $x = -d$ và ngược hướng với I , có độ lớn

$$I' = \frac{\mu}{\mu + \mu_0} I.$$

Với $\mu \rightarrow \infty$, $I' = I$. Từ trường tại vị trí $x = d$ do I' tạo ra được xác định theo định luật Ampe về lưu số là $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \mathbf{e}_z$. Do đó lực tác dụng lên một đơn vị chiều dài của dây dẫn là

$$\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I B \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \mathbf{e}_x.$$

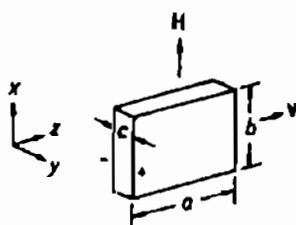
2073

Một khối kim loại không tích điện có dạng hình hộp chữ nhật với các cạnh là a, b, c . Khối đó chuyển động với tốc độ v trong một từ trường có cường độ $\mathbf{H}$ như thấy trong hình 2.55. Hãy xác định cường độ điện trường trong khối

đó và mật độ điện tích cả ở bên trong và ở trên khối đó.

(Wisconsin)

Lời giải:



Hình 2.55

Ở trạng thái cân bằng không có lực nào tác dụng lên các electron khối kim loại, nghĩa là, $-e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. Do đó

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{H} = -\mu_0 v H \mathbf{e}_y.$$

Mật độ điện tích trong khối là

$$\rho = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} (-\mu_0 v H) = 0.$$

Do đó không có điện tích bên trong khối. Mật độ điện tích mặt σ được xác định bởi điều kiện biên

$$\sigma = \pm D_n = \pm \varepsilon_0 E_n.$$

Vì $\mathbf{E}$ hướng theo trục y nên σ chỉ xuất hiện trên các mặt được tạo bởi các cạnh a, b và có độ lớn là

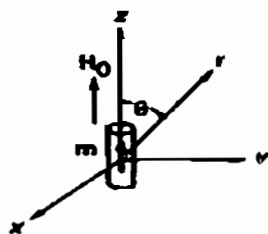
$$\sigma = \pm \varepsilon_0 E = \pm \varepsilon_0 \mu_0 v H,$$

và dấu của nó như đã chỉ ra trên hình 2.55.

2074

Trong hình 2.56, một cái kim sắt dài 1 cm, đường kính 0,1 cm được đặt trong từ trường đều $H_0 = 1000$ Gs với trục dài của nó nằm dọc theo hướng từ trường. Hãy dẫn ra một biểu thức gần đúng của $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ đối với khoảng cách $r \gg 1$ cm. Tại đây r được đo từ tâm của cái kim, được coi như gốc tọa độ.

(Chicago)



Hình 2.56

(Ghi chú: Giá trị bão hoà của B trong sắt xấp xỉ bằng 2000 Gs).

Lời giải:

Đối với khoảng cách $r \gg 1$ cm cái kim sắt có thể được coi như một lưỡng cực từ với mômen là m . Lấy trục z dọc theo trục của cái kim, ta có thể viết

$$\mathbf{H}_{\text{ext}} = H_0 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{m} = m \mathbf{e}_z.$$

Trong hệ đơn vị Gauss, từ trường tại r xấp xỉ là

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_0 - \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = H_0 - \frac{m}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

Vì từ trường do kim sắt tạo ra yếu hơn nhiều so với từ trường ngoài H_0 nên $m/r^3 \ll H_0$. Vì thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{H}$ liên tục tại biên nên từ trường trong kim sắt có thể lấy gần đúng là

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = \mathbf{H}_0.$$

Khi đó, độ từ hoá của cái kim được viết như sau

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_{\text{in}} - \mathbf{H}_{\text{in}}).$$

Với thể tích của kim

$$V = (0,05)^2 \pi \text{ cm}^3,$$

$B_{\text{in}} = 2 \times 10^4 \text{ Gs}$, $H_{\text{in}} \approx H_0 = 10^3 \text{ Gs}$, mômen từ của cái kim sẽ là

$$m = vM = \frac{(0,05)^2 \pi}{4\pi} \times (2 - 0,1) \times 10^4 = 11,9 \text{ Gs} \cdot \text{cm}^2.$$

Trong hệ tọa độ cực, từ trường tại những khoảng cách $r \gg 1$ cm có các thành phần sau

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \cos \theta + 2m \frac{\cos \theta}{r^3} = \left(1000 + \frac{23,8}{r^3} \right) \cos \theta \text{ Gs}, \\ H_\theta &= -H_0 \sin \theta + \frac{m \sin \theta}{r^3} = \left(-1000 + \frac{11,9}{r^3} \right) \sin \theta \text{ Gs}. \end{aligned}$$

2075

Một quả cầu kim loại đã tích điện có khối lượng 5 kg, bán kính 10 cm chuyển động trong chân không với tốc độ 2400 m/s. Bạn muốn thay đổi hướng chuyển động của quả cầu bằng cách tác động lên nó, hoặc bằng phương pháp tĩnh điện, hoặc bằng phương pháp từ trong vùng $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 100 \text{ m}$.

(a) Nếu giới hạn bởi tổng năng lượng dự trữ (điện hoặc từ) trong thể tích 100 m^3 , bạn sẽ nhận được một lực lớn hơn bằng cách tác động lên quả cầu một từ trường B hay một điện trường E ?

(b) Đối với một điện trường cực đại (Giá điện tích của quả cầu) có giá trị 10 kV/cm tại bề mặt quả cầu, hãy tìm tốc độ ngang của quả cầu tại điểm cuối của đường bay 100 m như là một hàm của trường ngoài (B hoặc E)?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Mật độ năng lượng điện là $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ và mật độ năng lượng từ là $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Để lực tương tác mạnh nhất, ta giả thiết cường độ trường giống nhau ở mọi điểm trong vùng được xét. Đối với mật độ năng lượng giống nhau, $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$, ta có $\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ và

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{qE}{qvB} = \frac{c}{v} \gg 1$$

Điều này chỉ ra rằng, lực tác dụng lên quả cầu kim loại bởi điện trường lớn hơn nhiều so với lực tác dụng bởi từ trường đối với cùng một năng lượng dự trữ.

(b) Điện trường cực đại trên bề mặt quả cầu kim loại có $E_0 = 10 \text{ kV/cm}$ sẽ giới hạn điện tích cực đại Q_m chứa trong quả cầu cũng như độ lớn của trường

ngoài (E hoặc B). Nếu một điện trường ngoài E được đặt vào thì mật độ điện tích mặt là (xem bài tập 1065)

$$\sigma = \sigma_0 + 3\varepsilon_0 E \cos \theta$$

trong đó các trục cực được lấy theo hướng của E và σ_0 là mật độ điện tích mặt do điện tích Q sinh ra đã chứa sẵn trên quả cầu, nghĩa là

$$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

r là bán kính của quả cầu. Điện trường trên bề mặt quả cầu được cho bởi $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ và điện trường cực đại E_0 , xuất hiện tại $\theta = 0$. Do đó

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + 3E,$$

và tổng điện tích của quả cầu sẽ là

$$Q = 4\pi r^2 \sigma_0 = 4\pi \varepsilon_0 r^2 (E_0 - 3E), \quad \left(E < \frac{1}{3} E_0\right).$$

Thời gian để quả cầu di chuyển một khoảng cách l là $\Delta t = \frac{l}{v}$. Gia tốc ngang là $\frac{QE}{m}$ nếu chúng ta giả thiết $E_{\perp} = E$. Khi đó tốc độ ngang tại điểm cuối của Δt là

$$v_{\perp} = \frac{QE}{m} \Delta t = \frac{4\pi \varepsilon_0 r^2 (E_0 - 3E) \cdot El}{mv_0}, \quad \left(E < \frac{1}{3} E_0\right).$$

Nếu thay thế điện trường bằng một từ trường ngoài, phương trình trên chỉ cần sửa đổi bằng cách thay E bằng $v_0 B$, kết quả sẽ là

$$v_{\perp} = \frac{4\pi \varepsilon_0 r^2 (E_0 - 3v_0 B) Bl}{m}, \quad \left(B < \frac{E_0}{3v_0}\right).$$

Nếu $E \geq \frac{1}{3} E_0$ hoặc $B \geq \frac{E_0}{3v_0}$, điện tích của quả cầu kim loại bằng 0 và tốc độ ngang cũng bằng 0. Từ những kết quả trên chúng ta cũng có thể thấy rằng tốc độ ngang là cực đại đối với $E = E_0/9$ hoặc $B = E_0/9V_0$, suy ra

$$\begin{aligned} v_{\perp m} &= \frac{8\pi \varepsilon_0 r^2 E_0^2 l}{27mv_0} = \frac{8\pi \times \frac{10^{-9}}{4\pi \times 9} \times 0,1^2 \times 10^{6 \times 2} \times 100}{27 \times 5 \times 2400} \\ &= 6,86 \times 10^{-4} \text{ m/s} \end{aligned}$$

và độ dịch chuyển ngang cực đại của quả cầu là

$$v_{\perp m} \Delta t = \frac{v_{\perp m} l}{v} = \frac{6,86 \times 10^{-4} \times 100}{2400} = 2,86 \times 10^{-5} \text{ m},$$

giá trị này nhỏ, có thể bỏ qua so với kích thước ngang của không gian (1 m).

2076

Chứng minh rằng lực giữa hai lưỡng cực từ tỉ lệ nghịch với lũy thừa bậc bốn của khoảng cách giữa các tâm của chúng, bất kể sự định hướng tương đối của hai lưỡng cực đó trong không gian là như thế nào. Giả thiết rằng các lưỡng cực này nhỏ so với khoảng cách giữa chúng.

(Columbia)

Lời giải:

Gọi mômen từ của hai lưỡng cực là $\mathbf{m}_1$ và $\mathbf{m}_2$. Điện thế năng sinh ra bởi $\mathbf{m}_2$ tại vị trí của $\mathbf{m}_1$ là

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

trong đó $\mathbf{r}$ hướng từ $\mathbf{m}_2$ đến $\mathbf{m}_1$. Vì từ trường là $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_m$, nên lực tác dụng lên $\mathbf{m}_1$ là

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= \nabla(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}) = \nabla[\mathbf{m}_1 \cdot (-\mu_0 \nabla \varphi_m)] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\mathbf{m}_1 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\mathbf{m}_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} \right]. \end{aligned}$$

Vì cả hai thành phần trong biểu thức của gradient tỉ lệ với $\frac{1}{r^3}$, nên $\mathbf{F}$ sẽ tỉ lệ với $\frac{1}{r^4}$.

2077

Một lưỡng cực từ $\mathbf{m}$ được dịch chuyển từ xa vô hạn đến một điểm trên trục của một vòng dây tròn dẫn điện hoàn hảo (điện trở bằng 0), cố định, có bán kính b và độ tự cảm L . Tại vị trí cuối cùng của nó, lưỡng cực này được định hướng dọc theo trục của vòng dây và đặt cách tâm của vòng dây một khoảng cách z . Ban đầu, khi lưỡng cực này còn ở rất xa, dòng điện trong vòng dây bằng 0 (hình 2.57).

(a) Hãy tính dòng điện trong vòng dây khi lưỡng cực này ở vị trí cuối cùng của nó.

(b) Đối với các vị trí giống nhau, hãy tính lực giữa lưỡng cực và vòng dây.
(UC, Berkeley)



Hình 2.57

Lời giải:

(a) Suất điện động cảm ứng của vòng dây được tính theo công thức

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Tích phân theo thời gian ta được

$$L[I(f) - I(i)] = \int [\mathbf{B}(f) - \mathbf{B}(i)] \cdot d\mathbf{S}$$

Ban đầu, khi lưỡng cực ở xa,

$$I(i) = 0, \quad \mathbf{B}(i) = 0$$

Viết cho vị trí cuối cùng $I = I(f)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(f)$, ta có

$$LI = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Xét một điểm P trong mặt phẳng của vòng, lấy hệ trục tọa độ (ρ, φ, z) sao cho P có vectơ bán kính là $\rho \mathbf{e}_\rho$. Khi đó vectơ bán kính từ m đến P là $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho - z \mathbf{e}_z$. Cảm ứng từ tại P do m sinh ra là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]$$

trong đó $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$. Do $d\mathbf{S} = \rho d\rho d\theta \mathbf{e}_z$ ta có

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z)}{r^5} - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_z}{r^3} \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \int_0^b \left[\frac{3mz^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] \rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 m}{2} \left[(b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(b^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right],\end{aligned}$$

và dòng cảm ứng trong vòng dây là

$$I = \frac{\mu_0 m}{2L} \left[(b^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(b^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

Theo định luật Lenz, chiều của dòng điện theo chiều kim đồng hồ khi nhìn từ vị trí của $\mathbf{m}$ đặt như trong hình 2.57.

(b) Đối với vòng dây, với dòng điện I như trên, từ trường do nó sinh ra tại một điểm trên trục của nó là

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0^2 m}{4L} \frac{b^4}{(b^2 + z^2)^3} \mathbf{e}_z.$$

Năng lượng của lưỡng cực từ $\mathbf{m}$ trong từ trường $\mathbf{B}'$ là

$$W = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}'$$

và lực tương tác giữa lưỡng cực và vòng dây là

$$F = -\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{3\mu_0^2 m^2 b^4 z}{2L(b^2 + z^2)^4}.$$

2078

Lực tác dụng lên một dòng điện kín nhỏ có mômen từ $\boldsymbol{\mu}$ trong một từ trường $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ là

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}.$$

Mặt khác, lực tác dụng lên một lưỡng cực từ tích $\boldsymbol{\mu}$ được cho bởi

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

(a) Sử dụng sự phân tích vectơ và khai triển biểu thức đối với lực tác dụng lên một dòng điện kín, thông qua các nguồn từ trường địa phương, hãy thảo luận các điều kiện làm cho các lực trên là khác nhau.

(b) Hãy đề xuất một thí nghiệm sử dụng điện trường hoặc từ trường ngoài, để có thể xác định (về nguyên lý) mômen từ của một hạt nhân được sinh ra là do dòng điện hay là do từ tích.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Khai triển biểu thức đối với lực tác dụng lên một dòng điện kín

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - \boldsymbol{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{B}).$$

Từ trường ngoài $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ thỏa mãn phương trình $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, do đó phương trình trên có thể viết lại như sau

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

So sánh với biểu thức đối với lực tác dụng lên một lưỡng cực từ, nó có thêm một số hạng $\boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{B})$. Như vậy hai lực khác nhau trừ khi $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ trong trường hợp dòng điện kín, điều này có nghĩa là $\mathbf{J} = \dot{\mathbf{D}} = 0$ trong vùng dòng điện vòng.

(b) Lấy trục z dọc theo hướng mômen từ của hạt nhân và đặt một từ trường $\mathbf{B} = B(z)\mathbf{e}_z$ theo hướng này. Theo biểu thức $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}$, lực từ trường bằng 0. Nhưng theo biểu thức $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ thì lực không bằng 0. Như vậy mômen từ tạo ra bởi từ tích hay bởi dòng điện phụ thuộc vào chuyển hạt nhân có chịu tác dụng một lực từ hay không.

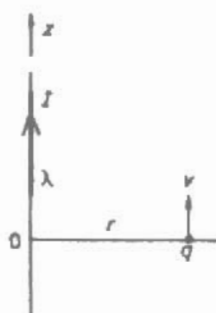
2079

Một hạt có điện tích q chuyển động với tốc độ $\mathbf{v}$ song song với một dây dẫn có phân bố điện tích tuyến tính đồng đều λ trên một đơn vị chiều dài. Dây dẫn cũng mang một dòng điện I như thấy trên hình 2.58. Hạt điện tích phải có tốc độ là bao nhiêu để có thể chuyển động theo đường thẳng song song với sợi dây dẫn tại vị trí cách dây dẫn một khoảng cách r ?

(Wisconsin)

Lời giải:

Xét một hình trụ dài bán kính r có trục trùng với sợi dây dẫn. Kí hiệu mặt cong của nó đối với một đơn vị chiều dài S và chu vi tiết diện của nó bằng C .



Hình 2.58

Sử dụng định lý thông lượng Gauss và định luật Ampe về lưu số ta có các biểu thức sau

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \lambda / \epsilon_0, \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

Do đối xứng trục, trong hệ tọa độ trụ (r, θ, z) với gốc tọa độ 0 tại sợi dây, ta tìm được

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$$

Tổng hợp lực tác động lên hạt điện tích có tốc độ $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ là

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r + \frac{q\mu_0 I}{2\pi r} v(-\mathbf{e}_r). \end{aligned}$$

Để duy trì hạt chuyển động theo hướng z , lực theo hướng bán kính này phải triệt tiêu, nghĩa là

$$\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{q\mu_0 I}{2\pi r} v = 0,$$

Từ đó suy ra

$$v = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \mu_0 I} = \frac{\lambda c^2}{I},$$

2080

Biểu thức lực Lorentz đối với một hạt có khối lượng m và điện tích q là

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right).$$

(a) Chứng minh rằng nếu hạt này chuyển động trong một điện trường không phụ thuộc thời gian $\mathbf{E} = -\nabla\phi(x, y, z)$ và trong bất kì từ trường nào thì khi đó năng lượng $\frac{1}{2}mv^2 + q\phi$ của nó đều là một hằng số.

(b) Giả thiết hạt này chuyển động theo trục x trong điện trường $\mathbf{E} = Ae^{-t/\tau} \mathbf{e}_x$, trong đó A và τ đều là hằng số. Giả thiết từ trường bằng 0 theo trục x và $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Hãy tìm $x(t)$.

(c) Trong câu (b) $\frac{1}{2}mv^2 - qx Ae^{-t/\tau}$ có phải là một hằng số không? (Hãy trình bày ngắn gọn lập luận của bạn).

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Vì

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right)$$

ta có

$$(m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}.$$

Từ đây suy ra

$$\mathbf{v} \cdot (m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{q}{c} = 0.$$

Xét

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2 + q\phi \right] &= m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + q \frac{d\phi}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + q\mathbf{v} \cdot \nabla\phi \\ &= \mathbf{v} \cdot (m\dot{\mathbf{v}} + q\nabla\phi) = \mathbf{v} \cdot (m\dot{\mathbf{v}} - q\mathbf{E}) = 0, \end{aligned}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng biểu thức

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi.$$

do đó

$$\frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{Const.}$$

(b) Lực từ $\mathbf{F}_m = q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}$ vuông góc với $\mathbf{v}$ sao cho nếu hạt chuyển động theo hướng x thì lực từ sẽ không ảnh hưởng đến thành phần chuyển động theo phương x . Với E theo hướng x , sự chuyển động của hạt sẽ bị giới hạn theo hướng đó. Theo định luật Newton thứ hai ta có

$$m\ddot{x} = qE = qAe^{-t/\tau},$$

nghĩa là

$$mdv = qAe^{-t/\tau} dt,$$

với

$$v(0) = 0, \quad mv = -qA\tau e^{-t/\tau} + qA\tau,$$

hay

$$dx = qA\tau(1 - e^{-t/\tau}) \frac{dt}{m}.$$

Với $x(0) = 0$, phương trình này cho

$$\begin{aligned} x(t) &= qA\tau \frac{t}{m} + \frac{qA\tau^2}{m} e^{-t/\tau} - \frac{qA\tau^2}{m} \\ &= \frac{qA\tau}{m} [(t - \tau) + \tau e^{-t/\tau}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \frac{1}{2}mv^2 - qxAe^{-t/\tau} &= \frac{1}{2}m \left[\frac{qA\tau}{m} (1 - e^{-t/\tau}) \right]^2 \\ &\quad - qA \frac{qA\tau}{m} [(t - \tau) + \tau e^{-t/\tau}] e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 - qxAe^{-t/\tau} \right) \neq 0$$

nên biểu thức này không phải là một hằng số.

2081

Một hạt điểm có khối lượng m và mômen lưỡng cực từ M , chuyển động theo một quỹ đạo tròn có bán kính R quanh một lưỡng cực từ cố định có mômen M_0 đặt tại tâm của quỹ đạo tròn đó. Các vectơ M_0 và M là đối song

song với nhau (tức cùng phương nhưng ngược chiều) và vuông góc với mặt phẳng của quỹ đạo.

(a) Hãy tính tốc độ v của lưỡng cực chuyển động quanh quỹ đạo.

(b) Quỹ đạo này có ổn định đối với các nhiễu loạn nhỏ không? Hãy giải thích. (Chỉ xét chuyển động trong mặt phẳng).

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Từ trường do lưỡng cực có mômen M_0 sinh ra tại một điểm có vectơ bán kính r tính từ tâm của quỹ đạo tròn là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}_0}{r^3} \right].$$

Từ trường này tác dụng một lực lên hạt chuyển động theo quỹ đạo tròn là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B})|_{r=R}.$$

Lưu ý $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}_0 = -MM_0$, $\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = 0$, ta có

$$\mathbf{F} = -\frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi R^4} \mathbf{e}_r.$$

Lực này hướng về tâm và làm cho hạt chuyển động tròn. Cân bằng lực này với lực hướng tâm

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi R^4},$$

sẽ cho tốc độ của hạt

$$v = \sqrt{\frac{3\mu_0 MM_0}{4\pi m R^3}}.$$

(b) Năng lượng của hạt được viết như sau

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu_0 MM_0}{4\pi r^3} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U(r),$$

với

$$U(r) = -\frac{\mu_0 MM_0}{4\pi r^3} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

trong đó L là mômen động lượng bảo toàn và số hạng đầu tiên là thế năng của M trong từ trường $\mathbf{B}$, $-\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, đối với một quỹ đạo tròn bán kính r . Lưu ý

rằng $(\frac{dU}{dr})_{r=R} = 0$ và $(\frac{d^2U}{dr^2})_{r=R} < 0$, sao cho $U(R)$ là cực đại và quỹ đạo đó là không ổn định đối với những nhiễu loạn nhỏ của r .

2082

Một xôlênôit có bán kính b và chiều dài l được quấn sao cho từ trường ở trục là

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0 \mathbf{e}_z, & r < b, \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Một hạt có điện tích q được bắn ra với tốc độ v vuông góc với thanh ở tâm có bán kính a (xem H. 2.59). Lực điện tác dụng lên hạt được cho bởi $q\mathbf{E} = f(r)\mathbf{e}_r$, với $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = 0$. Ta giả thiết v đủ lớn sao cho hạt bắn vọt ra ngoài xôlênôit mà không đập vào xôlênôit.

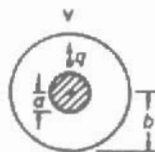
(a) Hãy tìm mômen động lượng của hạt quanh trục của xôlênôit đối với $r > b$.

(b) Nếu điện trường bên trong xôlênôit bằng 0 trước khi hạt rời thanh và sau khi hạt đã đi xa, điện trường đó trở thành

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l r} \mathbf{e}_r, & r > a, \\ 0, & r < a, \end{cases}$$

hãy tính mômen động lượng của trường điện từ và bàn luận về trạng thái cuối cùng của xôlênôit nếu xôlênôit có thể quay tự do quanh trục của nó. Bỏ qua các hiệu ứng biên.

(Wisconsin)



Hình 2.59

Lời giải:

(a) Vì v rất lớn, ta có thể coi độ lệch khỏi quỹ đạo thẳng là rất nhỏ trong quá trình bắn ra của hạt điện tích. Gọi $v_{\perp}$ là tốc độ ngang của hạt. Ta có

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Vì $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, $dv_{\perp} = \frac{q}{m} B_0 v dt = \frac{q}{m} B_0 dr$ và

$$v_{\perp}(b) = \int_a^b \frac{q}{m} B_0 dr = \frac{q}{m} B_0 (b - a).$$

Tại $r = b$ mômen động lượng của hạt đối với trục của xônônôit có độ lớn là

$$|\mathbf{r} \times m \mathbf{v}_{\perp}(b)|_{r=b} = m b v_{\perp}(b) = q B_0 b (b - a)$$

và có hướng $-\mathbf{e}_z$. Do đó, mômen động lượng là

$$\mathbf{J}_p = -q B_0 b (b - a) \mathbf{e}_z.$$

Đối với $r > b$, $\mathbf{B} = 0$ và $\mathbf{J}_p$ vừa được xét đến. Như vậy $\mathbf{J}_p$ là mômen động lượng của hạt đối với trục đối với $r > b$.

(b) Sau khi hạt đi xa khỏi xônônôit, mật độ động lượng của trường điện từ tại một điểm trong xônônôit là

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

và mật độ mômen động lượng được cho bởi biểu thức sau

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{B_0 q}{2\pi l} \mathbf{e}_z,$$

mật độ này là đồng đều. Vì không có trường bên ngoài xônônôit và bên trong thanh ở tâm, nên mômen động lượng toàn phần của trường điện từ là

$$\mathbf{J}_{EM} = \pi(b^2 - a^2) l \mathbf{j} = \frac{q B_0 (b^2 - a^2)}{2} \mathbf{e}_z.$$

Ban đầu, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v}_{\perp} = 0$ và xônônôit ở trong trạng thái đứng yên, như vậy mômen động lượng toàn phần của hệ bằng 0. Mômen động lượng cuối cùng của xônônôit có thể nhận được từ nguyên lý bảo toàn của mômen động lượng toàn phần

$$\mathbf{J}_S = -\mathbf{J}_{EM} - \mathbf{J}_p = \frac{q B_0}{2} (b - a)^2 \mathbf{e}_z.$$

Điều này có nghĩa rằng ở trạng thái cuối cùng, xòilênôit quay quanh trục giữa của nó với một tốc độ góc không đổi, hướng của sự quay này liên quan với hướng e_z bằng quy tắc vắn ốc vít.

2083

Giả thiết rằng một nam châm uốn cong với các cực tại $x = \pm x_0$ có một từ trường trong mặt phẳng trung trục chỉ phụ thuộc vào z , $B_x = B_x(z)$, với gốc toạ độ được chọn tại tâm của khe hở nam châm. Thành phần nào phải tồn tại bên ngoài mặt phẳng trung trục? Nếu một hạt có diện tích e và động lượng P đi tới dọc xuống theo rơi xuống trục z trong mặt phẳng trung trục, hãy tìm các biểu thức tích phân đối với góc uốn cong θ và độ dịch chuyển y như một hàm của z trong nam châm. Không phải tính tích phân.

(Wisconsin)

Lời giải:

Vì không có dòng điện giữa các cực của nam châm nên $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ hay

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0.$$

Điều này cho thấy rằng khi B_x phụ thuộc vào z , $B_z \neq 0$, nghĩa là bên ngoài mặt phẳng trung trục có một thành phần z .

Động năng của một hạt tích điện chuyển động trong một từ trường được bảo tồn. Do đó độ lớn tốc độ của nó là một hằng số. Gọi θ là góc uốn cong, khi đó

$$v_y = v \sin \theta, \quad v_z = v \cos \theta.$$

Vì $v_x = 0$, phương trình chuyển động của hạt theo hướng y là

$$m \frac{dv_y}{dt} = e B_x v_z,$$

hay

$$mv \frac{d}{dt}(\sin \theta) = e B_x v \cos \theta.$$

Suy ra

$$d\theta = \frac{e B_x}{m} dt = \frac{e B_x}{m} \cdot \frac{dz}{v \cos \theta},$$

hay

$$\cos \theta d\theta = \frac{e}{P} B_x dz.$$

Giả thiết tại $t = 0$, hạt ở tại gốc tọa độ và tốc độ của nó theo hướng $+z$. Khi đó $\theta(z)|_{z=0} = 0$ và ta có

$$\int_0^\theta \cos \theta d\theta = \frac{e}{P} \int_0^z B_x dz',$$

hoặc

$$\theta = \sin^{-1} \left[\frac{e}{P} \int_0^z B_x dz' \right].$$

Độ dịch chuyển theo phương y được cho bởi biểu thức sau

$$\begin{aligned} y &= \int_0^t v_y dt' = \int_0^z v \sin \theta \frac{dz'}{v \cos \theta} \\ &= \int_0^z \tan \theta dz' = \int_0^z \frac{\frac{e}{P} \int_0^{z'} B_x(z'') dz''}{[1 - (\frac{e}{P} \int_0^{z'} B_x(z'') dz'')^2]^{1/2}} dz'. \end{aligned}$$

2084

Một sợi dây dẫn dài vô hạn nằm dọc theo trục z (nghĩa là tại $x = 0, y = 0$) và mang một dòng điện i theo hướng $+z$. Một chùm tia các nguyên tử hydro phát ra tại điểm $x = 0, y = b, z = 0$ với tốc độ $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_z$. Các nguyên tử hydro được phân cực sao cho các mômen từ μ_H của chúng đều chỉ theo hướng $+x$, nghĩa là $\boldsymbol{\mu} = \mu_H \mathbf{e}_x$.

(a) Lực và mômen lực tác dụng lên các nguyên tử hydro này do từ trường của sợi dây sinh ra là bao nhiêu?

(b) Câu trả lời của bạn thay đổi thế nào nếu các nguyên tử hydro được phân cực theo cách mà lúc ban đầu các mômen từ của chúng chỉ theo hướng $+z$, nghĩa là $\boldsymbol{\mu} = \mu_H \mathbf{e}_z$.

(c) Trong trường hợp nào của hai trường hợp trên, các nguyên tử hydro sẽ có tiến động Larmor? Mô tả hướng của tiến động và tính tần số tiến động.

(Columbia)

Lời giải:

Các nguyên tử hydro đang chuyển động trong mặt phẳng yz . Trong mặt phẳng này, từ trường do sợi dây dài vô hạn sinh ra tại một điểm cách sợi dây dẫn một khoảng cách y được viết như sau

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \mathbf{e}_x.$$

(a) Với $\mu = \mu_H \mathbf{e}_x$, năng lượng của một nguyên tử hydro trong từ trường $\mathbf{B}$ là

$$W = \mu \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi y}.$$

Như vậy lực do từ trường tác dụng lên nguyên tử là

$$\mathbf{F} = \nabla W|_{y=b} = \frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b^2} \mathbf{e}_y,$$

và mômen lực tác dụng lên nguyên tử đó là

$$\mathbf{L} = \mu \times \mathbf{B} = 0.$$

(b) Với $\mu = \mu_H \mathbf{e}_z$, năng lượng là $W = \mu \cdot \mathbf{B} = 0$. Do đó, lực tác dụng lên nguyên tử là $\mathbf{F} = 0$ và mômen lực là

$$\mathbf{L} = \mu \times \mathbf{B}|_{y=b} = -\frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b} \mathbf{e}_y.$$

(c) Trong trường hợp (b) vì nguyên tử đã chịu tác dụng của mômen lực nên sẽ xảy ra tiến động Larmor. Mômen động lượng M của nguyên tử và mômen từ của nó liên hệ với nhau bởi công thức

$$\mu_H = g \frac{e}{2m} M,$$

ở đó g là hệ số Landé. Tốc độ biến thiên của mômen động lượng bằng mômen lực tác dụng lên nguyên tử

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{L}.$$

Độ lớn của M không thay đổi nhưng $\mathbf{L}$ sẽ làm xuất hiện tiến động của $\mathbf{M}$ quanh $\mathbf{B}$, được gọi là tiến động Larmor, có tần số ω được cho bởi công thức

$$\left| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right| = M\omega,$$

hay

$$\omega = \frac{L}{M} = \frac{\mu_0 \mu_H i}{2\pi b M} = \frac{eg\mu_0 i}{4\pi b m}.$$

Tiến động này ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía x dương.

2085

Một quả cầu sắt đã được từ hoá đồng đều, có bán kính R , được treo lơ lửng trên trần của một bình kim loại lớn được hút chân không bằng một sợi chỉ cách điện. Cực bắc của nam châm ở phía trên và cực nam ở phía dưới. Quả cầu được tích điện đến điện thế 3.000 V so với các thành của bình.

(a) Hệ thống tĩnh này có mômen động lượng hay không?

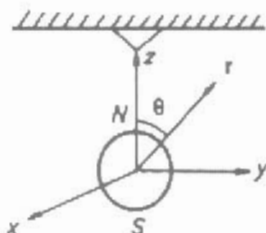
(b) Các electron được phóng vào trong bình dọc theo một trục cực và làm trung hoà một phần điện tích trên quả cầu. Điều gì sẽ xảy ra đối với quả cầu?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.60

(a) Hệ này có mômen động lượng.



Hình 2.60

(b) Gọi $\mathbf{m}$ là mômen từ của quả cầu. Từ trường tại một điểm $\mathbf{r}$ ở bên ngoài quả cầu là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right].$$

Giả thiết quả cầu mang một điện tích Q . Vì quả cầu là một vật dẫn, nên điện trường bên trong nó bằng 0 và điện trường bên ngoài là

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}.$$

Do đó, mật độ động lượng điện từ trong không gian ngoài quả cầu, vì $\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z = m(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$ trong hệ tọa độ cầu, là

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{Q\mu_0 m \sin\theta}{16\pi^2 r^5} \mathbf{e}_\varphi,$$

và mật độ mômen động lượng là

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = -\frac{\mu_0 m Q \sin \theta}{16\pi^2 r^4} \mathbf{e}_\theta.$$

Do đối xứng, mômen động lượng toàn phần chỉ có thành phần z , nó nhận được bằng cách tích phân thành phần z của $\mathbf{j}$

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{\mu_0 m Q \sin^3 \theta}{16\pi^2 r^2} d\varphi d\theta dr = \frac{\mu_0 m Q}{6\pi R} = \frac{2mV}{3c^2},$$

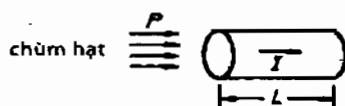
ở đây V là điện áp của quả cầu. Vì các electron được phóng theo phương bán kính đến quả cầu, điện tích Q giảm làm cho mômen động lượng điện từ cũng giảm. Tuy nhiên, vì sự bảo toàn mômen động lượng toàn phần, quả cầu sẽ quay quanh trục cực với hướng quay được xác định bằng quy tắc vặn ốc vít. Tốc độ góc quay là

$$\omega = -\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\mu_0 m \Delta Q}{6\pi R I} = -\frac{2m\Delta V}{3c^2 I},$$

trong đó I là mômen quán tính của quả cầu quanh trục cực và $\Delta Q, \Delta V$ là độ biến thiên thay đổi của điện tích và điện thế của quả cầu mà cả hai đều có giá trị âm.

2086

Một ống hình trụ có chiều dài L và bán kính R mang một dòng điện đồng đều I song song với trục của nó như trong hình 2.61.



Hình 2.61

(a) Hãy tìm hướng và độ lớn của từ trường tại một điểm bất kì ở trong ống hình trụ (bỏ qua các hiệu ứng biên).

(b) Một chùm hạt, mỗi hạt có động lượng P song song với trục ống hình trụ và mỗi hạt có điện tích q dương, đi vào đầu của ống hình trụ từ bên trái. Chứng minh rằng sau khi đi qua ống hình trụ chùm hạt sẽ hội tụ tại một điểm.

(Hãy làm phép gần đúng “thấu kính mỏng” bằng cách giả thiết rằng ống hình trụ ngắn hơn nhiều so với tiêu cự. Bỏ qua sự làm chậm và sự tán xạ chùm hạt do vật liệu của ống hình trụ gây ra). Hãy tính tiêu cự.

(CUSPEA)

Lời giải:

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, φ, z) với trục z theo trục của ống hình trụ. Từ trường tại một điểm cách trục một khoảng cách r , được cho bởi định luật Ampe về lưu số, sẽ là

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi.$$

(b) Lực từ tác dụng lên một hạt trong chùm là

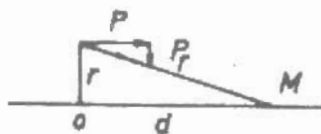
$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB\mathbf{e}_r.$$

Do lực này hạt sẽ nhận được một động lượng theo hướng bán kính về phía trục sau khi đi qua ống hình trụ

$$P_r = q \int vB dt = \frac{qvBL}{v} = \frac{\mu_0 qIL}{2\pi R^2} r.$$

Nếu chúng ta bỏ qua sự chậm lại của chùm hạt qua ống hình trụ và sử dụng phép gần đúng thấu kính mỏng thì động lượng theo hướng trục của một hạt vẫn là P sau khi đi ra ngoài ống hình trụ. Tổng hợp P và P_r sẽ làm cho hạt đi qua trục hình trụ tại điểm M như thấy trên hình 2.62. Từ hình vẽ chúng ta tìm được mối quan hệ

$$\frac{P_r}{P} = \frac{r}{d}.$$



Hình 2.62

Do đó tiêu cự là

$$d = \frac{P_r}{P} = \frac{2\pi R^2 P}{\mu_0 eIL}$$

và không phụ thuộc vào r . Do đó tất cả các hạt sau khi đi qua ống hình trụ sẽ hội tụ lại điểm M .

2087

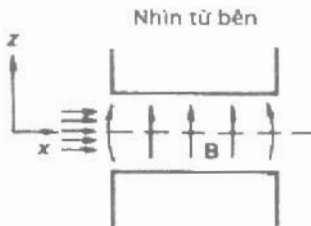
Một nam châm điện lưỡng cực có các mặt cực hình chữ nhật trong mặt phẳng nằm ngang với chiều dài l và chiều rộng w . Thành phần chính của từ trường $\mathbf{B}$ có hướng thẳng đứng. Một chùm hạt song song, mỗi hạt có khối lượng m và điện tích q , đi vào nam châm với tốc độ v song song với mặt phẳng nằm ngang nhưng tạo một góc φ với đường thẳng trung tâm của nam châm. Kích thước thẳng đứng của chùm hạt có thể so được với khe hở của nam châm. Các hạt rời nam châm tại một góc $-\varphi$ tạo với đường thẳng trung tâm của nam châm, tức là bị uốn cong một góc 2φ (xem H. 2.63 và H. 2.64). Hãy chứng minh rằng trường rìa của nam châm sẽ có tác dụng làm hội tụ chùm hạt theo chiều thẳng đứng. Hãy tính một cách gần đúng tiêu cự.

(Columbia)

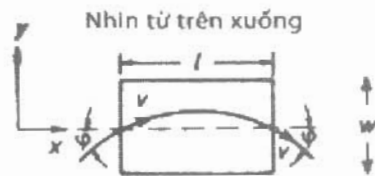
Lời giải:

Khi điện tích cực của nam châm điện lưỡng cực bị giới hạn, từ trường có những đường rìa như thấy trên hình 2.63. Nếu thành phần y của trường rìa bỏ qua được, trường rìa sẽ chỉ có thành phần z và x . Từ $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, ta có

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}.$$



Hình 2.63



Hình 2.64

Giả thiết rằng phạm vi của trường rìa là b . Tại đầu vào của nam châm điện, B_z tăng từ 0 đến B trong khoảng cách b . Đối với phép gần đúng bậc nhất, mối quan hệ trên cho $B_{z,in} = \frac{B}{b}z$. Thế nhưng tại lối ra, B_z giảm từ B xuống 0 và

nó có $B_{z,\text{out}} = -\frac{B}{b}z$. Tốc độ của các hạt tại đầu vào và đầu ra tương ứng là $\mathbf{v} = v \cos \varphi \mathbf{e}_x + v \sin \varphi \mathbf{e}_y$ và $\mathbf{v} = v \cos \varphi \mathbf{e}_x - v \sin \varphi \mathbf{e}_y$. Như vậy tại cả đầu vào và đầu ra các hạt sẽ được tác dụng bởi một lực có hướng z và ở gần đường thẳng trung tâm của nam châm, đó là

$$F_z = -\frac{qvBz \sin \varphi}{b}.$$

Lực này cho một động lượng thẳng đứng tới các hạt. Thời gian cần thiết để các hạt đi xuyên qua chiều rộng của trường từ là b là

$$\Delta t = \frac{b}{v \cos \varphi}.$$

Do đó động lượng thẳng đứng được tính gần đúng như sau

$$P_z = -F_z \Delta t = -qBz \tan \varphi.$$

Vì P_z là âm đối với $+z$ và dương đối với $-z$, sẽ có một hiệu ứng hội tụ theo chiều thẳng đứng đối với các hạt. Động lượng của các hạt trên mặt phẳng xy là $P = mv$. Lấy tiêu cự là f (từ đầu vào) ta có

$$\frac{2|P_z|}{P} = \frac{|z|}{f},$$

Từ đó ta được

$$f = \frac{mv}{2qB \tan \varphi}.$$

Phương trình chuyển động của một hạt giữa các cực của nam châm là

$$m \frac{dv_y}{dt} = qv_x B$$

hay

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qB}{m},$$

Vì $v_x = v \cos \varphi \approx v$, $v_y = v \sin \varphi \approx v\varphi$. Nếu góc lệch φ nhỏ, chúng ta có thể lấy thời gian cần thiết để đi ngang qua khoảng cách $\frac{l}{2}$ là

$$t = \frac{l}{2v},$$

và có một cách gần đúng

$$\varphi \approx \frac{qBl}{2mv}.$$

Thay thế nó vào biểu thức tính tiêu cự và lấy $\tan \varphi \approx \varphi$, ta có

$$f = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2 l}.$$

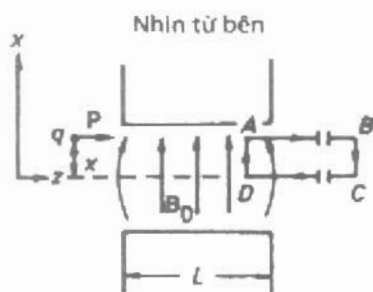
2088

Một nam châm lưỡng cực với các mặt cực hình chữ nhật, từ trường B_0 và các kích thước đã được chỉ rõ trong các hình 2.65 và 2.66. Chúng ta đưa vào một hệ tọa độ có trục x song song với từ trường và trục y , trục z song song với các cạnh của các mặt cực. Hãy chọn mặt phẳng $x = 0$ sao cho nó nằm ở giữa khoảng cách các mặt cực. Giả thiết rằng một hạt có điện tích q và động lượng P song song với trục z được phóng vào nam châm, đi vào vùng giữa các mặt cực tại một chiều cao x trên mặt phẳng trung tâm $x = 0$.

(a) Độ lệch góc gần đúng θ_y là bao nhiêu trong mặt phẳng yz sau khi hạt đi qua nam châm? (Giả thiết $P \gg qBL$)?

(b) Hãy chứng minh rằng độ lệch góc trong mặt phẳng xz sau khi hạt đi qua nam châm được tính gần đúng bằng $\theta_x \approx \theta_y^2 x/L$, với θ_y là độ lệch tìm thấy trong (a). (Gợi ý: Độ lệch này được sinh ra bởi từ trường rìa tác động lên hạt, khi nó đi ra khỏi nam châm).

(c) Hiệu ứng tìm được trong (b) hội tụ hay không hội tụ các hạt vào trục?
(Columbia)



Hình 2.65



Hình 2.66

Lời giải:

Lực từ tác dụng trên hạt có các thành phần

$$F_x = -q(v_y B_z - v_z B_y),$$

$$F_y = -q(v_z B_x - v_x B_z),$$

$$F_z = -q(v_x B_y - v_y B_x).$$

Lưu ý rằng như thấy trên hình 2.65 và 2.66, hệ tọa độ được sử dụng ở đây là thuận trái.

(a) Vì $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ và đều giữa các mặt cực, phương trình chuyển động ngang của hạt là

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_z B_0.$$

Vì tốc độ v không thay đổi trong từ trường, ta có $v_y = -v \sin \theta_1$, $v_z = v \cos \theta_1$, với θ_1 là góc lệch trong mặt phẳng yz . Khi $v_y \approx -v\theta_1$, $v_z = v$, và $P = mv =$ hằng số, phương trình trên trở thành

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{qvB_0}{P},$$

hay

$$d\theta_1 = \frac{qvB_0}{P} dt = \frac{qvB_0}{Pv_z} dz,$$

nghĩa là

$$\cos \theta_1 d\theta_1 = \frac{qB_0}{P} dz.$$

Lấy tích phân

$$\int_0^{\theta_y} \cos \theta_1 d\theta_1 = \int_0^L \frac{qB_0}{P} dz$$

Ta tìm được

$$\sin \theta_y = \frac{qB_0 L}{P}.$$

Vì $P \gg qB_0 L$, ta có một cách gần đúng

$$\theta_y \approx \frac{qB_0 L}{P}.$$

(b) Để tính đến hiệu ứng rì, ta có thể giả thiết $B_y \approx 0$ và một B_z nhỏ được cộng thêm vào từ trường chính $B_0 \mathbf{e}_x$. Phương trình chuyển động thẳng đứng của hạt là

$$m \frac{dv_x}{dt} = -qv_y B_z.$$

Khi $v_y \approx -v\theta_y$, $v_x \approx -v\theta_2$, $v_z \approx v$, $dz \approx vdt$, phương trình trên trở thành

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{qv\theta_y}{P} B_z.$$

Từ (a) ta có $P \approx \frac{qB_0 L}{\theta_y}$. Như vậy

$$d\theta_2 = -\frac{\theta_y^2}{LB_0} B_z dz,$$

và độ lệch góc trong mặt phẳng xz là

$$\theta_x = \int_0^{\theta_x} d\theta_x = -\frac{\theta_y^2}{LB_0} \int_{z_0}^{\infty} B_z dz.$$

Tại đầu ra của nam châm, $B_x \approx B_0$. Ta chọn đường kín ABCD, như trong hình 2.65, để tích phân

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Lấy tích phân từng đoạn

$$\begin{aligned} \int_A^B B_z dz &= \int_{z_0}^{\infty} B_z dz, \quad \int_B^C B_x dx \approx 0, \\ \int_C^D B_z dz &= 0, \quad \int_D^A B_x dx = xB_0. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng chúng ta lấy các điểm B, C tại vô hạn và sử dụng điều kiện $B_z = 0$ đối với mặt phẳng trung tâm. Do đó

$$\int_{z_0}^{\infty} B_z dz = -xB_0,$$

và

$$\theta_x = \frac{\theta_y^2}{L} x.$$

(c) Vì $\theta_x \geq 0$ đối với $x \geq 0$, hạt sẽ luôn luôn lệch về vùng giữa của nam châm. Do đó hiệu ứng phát hiện trong (b) sẽ làm hội tụ các hạt với tiêu cự là

$$f = v \left| \frac{x}{v_x} \right| = \frac{x}{\theta_x} = \frac{L}{\theta_y^2} = \frac{P^2}{q^2 B_0^2 L}.$$

2089

Khi một dung dịch huyền phù loãng có các hạt hình trụ không đẳng hướng nghịch từ được đặt trong một từ trường đồng đều $\mathbf{H}$, người ta đã quan sát được rằng các hạt đó sắp xếp sao cho các trục dài của chúng song song với đường sức từ. Các hạt có đối xứng trụ và chúng có các thành phần của tenxơ độ cảm từ đặc trưng bởi:

$$\chi_x = \chi_y < \chi_z < 0.$$

Giả thiết rằng chất lỏng huyền phù này có độ cảm từ bỏ qua được.

(a) Trục z của hạt ban đầu tạo một góc θ với từ trường. Hãy xác định năng lượng định hướng của từ trường?

(b) Mômen lực tác dụng lên hạt trong phần (a) là bao nhiêu?

(c) Xu hướng sắp xếp thẳng hàng sẽ bị chống lại bởi chuyển động Brown. Khi hạt quay trong chất lỏng nó sẽ chịu một mômen lực nhớt có độ lớn $\zeta \dot{\theta}$ với

$$\zeta = 10^{-10} \text{ gcm}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Mômen quán tính của một hạt là $I = 10^{-15} \text{ gcm}^2$. Nếu các hạt lúc đầu đã được sắp xếp thẳng hàng bởi từ trường, hãy ước lượng góc căn quân phương $\Delta\theta_{\text{rms}}$ mà các trục phân tử bị chệch khỏi hướng sắp xếp thẳng hàng trong một thời gian $t = 10$ giây sau khi từ trường bị ngắt. Nhiệt độ của dung dịch huyền phù là $T = 300 \text{ K}$. (Princeton)

Lời giải:

(a) Trong hệ tọa độ Đề các (x, y, z) áp dụng đối với một hạt, từ trường có thể biểu diễn như sau

$$\mathbf{B} = B \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + B \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + B \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

Vì $|\chi_x|$, $|\chi_y|$ và $|\chi_z|$ thông thường nhỏ hơn nhiều so với 1, từ trường bên trong hạt (một hình trụ nhỏ) cũng có thể lấy là $\mathbf{B}$. Độ từ hoá được cho bởi

$$\mathbf{M} = \chi \cdot \mathbf{H} = \chi \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Lấy thể tích của hình trụ nhỏ là V , khi đó năng lượng định hướng là

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \left(\chi \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} V \right) \\ &= \frac{V}{\mu_0} (B_x, B_y, B_z) \begin{pmatrix} \chi_x & & \\ & \chi_y & \\ & & \chi_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{V}{\mu_0} (\chi_x B_x^2 + \chi_y B_y^2 + \chi_z B_z^2) \\ &= \frac{V}{\mu_0} [\chi_x (B_x^2 + B_y^2) + \chi_z B_z^2] \\ &= \frac{V}{\mu_0} [\chi_x B^2 \sin^2 \theta + \chi_z B^2 \cos^2 \theta]. \end{aligned}$$

(b) Mômen lực tác dụng lên hạt là

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{\partial E}{\partial \theta} = -\frac{V}{\mu_0} [\chi_x \cdot 2 \sin \theta \cos \theta + \chi_z \cdot 2 \cos \theta (-\sin \theta)] B^2 \\ &= \frac{B^2 V}{\mu_0} (\chi_z - \chi_x) \sin 2\theta.\end{aligned}$$

(c) Sự quay của hạt thoả mãn phương trình

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\zeta \frac{d\theta}{dt} + F(t),$$

trong đó $F(t)$ là lực ngẫu nhiên tác dụng lên hạt. Lưu ý rằng

$$\frac{d^2 \theta^2}{dt^2} = 2\dot{\theta}^2 + 2\theta\ddot{\theta},$$

Ta có

$$I \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \theta^2}{dt^2} - \dot{\theta}^2 \right) = -\zeta \theta \frac{d\theta}{dt} + \theta F(t),$$

hay

$$\frac{1}{2} I \frac{d^2 \theta^2}{dt^2} - I \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2} \zeta \frac{d\theta^2}{dt} + \theta F(t).$$

Lấy trung bình trên tất cả các hạt $\overline{\theta F(t)} = 0$, ta có

$$\frac{1}{2} I \frac{d^2 \overline{\theta^2}}{dt^2} + \frac{1}{2} \zeta \frac{d\overline{\theta^2}}{dt} - I \overline{\dot{\theta}^2} = 0.$$

Nguyên lý phân bố đều năng lượng cho

$$\frac{1}{2} I \overline{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{2} kT,$$

Như vậy phương trình trên trở thành

$$\frac{d^2 \overline{\theta^2}}{dt^2} + \frac{\zeta}{I} \frac{d\overline{\theta^2}}{dt} - \frac{2kT}{I} = 0.$$

nó có nghiệm là

$$\overline{\theta^2} = \frac{2kT}{\zeta} + C e^{-\frac{\zeta}{I} t},$$

trong đó C là một hằng số cần được xác định. Lưu ý rằng, vì θ không bị giới hạn vào vùng $[0, \pi]$, ta phải xét đến cả số vòng quay của hạt quanh từ trường.

Để ước tính $\Delta\theta_{\text{rms}}$, lấy $\overline{\theta^2} = 0$ tại $t = 0$, khi đó $C = 0$. Do đó $\overline{\theta^2} = \frac{2kT}{\zeta}t$ tại thời điểm t . Tính bằng số

$$\overline{\theta^2} = \frac{2 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{10^{-17}} \times 10 = 8,28 \times 10^{-3},$$

hay

$$\Delta\theta_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\overline{\theta^2}} = 0,091 \text{ rad.} = 5,2^\circ.$$

2090

Một electron được đưa vào trong một vùng có điện trường và từ trường đều vuông góc với nhau. (Chúng ta hãy cho rằng $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$).

(a) Với vận tốc ban đầu như thế nào thì các electron sẽ chuyển động với tốc độ không đổi? (cả về hướng và độ lớn).

(b) Xét một chùm electron có phân bố tốc độ bất kì được phóng đồng thời vào mặt phẳng vuông góc với điện trường. Có một thời điểm mà tại đó, tất cả các electron đều ở trong mặt phẳng này lần nữa không?

(Columbia)

Lời giải:

(a) Nếu electron chuyển động với tốc độ không đổi, thì tổng hợp lực tác dụng lên nó phải bằng 0, nghĩa là

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_E = -eE\mathbf{e}_x.$$

Vì $\mathbf{F}_B = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -eB\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z$, ta có

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{E}{B}\right)\mathbf{e}_y.$$

(b) Giả thiết tất cả các điện tử ở trong mặt phẳng YOZ tại $t = 0$. Xét một electron với vị trí ban đầu $(0, y_0, z_0)$ và tốc độ ban đầu (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) . Khi đó, các phương trình chuyển động của nó là

$$m \frac{dv_x}{dt} = -e(E + Bv_y), \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = ev_x B, \quad (2)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3)$$

Lấy $v_+ = v_x + iv_y$, khi đó các phương trình (1) và (2) kết hợp lại sẽ cho

$$m \frac{dv_+}{dt} = -eE + ieBv_+$$

với nghiệm

$$v_+ = ce^{i\omega t} - i \frac{E}{B}$$

với $\omega = \frac{eB}{m}$. Điều kiện ban đầu cho

$$c = v_{0x} + i \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right).$$

do đó

$$\begin{aligned} v_+ = & \left[v_{0x} \cos \omega t - \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \sin \omega t \right] \\ & + i \left[v_{0x} \sin \omega t + \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \cos \omega t - \frac{E}{B} \right], \end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \cos \omega t - \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \sin \omega t, \\ v_y(t) &= v_{0x} \sin \omega t + \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \cos \omega t - \frac{E}{B}, \\ v_z(t) &= v_{0z}. \end{aligned}$$

Lấy tích phân các biểu thức trên, ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right), \\ y(t) &= -\frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(v_{0y} + \frac{E}{B} \right) \sin \omega t - \frac{E}{B} t + \frac{v_{0x}}{\omega} + y_0, \\ z(t) &= z_0 + v_{0z} t. \end{aligned}$$

Để $x(t) = 0$ ta cần thoả mãn $t = \frac{2\pi n}{\omega}$ ($n = 1, 2, \dots$). Do đó tất cả các electron sẽ lại ở trong mặt phẳng YOZ một lần nữa tại thời điểm $\frac{2\pi n}{\omega}$.

4. CÁC BÀI TẬP KHÁC (2091 - 2119)

2091

Hình 2.67 cho thấy một thấu kính điện tử đã được đơn giản hoá bao gồm một vòng dây tròn (bán kính a) mang dòng điện I . Đối với $\rho \ll a$ điện thế vectơ được tính gần đúng là

$$A_\theta = \frac{\pi I a^2 \rho}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(a) Hãy viết phương trình Lagrange trong tọa độ trụ (ρ, θ, z) và phương trình Hamiltonian đối với một hạt có điện tích q chuyển động trong trường này.

(b) Hãy chứng minh rằng động lượng chuẩn tắc p_θ triệt tiêu đối với quỹ đạo đã cho và tìm một biểu thức cho θ . Trong các phần (c) và (d) sẽ có ích nếu chúng ta sử dụng phép gần đúng đơn giản là: lực từ là quan trọng nhất khi hạt ở trong vùng lân cận của thấu kính (gần đúng xung lượng). Vì ρ là nhỏ ta có thể giả thiết rằng $\rho \approx b$ và $z \approx u$ gần như không đổi trong vùng tương tác.

(c) Hãy tính sự thay đổi xung trong động lượng theo phương bán kính khi hạt đi qua thấu kính. Sau đó hãy chứng minh rằng vòng dây có tác dụng như một thấu kính mỏng

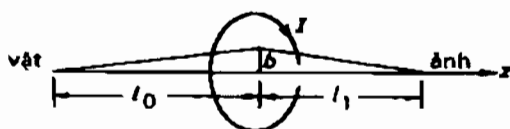
$$\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_i} = \frac{1}{f},$$

với

$$f = \frac{8a}{3\pi} \left(\frac{muc}{\pi q I} \right)^2.$$

(d) Chứng minh rằng ảnh sẽ quay một góc $\theta = -4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}$ khi đi qua thấu kính.

(Wisconsin)



Hình 2.67

Lời giải:

(a) Phương trình Lagrange của một điện tích q trong một trường điện từ là

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\varphi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c}\right),$$

trong đó v là tốc độ của điện tích có khối lượng m , φ là thế vô hướng và $\mathbf{A}$ là điện thế vectơ. Vì

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{A} &= \frac{I\pi a^2\rho}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{e}_\theta, \quad \varphi = 0,\end{aligned}$$

ta có

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{I\pi a^2 q \rho^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}\dot{\theta}.$$

Do đó các thành phần của động lượng chính tắc được tính như sau

$$\begin{aligned}P_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \\ P_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{I\pi a^2 q \rho^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}, \\ P_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.\end{aligned}$$

Khi đó phương trình Hamiltonian là

$$\begin{aligned}H &= P_\rho\dot{\rho} + P_\theta\dot{\theta} + P_z\dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2m}\left[P_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(P_\theta - \frac{I\pi a^2 q \rho^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}\right)^2 + P_z^2\right].\end{aligned}$$

(b) Sử dụng phương trình chính tắc của Hamiltonian $\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$, ta nhận được $\dot{P}_\theta = 0$, nghĩa là

$$P_\theta = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{I\pi a^2 q \rho^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}} = \text{const.}$$

Ban đầu, khi hạt điện tích còn ở xa thấu kính, nó chuyển động theo trục của vòng dây ($\rho = 0$) với $v_\theta = 0$. Vì P_θ là một tích phân chuyển động, nên ta có $P_\theta = 0$. Suy ra

$$\dot{\theta} = -\frac{I\pi a^2 q}{mc(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(c) Phương trình chính tắc khác của Hamiltonian là $\dot{P}_S = -\frac{\partial H}{\partial \rho}$, với $P_\theta = 0$, cho

$$\dot{P}_S = -\frac{I^2 \pi^2 a^4 q^2 \rho}{mc^2 (a^2 + z^2)^3},$$

hay

$$dP_\rho = -\frac{I^2 \pi^2 a^4 q^2 \rho}{mc^2 (a^2 + z^2)^3} dz.$$

Vì $\rho \simeq b$ và $z \simeq u$ gần như không đổi trong vùng tương tác, nên độ biến thiên của động lượng theo phương bán kính là

$$\Delta P_\rho \approx -\frac{I^2 \pi^2 a^4 q^2 b}{mc^2 u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^3} dz = -\frac{3\pi b}{8mau} \left(\frac{Iq\pi}{c} \right)^2.$$

Xét quỹ đạo trong hình 2.67. Ta có $\frac{\rho_0}{u} = \frac{b}{l_0}$ tại điểm vật và $-\frac{\rho_i}{u} = \frac{b}{l_i}$ tại điểm ảnh của thấu kính. Do đó

$$\frac{b}{l_0} + \frac{b}{l_i} = \frac{1}{u} (\rho_0 - \rho_i) = -\frac{\Delta P_\rho}{mu} = \frac{3\pi b}{8a} \left(\frac{Iq\pi}{muc} \right)^2,$$

nó có thể được viết dưới dạng

$$\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_i} = \frac{1}{f}$$

với

$$f = \frac{8a}{3\pi} \left(\frac{muc}{Iq\pi} \right)^2.$$

(d) Biểu thức đối với θ có thể viết như sau

$$d\theta = -\frac{I\pi a^2 q dz}{mc(a^2 + z^2)^{3/2} u}.$$

Do đó khi đi qua thấu kính, ảnh sẽ phải quay so với vật một góc

$$\Delta\theta = -\frac{I\pi a^2 q}{mcu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = -\frac{2I\pi q}{mcu} = -4\sqrt{\frac{2a}{3\pi f}}.$$

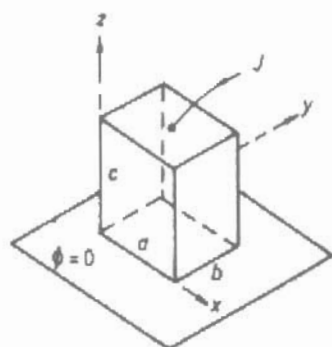
2092

Trong hình 2.68 một khối bán dẫn (độ dẫn $= \sigma$) có mặt đáy ($z = 0$) được gắn với một đế kim loại (độ dẫn của nó $\sigma \rightarrow \infty$) được giữ ở điện thế $\phi = 0$. Một dây dẫn mang dòng điện J được gắn với tâm của mặt đỉnh ($z = c$). Các cạnh ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$) được cách điện và mặt đỉnh cũng cách điện ngoại trừ sợi dây dẫn. Giả thiết rằng mật độ điện tích $\rho = 0$ và $\varepsilon = \mu = 1$ bên trong khối.

(a) Hãy viết các phương trình đối với điện thế ở bên trong khối và nghiệm tổng quát đối với điện thế đó.

(b) Hãy viết điều kiện biên đối với tất cả các mặt và biểu diễn các hằng số tùy ý trong nghiệm ở câu (a) qua các đại lượng đã cho.

(Princeton)



Hình 2.68

Lời giải:

(a) Bên trong khối bán dẫn điện thế $\phi(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình Laplace

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0.$$

Tách các biến số bằng cách viết

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Phương trình Laplace khi đó trở thành

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (2)$$

Mỗi số hạng ở vế trái chỉ phụ thuộc vào một biến số và như vậy phải bằng một hằng số

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \gamma^2,\end{aligned}$$

trong đó $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Nghiệm của các phương trình này là

$$\begin{aligned}X &= A \cos \alpha x + B \sin \alpha x, \\ Y &= C \cos \beta y + D \sin \beta y, \\ Z &= E e^{\gamma z} + F e^{-\gamma z},\end{aligned}$$

trong đó A, B, C, D, E, F là những hằng số. Do đó

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)(C \cos \beta y + D \sin \beta y) \\ &\cdot [E \exp(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + F \exp(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)].\end{aligned}$$

(b) Điều kiện biên $E_t = 0$ đối với bốn mặt thẳng đứng cho

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0,a} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0,b} = 0. \quad (1)$$

Đối với mặt đỉnh ($z = c$) định luật Ohm cho

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=c} = -E_z = -\frac{J}{\sigma} \delta \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2} \right). \quad (2)$$

Mặt đáy ($z = 0$) có điện thế bằng 0, như vậy

$$\phi(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

Các điều kiện (1) đòi hỏi

$$\begin{aligned}B &= D = 0, \\ \alpha &= \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},\end{aligned}$$

với m, n là các số nguyên dương. (Các số nguyên âm chỉ lặp lại nghiệm). Phương trình (3) đòi hỏi $F = -E$. Như vậy, đối với một bộ số nguyên m, n đã cho ta có

$$\phi_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \sinh(\gamma_{mn} z).$$

Do đó nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn}(x, y, z) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \sinh(\gamma_{mn} z). \end{aligned}$$

Thay thế nghiệm này vào (2) ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \gamma_{mn} \cosh(\gamma_{mn} c) \\ = \frac{J}{\sigma} \delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế với $\cos(\gamma_m x) \cos(\beta_n y)$ và lấy tích phân trên mặt đỉnh ta được

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4J}{ab\sigma\gamma_{mn} \cosh(\gamma_{mn} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) \\ &\quad \cdot \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ &= \frac{4J}{ab\sigma\gamma_{mn} \cosh(\gamma_{mn} c)} \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng $A_{mn} \neq 0$ chỉ đối với cả m và n là những số dương chẵn.

2093

Một lưỡng cực từ có mômen m được đặt trong một thấu kính từ mà từ trường của nó có các thành phần sau:

$$B_x = \alpha(x^2 - y^2), \quad B_y = -2\alpha xy, \quad B_z = 0,$$

ở đây z là trục của thấu kính và α là một hằng số. (Từ trường này còn được gọi là trường sáu cực).

(a) Xác định các thành phần của lực tác dụng lên lưỡng cực?

(b) Có thể dùng một hay nhiều thấu kính như vậy để hội tụ một chùm hạt trung hoà có một mômen lưỡng cực từ? Giải thích.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Khi $\mathbf{m}$ là một vectơ không đổi, lực do một từ trường ngoài tác dụng lên $\mathbf{m}$ là

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} F_x &= 2\alpha(m_x x - m_y y), \\ F_y &= -2\alpha(m_x y + m_y x), \\ F_z &= 0, \end{aligned}$$

trong đó ta đã viết $\mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y + m_z \mathbf{e}_z$.

(b) Nếu $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_y$, ta có

$$F_x = -2\alpha m y, \quad F_y = -2\alpha m x.$$

Lực này ngược hướng với sự dịch chuyển của lưỡng cực ra khỏi trục. Do đó ta có thể sử dụng thấu kính sáu cực để hội tụ một chùm hạt trung hoà có mômen từ. Nếu $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_x$, ta có

$$F_x = 2\alpha m x, \quad F_y = -2\alpha m y.$$

Khi đó thấu kính là phân kì theo hướng x và hội tụ theo hướng y . Do đó để hội tụ chùm hạt ta cần một cặp thấu kính sáu cực với góc pha của các trường sáu cực khác nhau là π , nghĩa là trường của thấu kính sáu cực thứ hai là

$$B_x = -\alpha(x^2 - y^2), \quad B_y = 2\alpha xy.$$

Lực tác dụng bởi thấu kính sáu cực thứ hai là

$$F_x = -2\alpha m x, \quad F_y = 2\alpha m y,$$

Sao cho độ tụ cũng nhận được theo hướng x .

2094

Một hạt tích điện đi vào một từ trường tĩnh đều $\mathbf{B}$, chuyển động với tốc độ phi tương đối v_0 lập một góc α với hướng của $\mathbf{B}$.

(a) Xác định tốc độ phát bức xạ.

(b) Tìm điều kiện đối với v_0 để bức xạ phát ra chủ yếu là một đa cực.

(c) Nếu một điện trường tĩnh đều $\mathbf{E}$ được đưa thêm vào song song với $\mathbf{B}$, độ lớn của nó cần phải bằng bao nhiêu để tăng gấp đôi tốc độ bức xạ trước?

(Wisconsin)

Lời giải:

(a) Bức xạ phát ra trong một đơn vị thời gian do một hạt gia tốc phi tương đối có điện tích q với tốc độ $v \ll c$ được tính gần đúng trong hệ đơn vị Gauss là

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2.$$

Phương trình chuyển động của hạt trong từ trường $\mathbf{B}$ là

$$m_0 \dot{\mathbf{v}}_0 = \frac{q}{c} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}),$$

Từ đó ta có:

$$\dot{v}_0^2 = \frac{q^2}{m_0^2 c^2} v_0^2 B^2 \sin^2 \alpha,$$

trong đó α là góc giữa $\mathbf{v}_0$ và $\mathbf{B}$. Khi đó tốc độ phát xạ của bức xạ là

$$P = \frac{2q^4}{3m_0^2 c^5} B^2 v_0^2 \sin^2 \alpha \text{ erg/s}.$$

(b) Sự bức xạ do một hạt tích điện chuyển động trong từ trường $\mathbf{B}$ phát ra được biết đến như bức xạ cyclotron và có dạng bức xạ của một lưỡng cực Hertz. Hạt đó thực hiện sự tiến động Larmor vuông góc với $\mathbf{B}$ với tần số góc $\omega_0 = \frac{qB}{m_0 c}$. Thực tế còn có các bức xạ yếu có các tần số hài cao hơn như $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. Tuy nhiên, nếu $v_0 \ll c$ thì bức xạ lưỡng cực là thành phần chủ yếu và các sự bức xạ khác có thể bỏ qua được.

(c) Khi một điện trường $\mathbf{E}$ tĩnh, đều được đưa vào song song với $\mathbf{B}$, phương trình chuyển động của hạt trở thành

$$m_0 \dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E},$$

hay

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_{\perp} + \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \frac{q}{m_0 c} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m_0} \mathbf{E},$$

$\dot{\mathbf{v}}_{\perp}$ và $\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}$ là các thành phần gia tốc của hạt vuông góc và song song với từ trường. Để nhân đôi công suất bức xạ trong câu (a) $\dot{v}^2$ cũng sẽ được nhân đôi. Viết phương trình trên như sau

$$\dot{v}^2 = \dot{v}_{\perp}^2 + \dot{v}_{\parallel}^2 = \frac{q^2}{m_0^2 c^2} v_0^2 B^2 \sin^2 \alpha + \frac{q^2}{m_0^2} E^2$$

Vì khi $\mathbf{E}$ song song với $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ vuông góc với $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$, ta thấy rằng để nhận được $\dot{v}^2 = 2\dot{v}_0^2$ ta cần điện trường có độ lớn

$$E = \frac{v_0}{c} B \sin \alpha.$$

2095

Một vòng dây dẫn tròn bán kính r , nặng m kilogram, mang một dòng điện không đổi ổn định I ampe. Trục của vòng dây được giữ luôn luôn vuông góc với bề mặt phẳng lớn của một vật dẫn hoàn hảo. Vòng dây chuyển động tự do theo chiều thẳng đứng và chiều cao tức thời của nó là x mét, đồng thời chuyển động với tốc độ v theo hướng y với $v \ll c$.

(a) Điều kiện biên đối với từ trường $\mathbf{B}$ tại mặt phẳng dẫn điện phẳng là gì?

(b) Vẽ và mô tả bằng phương pháp đại số một dòng điện ảnh, mà khi kết hợp với dòng điện thực sẽ tái tạo được một cách chính xác từ trường trong vùng phía trên mặt phẳng dẫn điện đó.

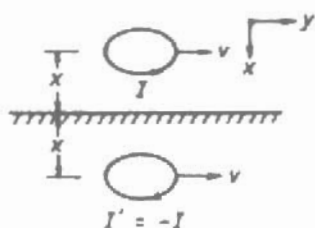
(c) Hãy tìm chiều cao cân bằng gần đúng x và tần số của các dao động nhỏ, thẳng đứng đối với một giá trị của dòng sao cho $x \ll r$.

(Princeton)

Lời giải:

(a) Thành phần vuông góc của $\mathbf{B}$ đi qua biên một cách liên tục có giá trị bằng 0 trên mặt phẳng dẫn điện $B_n = 0$.

(b) Như thấy trên hình 2.69, ảnh của dòng điện cũng là một dòng điện tròn đối xứng qua mặt phẳng dẫn điện, nhưng có chiều ngược lại. Từ trường



Hình 2.69

phía trên vật dẫn phẳng là sự chống chập của các từ trường do hai dòng điện sinh ra và thoả mãn điều kiện biên $B_n = 0$.

(c) Xét một phần tử dòng $I dl$ của dòng điện thực. Khi $x \ll r$, ta có thể coi dòng điện ảnh như một dòng điện thẳng vô hạn. Khi đó phần tử dòng điện $I dl$ sẽ chịu tác dụng của một lực hướng lên phía trên có độ lớn

$$dF = I |dl \times \mathbf{B}| = I \left| dl \frac{\mu_0 (-I)}{2\pi(2x)} \right| = \frac{\mu_0 I^2 dl}{4\pi x}.$$

Lực tác dụng lên toàn bộ dòng điện tròn thực là

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi x} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I^2 r}{2x}.$$

Tại chiều cao cân bằng lực này bằng với trọng lực hướng xuống phía dưới.

$$\frac{\mu_0 I^2 r}{2x} = mg,$$

Từ đó ta có

$$x = \frac{\mu_0 I^2 r}{2mg}.$$

Giả thiết vòng dây dịch chuyển một khoảng cách nhỏ δ theo phương thẳng đứng bắt đầu từ chiều cao cân bằng x , nghĩa là $x \rightarrow x + \delta$, $\delta \ll x$. Phương trình chuyển động của dòng điện tròn theo chiều thẳng đứng là

$$-m\ddot{\delta} = mg - \frac{\mu_0 I^2 r}{2(x + \delta)} \simeq mg - \frac{\mu_0 I^2 r}{2x} \left(1 - \frac{\delta}{x} \right).$$

Lưu ý rằng $mg = \frac{\mu_0 I^2 r}{2x}$, ta nhận được

$$\ddot{\delta} + \frac{\mu_0 I^2 r}{2mx^2} \delta = 0.$$

Điều này cho thấy rằng chuyển động thẳng đứng là dao động điều hoà với tần số góc

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 I^2 r}{2m x^2}} = \frac{g}{I} \sqrt{\frac{2m}{\mu_0 r}}.$$

2096

Giả thiết rằng sự tồn tại của từ tích có quan hệ với từ trường bằng phản ứng địa phương

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m.$$

(a) Dùng định lý divergence, hãy tìm từ trường của một từ tích đặt tại gốc toạ độ.

(b) Khi không có từ tích, tính xoáy của điện trường được cho bởi định luật Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Chứng minh rằng định luật này không tương thích với mật độ từ tích là một hàm của thời gian.

(c) Giả thiết rằng từ tích được bảo toàn, hãy tìm hệ thức giữa mật độ dòng từ tích $\mathbf{J}_m$ và mật độ từ tích ρ_m .

(d) Hãy sửa đổi định luật Faraday nêu trong phần (b) để nhận được một định luật phù hợp với sự có mặt của một mật độ từ tích là hàm của vị trí và thời gian. Chứng minh sự phù hợp của định luật đã sửa đổi đó.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Xét một mặt cầu S có bán kính r tại gốc toạ độ. Vì $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$, theo định lý divergence ta có

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 B(r) = \mu_0 q_m.$$

do đó

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r.$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0,$$

Vì $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ là một hằng đẳng thức. Mặt khác,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t}.$$

Như vậy định luật Faraday không tương thích với một mật độ từ tích thay đổi theo thời gian.

(c) Sự bảo toàn của từ tích có thể biểu diễn như sau

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV = - \oint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_m dV.$$

Vì V là bất kì ta phải có

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0.$$

Đây là phương trình liên tục đối với từ tích.

(d) Nếu chúng ta sửa đổi định luật Faraday thành

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

và lấy divergence hai vế ta sẽ nhận được

$$-\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_m - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \right) = 0.$$

Từ đó ta có biểu thức

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t},$$

Nó phù hợp với phương trình thứ hai của (b).

2097

(a) Giả thiết rằng tồn tại các từ tích cô lập (các đơn cực từ). Hãy viết lại các phương trình Maxwell bao gồm đóng góp của mật độ từ tích ρ_m và mật độ dòng từ $\mathbf{j}_m$. Cho rằng, ngoại trừ các nguồn, các trường đều ở trong chân không.

(b) Alvarez và các cộng sự đã tìm các đơn cực từ trong vật chất bằng cách cho các mẫu vật chất đi qua một cuộn dây n vòng nhiều lần liên tiếp. Nếu

cuộn dây có điện trở R và chúng ta giả thiết rằng các từ tích chuyển động đủ chậm để hiệu ứng về tự cảm của nó là nhỏ, hãy tính điện lượng q chạy qua cuộn dây sau N lần đi vòng quanh của một đơn cực từ q_m .

(c) Giả thiết rằng cuộn dây làm bằng chất siêu dẫn sao cho điện trở của nó bằng 0 và chỉ có độ tự cảm L của nó hạn chế dòng điện được cảm ứng trong nó. Cho rằng ban đầu dòng điện trong cuộn dây bằng 0. Hãy tính dòng điện sau khi đơn cực đi vòng quanh N lần.

(CUSPEA)

Lời giải:

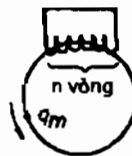
(a) Sử dụng sự phân tích của bài tập 2096. Khi tất cả mật độ điện tích ρ , mật độ dòng điện $\mathbf{j}$, mật độ từ tích ρ_m và mật độ dòng từ $\mathbf{j}_m$ đều ở trong chân không, các phương trình Maxwell (trong hệ đơn vị Gauss) là

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_m, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \right\}$$

trong đó c là tốc độ của ánh sáng trong chân không.

(b) Như thấy trên hình 2.70, ta coi một trong số các vòng đi qua cuộn dây như vòng kín l trong định lý Stoke và coi diện tích được bao quanh bởi l là S . Khi đó, sử dụng định lý Stoke và phương trình thứ 3 ở trên ta có

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}.$$



Hình 2.70

Gọi I_m là dòng từ trong cuộn dây, ta có

$$I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}.$$

Gọi V là hiệu điện thế hai đầu cuộn dây và I là dòng điện chạy qua nó, ta có

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V = IR.$$

Từ thông đi qua cuộn dây là $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, và suất điện động cảm ứng xuất hiện trong cuộn dây là

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Tổ hợp các phương trình trên, ta có phương trình mạch điện

$$IR = \varepsilon - \frac{4\pi}{c} I_m.$$

Nếu suất điện động cảm ứng có thể bỏ qua, tức $\varepsilon = 0$, khi đó

$$IR = -\frac{4\pi}{c} I_m.$$

Từ $I = \frac{dQ}{dt}$, $I_m = \frac{dq_m}{dt}$, phương trình này trở thành

$$R \frac{dQ}{dt} = -\frac{4\pi}{c} \frac{dq_m}{dt}.$$

Lấy tích phân ta được

$$Q = -\frac{4\pi q_m}{RC}.$$

Sau khi q_m đi N lần qua cuộn dây có n vòng, điện lượng toàn phần chạy qua cuộn dây đó là

$$q = -\frac{4\pi N n q_m}{RC}.$$

(c) Nếu điện trở nhỏ có thể bỏ qua, nghĩa là $R = 0$, trong khi độ tự cảm L không thể bỏ qua được, ta có $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$. Bây giờ phương trình mạch điện được viết dưới dạng

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{4\pi}{c} N n \frac{dq_m}{dt}.$$

Lấy tích phân ta nhận được

$$I = -\frac{4\pi N n q_m}{LC}.$$

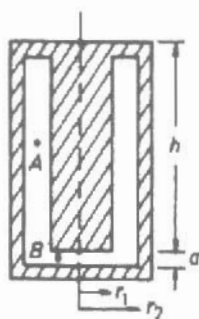
2098

Trong hình 2.71, một hốc hình trụ đối xứng qua trục dài của nó. Với mục đích của bài tập này, có thể coi nó một cách gần đúng như một dây cáp đồng trục (có độ tự cảm và điện dung) được ngắn mạch tại một đầu và nối với một tụ điện phẳng hình đĩa song song tại đầu kia.

(a) Hãy tìm biểu thức của tần số cộng hưởng thấp nhất của hốc. Bỏ qua hiệu ứng biên và hiệu ứng rìa ($h \gg r_2$, $d \ll r_1$).

(b) Hãy tìm hướng và sự phụ thuộc bán kính của vectơ Poynting $\mathbf{N}$ trong các vùng ở gần các điểm A và B .

(Princeton)



Hình 2.71

Lời giải:

(a) Để tìm độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài của một cáp đồng trục ta giả thiết rằng vật dẫn bên trong và bên ngoài chứa các dòng điện tương ứng I và $-I$, các điện tích tuyến tính đồng đều tương ứng λ và $-\lambda$. Sử dụng hệ tọa độ hình trụ (r, θ, z) với trục z dọc theo trục của dây cáp. Lấy chiều của dòng điện trong vật dẫn bên trong theo hướng $+z$. Từ bài tập 2022, độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài của cáp đồng trục là

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Điện dung của tụ điện phẳng song song được nối với cáp đồng trục là

$$C_0 = \frac{\pi\epsilon_0 r_1^2}{d}.$$

Do đó tần số góc cộng hưởng thấp nhất của hốc là

$$\omega_0 = \frac{1}{L(C + C_0)} = \frac{2dc^2}{h(2dh + r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1})}.$$

(b) Tại điểm A, $r_1 < r < r_2$, $\mathbf{E}(r) \sim \frac{e_r}{r}$, $\mathbf{B}(r) \sim \frac{e_\theta}{r}$, như vậy $\mathbf{N} \sim \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_z$. Tại điểm B, $0 < r < r_1$, $\mathbf{E}(r) \sim -\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B}(r) \sim r\mathbf{e}_\theta$, như vậy $\mathbf{N} \sim r\mathbf{e}_r$.

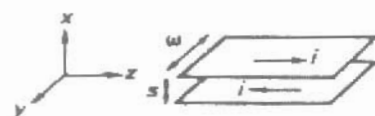
2099

Một sóng điện từ truyền đi giữa hai tấm kim loại phẳng song song dài với $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ vuông góc với nhau và vuông góc với phương truyền. Hãy chứng minh rằng trở kháng đặc trưng $Z_0 = \sqrt{L/C}$ là $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{s}{w}$, trong đó L và C là độ tự cảm và điện dung trên một đơn vị chiều dài, s là khoảng cách giữa các tấm kim loại và w là chiều rộng của tấm. Hãy sử dụng gần đúng bước sóng dài.

(Wisconsin)

Lời giải:

Trong phép gần đúng bước sóng dài, $\lambda \gg w, \lambda \gg s$, ta có thể coi điện trường và từ trường giữa hai tấm kim loại gần đúng là dừng. Sử dụng hệ tọa độ như trên hình 2.72 với trục z dọc theo hướng truyền. Vì điện trường và từ trường vuông góc với trục z và bằng 0 trong hai tấm kim loại, sự liên tục của E_t cho $E_y = 0$, trong khi sự liên tục của B_n cho $B_x = 0$.



Hình 2.72

Giả thiết rằng hai tấm kim loại chứa dòng điện $+i$ và $-i$. Từ trường giữa hai tấm đó được cho bởi điều kiện biên $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{I}_l$, với $\mathbf{I}_l$ là dòng trên một đơn vị chiều rộng của vật dẫn, tức là

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{w} \mathbf{e}_y.$$

Độ tự cảm trên một đơn vị chiều dài của các tấm nhận được bằng cách xét từ thông đi qua một hình chữ nhật có chiều dài đơn vị và chiều rộng s song song với trục z , suy ra

$$L = \frac{Bs}{i} = \frac{\mu_0 s}{w}.$$

Gọi mật độ điện tích mặt của hai tấm kim loại là σ và $-\sigma$. Điện trường giữa hai tấm là

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_x,$$

và hiệu điện thế giữa hai tấm là

$$V = Es = \frac{\sigma s}{\epsilon_0}.$$

Do đó điện dung trên một đơn vị chiều dài là

$$C = \frac{\sigma w}{V} = \frac{\epsilon_0 w}{s}.$$

Suy ra trở kháng đặc trưng trên một đơn vị chiều dài của các tấm kim loại được tính bởi công thức

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0 s}{w} / \frac{\epsilon_0 w}{s}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{s}{w}}.$$

2100

Từ trở trong một mạch từ tương đương với trường hợp nào sau đây?

- (a) Điện trở trong một mạch điện có dòng một chiều.
- (b) Thế tích của nước trong một mạch thủy lực.
- (c) Hiệu điện thế trong một mạch điện xoay chiều.

(CCT)

Lời giải: Câu trả lời là (a).

2101

Độ từ thẩm của một chất thuận từ là:

- (a) nhỏ hơn một chút so với độ từ thẩm của chân không.
- (b) lớn hơn một chút so với độ từ thẩm của chân không.
- (c) lớn hơn nhiều so với độ từ thẩm của chân không.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

2102

Từ trường tăng qua một tấm kim loại bằng đồng. Các dòng Fucô sẽ

- (a) hỗ trợ sự tăng của từ trường.
- (b) làm chậm sự tăng.
- (c) không có tác dụng gì.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (b).

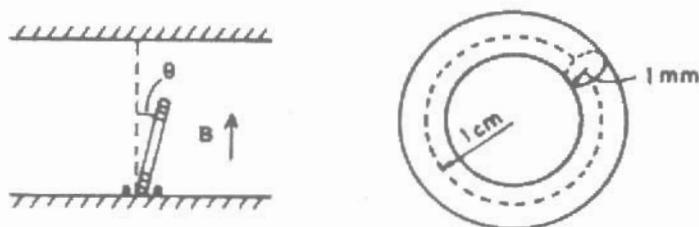
2103

Một chiếc nhẫn vàng được đặt thẳng đứng giữa hai cực của một nam châm lớn. Dáy của chiếc nhẫn được chặn không cho trượt bởi hai chốt cố định. Nó bị làm nghiêng từ phương thẳng đứng một góc $0,1$ rad và bắt đầu đổ xuống. Từ trường là 10^4 gauss, bán kính lớn và bán kính nhỏ của nhẫn là 1 cm và 1 mm (xem hình 2.73), độ dẫn của vàng là $4 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$ và khối lượng riêng của vàng là $19,3 \text{ g/cm}^3$.

(a) Thế năng giải phóng từ sự đổ xuống của chiếc nhẫn chủ yếu chuyển thành động năng hay chuyển thành nhiệt làm tăng nhiệt độ của chiếc nhẫn? Hãy trình bày lập luận của bạn (đối với phần này chỉ cần phân tích bậc độ lớn).

(b) Hãy tính thời gian của quá trình cái nhẫn đổ xuống, bỏ qua hiệu ứng nhỏ hơn (Gợi ý: $\int_{0.1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sin \theta} = 2,00$).

(MIT)



Hình 2.73

Lời giải:

(a) Gọi thời gian của quá trình cái nhẫn đổ xuống là T . Trong quá trình đổ, thế năng được chuyển hoá thành nhiệt năng W_t và động năng W_k mà ta có thể ước lượng thô về độ lớn (trong hệ đơn vị Gauss) như sau:

$$\begin{aligned}
 W_t &\sim I^2 RT \approx \left(\frac{\phi}{cTR} \right)^2 RT = \frac{B^2 (\pi r_1^2)^2}{c^2 RT} \\
 &= \frac{m B^2 (\pi r_1^2)^2}{c^2 T \cdot \left(\frac{2\pi r_1}{\sigma \pi r_2} \right) \cdot (\rho \cdot 2\pi r_1 \cdot \pi r_2^2)} = \frac{m r_1^2}{T} \cdot \frac{\sigma B^2}{4\rho c^2}, \\
 W_k &\sim \frac{1}{2} I \omega^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m r_1^2 \left(\frac{\pi}{2T} \right)^2 = \frac{3\pi^2 m r_1^2}{16T^2},
 \end{aligned}$$

trong đó

- r_1, r_2 – bán kính lớn và bán kính nhỏ của nhẫn
- ϕ = từ thông đi qua nhẫn $\approx B\pi r_1^2$
- ρ = khối lượng riêng của vàng
- σ = độ dẫn điện của vàng
- R = điện trở của nhẫn $= \frac{2\pi r_1}{\sigma \pi r_2}$
- m = khối lượng của nhẫn $= \rho 2\pi r_1 \cdot \pi r_2^2$

- c = tốc độ của ánh sáng trong chân không
- ω = tốc độ góc của nhẵn khi đổ $\approx \frac{\pi}{2T}$.

Đặt

$$T_g = \sqrt{\frac{r_1}{g}} = \sqrt{\frac{1}{980}} = 3,2 \times 10^{-2} \text{ s},$$

$$T_B = \frac{4\rho c^2}{\sigma B^2} = \frac{4 \times 19,3 \times 9 \times 10^{20}}{4 \times 10^{17} \times 10^8} = 1,74 \times 10^{-3} \text{ s},$$

ta có thể viết lại các phương trình trên như sau

$$W_t \sim mgr_1 \cdot \frac{T_g^2}{T \cdot T_B}, \quad W_k \sim mgr_1 \cdot \frac{3\pi^2}{16} \left(\frac{T_g}{T}\right)^2.$$

Sự cân bằng năng lượng sẽ cho biểu thức sau

$$mgr_1 = W_t + W_k,$$

hay

$$T^2 - \left(\frac{T_g^2}{T_B}\right)T - \frac{3\pi^2}{16}T_g^2 = 0.$$

Giải để tìm T , ta có

$$T = \frac{T_g}{2} \left[\frac{T_g}{T_B} + \sqrt{\left(\frac{T_g}{T_B}\right)^2 + \frac{3\pi^2}{4}} \right].$$

Vì $\left(\frac{T_g}{T_B}\right)^2 \gg \frac{3\pi^2}{4}$, $T \approx \frac{T_g}{2}$. Do đó

$$W_t \sim mgr_1, \quad W_k \sim mgr_1 \cdot \frac{3\pi^2}{16} \left(\frac{T_B}{T_g}\right) \ll mgr_1.$$

Từ đây suy ra rằng, khi nhẵn đổ xuống thế năng chủ yếu chuyển thành sự tăng nhiệt độ của nhẵn.

(b) Chúng ta bỏ qua động năng của nhẵn. Tức là, chúng ta giả thiết rằng thế năng được chuyển hoá hoàn toàn thành nhiệt năng. Khi đó mômen của trọng lực và mômen của lực từ tác dụng lên nhẵn chiếc nhẵn gần như cân bằng nhau.

Từ thông đi qua nhẵn là

$$\phi(\theta) = B\pi r_1^2 \sin \theta.$$

Suất điện động cảm ứng là

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{1}{c} B \pi r_1^2 \cos \theta \dot{\theta},$$

Suy ra dòng điện cảm ứng là

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = B \pi r_1^2 \cos \theta \cdot \frac{\dot{\theta}}{cR}$$

và mômen từ của nam châm là

$$m = \frac{i \pi r_1^2}{c} = \frac{B (\pi r_1^2)^2 \cos \theta \dot{\theta}}{c^2 R}.$$

Do đó, mômen của lực từ tác dụng lên nam châm là

$$\tau_m = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = \frac{(B \pi r_1^2 \cos \theta)^2 \dot{\theta}}{c^2 R}.$$

Mômen của trọng lực tác dụng lên nam châm là $\tau_g = mgr_1 \sin \theta$. Do đó

$$\tau_m = \tau_g,$$

hay

$$\frac{(B \pi r_1^2 \cos \theta)^2 \dot{\theta}}{c^2 R} = mgr_1 \sin \theta,$$

Từ đó suy ra

$$dt = \frac{\sigma B^2 r_1 \cos^2 \theta d\theta}{4 \rho g c^2 \sin \theta}.$$

Lấy tích phân ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma B^2 r_1}{4 \rho g c^2} \int_{0,1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{\sigma B^2 r_1}{4 \rho g c^2} \cdot 2 \\ &= 2 \frac{T_g^2}{T_B} = 2 \times \frac{(3.2 \times 10^{-2})^2}{1.74 \times 10^{-3}} = 1.2 \text{ s}. \end{aligned}$$

2104

Một hạt có điện tích, khối lượng, mômen động lượng đã cho chuyển động trên một quỹ đạo tròn.

(a) Xuất phát từ các định luật cơ bản của điện động lực học, hãy tìm phần tĩnh của từ trường sinh ra tại các khoảng cách lớn so với kích thước của vòng tròn quỹ đạo.

(b) Sự phân bố từ tích như thế nào để có thể sinh ra một từ trường giống như vậy?

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Gọi điện tích, khối lượng và mômen động lượng của hạt lần lượt là q, m, L . Sử dụng hệ tọa độ trụ (R, θ, z) với trục z dọc theo trục của quỹ đạo tròn và gốc tọa độ tại tâm của nó. Vì ta quan tâm đến thành phần tĩnh của trường, nên có thể coi điện tích quay trên quỹ đạo tròn như một dòng điện tròn không đổi. Thế vectơ điện thế tại một điểm có vectơ bán kính vectơ $\mathbf{R}$ từ gốc tọa độ là

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} dV',$$

trong đó $r = |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$. Lấy gần đúng $r = R(1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{R^2})$ đối với các khoảng cách lớn và viết $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV' = I d\mathbf{r}'$. Khi đó

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{R}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \oint \left(1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}'}{R^2} + \dots \right) d\mathbf{r}', \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

ở đây ta lấy tích phân theo quỹ đạo tròn. Hãy viết

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \frac{1}{2} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}'] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}']. \end{aligned}$$

Phần đối xứng của biểu thức trên làm xuất hiện một điện trường tứ cực và sẽ không cần xét đến. Phần phải đối xứng có thể viết lại như sau

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{R}.$$

Do đó, khi chỉ xét trường lưỡng cực từ, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{R}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right] \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \pi r^2 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3},\end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{M} = I \pi r^2 \mathbf{e}_z$ là mômen lưỡng cực từ của dòng điện tròn. Từ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0 q L}{8\pi m} \left(\frac{3 \cos \theta}{R^3} \mathbf{e}_R - \frac{\mathbf{e}_z}{R^3} \right) = \frac{\mu_0 q L}{8\pi m R^3} (3 \cos \theta \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_z),\end{aligned}$$

ở đây chúng ta đã sử dụng

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{qv}{2\pi r}$$

và

$$M = I \pi r^2 = \frac{qvr}{2} = \frac{qL}{2m}.$$

(b) Một lớp lưỡng cực từ có thể sinh ra một từ trường giống trên nếu chúng ta xét ở các khoảng cách xa nguồn. Gọi mômen lưỡng cực từ là $\mathbf{p}_m$, khi đó thế vô hướng từ ở xa là

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{R^3},$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \varphi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

Biểu thức này giống biểu thức đối với $\mathbf{B}$ trong câu (a) với $\mathbf{p}_m = \mathbf{M}$.

2105

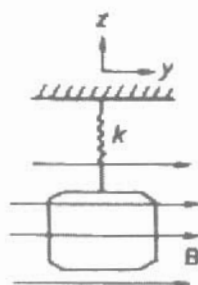
Một vòng dây dẫn có diện tích A và điện trở toàn phần R được treo bằng một lò xo xoắn có hằng số k trong một từ trường đều $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_y$. Vòng dây nằm trong mặt phẳng yz ở vị trí cân bằng và có thể quay quanh trục z với mômen quán tính I như thấy trên hình 2.74(a). Vòng dây được quay một góc nhỏ θ

ra khỏi vị trí cân bằng và sau đó thả ra. Giả thiết rằng lò xo xoắn không dẫn điện và bỏ qua độ tự cảm của vòng dây.

(a) Viết phương trình chuyển động của vòng dây qua các thông số đã cho?

(b) Phác hoạ sự chuyển động và đánh dấu tất cả các thang thời gian có liên quan trong trường hợp R lớn.

(MIT)



Hình 2.74 (a)

Lời giải:

(a) Khi góc giữa mặt phẳng của vòng dây và từ trường là α , từ thông từ đi qua vòng dây là: $\phi = BA \sin \alpha$. Suất điện động cảm ứng và dòng điện cảm ứng được cho bởi các công thức

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -BA \cos \alpha \dot{\alpha}, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BA \dot{\alpha} \cos \alpha}{R}.$$

Mômen từ của vòng dây là

$$m = iA = -\frac{BA^2 \cos \alpha}{R} \dot{\alpha}.$$

Do đó, mômen của lực từ tác dụng lên vòng dây là

$$\tau_m = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = \frac{B^2 A^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{\alpha}.$$

Ngoài ra, lò xo xoắn cũng cung cấp một mômen xoắn $k\alpha$. Cả hai mômen này đều cản trở sự quay của vòng dây. Như vậy ta có

$$I\ddot{\alpha} + \frac{B^2 A^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{\alpha} + k\alpha = 0.$$

Vì $\alpha \ll \theta$ và bản thân θ cũng nhỏ, chúng ta có $\cos^2 \alpha \approx 1$ và

$$I\ddot{\alpha} + \frac{B^2 A^2}{R} \mathbf{r}a + k\alpha = 0.$$

Đặt $\alpha = e^{Ct}$, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$IC^2 + \frac{B^2 A^2}{R} C + k = 0.$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là

$$C = \frac{-\frac{B^2 A^2}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2 A^2}{R}\right)^2 - 4Ik}}{2I} = -\frac{B^2 A^2}{2IR} \pm j\sqrt{\frac{k}{I} - \left(\frac{B^2 A^2}{2IR}\right)^2}.$$

Kí hiệu

$$\beta = \frac{B^2 A^2}{2IR}, \quad \gamma = \sqrt{-\left(\frac{B^2 A^2}{2IR}\right)^2 + \frac{k}{I}} = \sqrt{-\beta^2 + \frac{k}{I}},$$

chúng ta có hai nghiệm

$$C_1 = -\beta + j\gamma, \quad C_2 = -\beta - j\gamma.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động là

$$\alpha = e^{-\beta t} [A_1 \cos \gamma t + A_2 \sin \gamma t].$$

Từ $\alpha|_{t=0} = \theta$, $\mathbf{r}a|_{t=0} = 0$, ta tìm được

$$A_1 = \theta, \quad A_2 = \frac{\beta}{\gamma} A_1 = \frac{\beta}{\gamma} \theta.$$

Do đó dao động quay của vòng dây được mô tả bởi

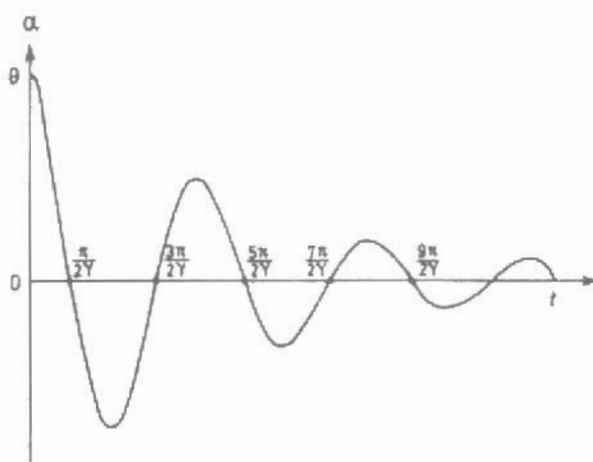
$$\alpha(t) = \theta e^{-\beta t} \left[\cos \gamma t + \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma t \right].$$

Lưu ý rằng đối với chuyển động là một dao động, ta cần $k > \beta^2 I$, điều này đã được giả thiết cho trường hợp này.

(b) Nếu R lớn, $\beta \ll \gamma$ và chúng ta có

$$\alpha(t) \approx \theta e^{-\beta t} \cos \gamma t.$$

Chuyển động này là chuyển động điều hoà với biên độ thay đổi theo hàm số mũ như thấy trong hình 2.74(b).



Hình 2.74 (b)

2106

Hình 2.75 cho thấy hai sợi dây dẫn dài song song mang các dòng điện không đổi I bằng nhau về độ lớn và ngược chiều nhau, cách nhau một khoảng cách $2a$.

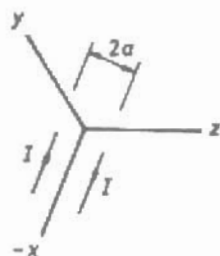
(a) Hãy tìm biểu thức của cường độ từ trường tại một điểm nằm trong mặt phẳng giữa (nghĩa là mặt phẳng xz trong hình 2.75) và cách mặt phẳng chứa các sợi dây dẫn một khoảng cách z .

(b) Hãy tìm tỉ số của gradient từ trường dB_z/dz và cường độ từ trường B .

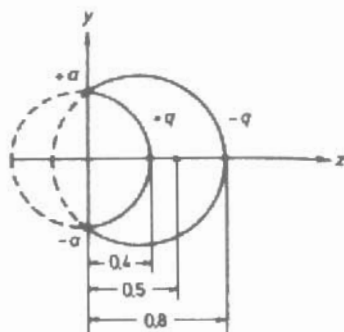
(c) Hãy chứng minh một cách định tính rằng "từ trường hai sợi dây" ở trên có thể được tạo ra bằng các mẫu cực hình trụ có tiết diện, chúng trùng với các mặt đẳng thế thích hợp. Thêm nữa, hãy đưa ra những bằng chứng để chứng minh rằng điện trường tương tự và gradient của nó có thể được tạo ra bằng những ống hình tròn tương đương có dòng điện I được thay bằng điện tích trên một đơn vị chiều dài ống q .

(d) Hãy tham khảo hình 2.76, trên đó đã cho những kích thước cụ thể và miêu tả hai ống dài có tiết diện tròn chứa những điện tích q (trên cm) bằng nhau và trái dấu. Cho rằng điện trường là $E = 8000 \text{ V/cm}$ tại vị trí $z = a = 0.5 \text{ cm}$, hãy tính giá trị của q và hiệu điện thế giữa hai ống.

(UC, Berkeley)



Hình 2.75



Hình 2.76

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng các sợi dây dẫn dài mang các dòng điện $+I$ và $-I$ đi qua trục y tại $+a$ và $-a$. Xét một điểm P bất kì và không mất đi tính tổng quát, ta có thể lấy mặt phẳng yz chứa P . Gọi các khoảng cách từ P đến trục y là z và đến trục z là y và gọi các khoảng cách từ P đến các sợi dây dẫn là r_1 và r_2 , như trên hình 2.77. Từ định luật Ampe về lưu số suy ra độ lớn của cảm ứng từ B_1 và B_2 do $+I$ và $-I$ sinh ra là

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2},$$

trong đó $r_1 = [z^2 + (a - y)^2]^{\frac{1}{2}}$ và $r_2 = [z^2 + (a + y)^2]^{\frac{1}{2}}$, và có hướng như được chỉ ra trong hình 2.77. Khi đó cảm ứng từ tổng hợp tại P là $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, có các thành phần sau

$$B_x = 0,$$

$$B_y = -B_1 \sin \theta_1 + B_2 \sin \theta_2$$

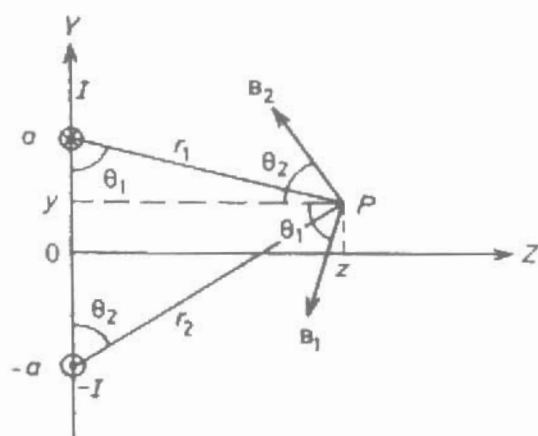
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{z}{r_1^2} + \frac{z}{r_2^2} \right) = -\frac{2\mu_0 I a y z}{\pi r_1^2 r_2^2},$$

$$B_z = -B_1 \cos \theta_1 - B_2 \cos \theta_2$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a - y}{r_1^2} + \frac{a + y}{r_2^2} \right).$$

Đối với một điểm trong mặt phẳng xz và cách trục y một khoảng bằng z , nghĩa là tại hệ toạ độ $(0, 0, z)$, phương trình trên đơn giản thành:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{(z^2 + a^2)} \mathbf{e}_z. \quad (1)$$



Hình 2.77

(b) Phương trình (1) cho

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{az}{(z^2 + a^2)^2}.$$

do đó

$$\frac{dB_z}{dz} / B_z = -\frac{2z}{z^2 + a^2}.$$

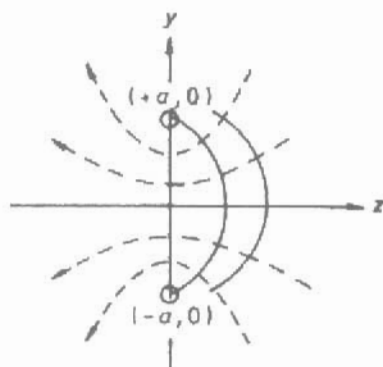
(c) Các đường sức từ song song với mặt phẳng yz được cho bởi phương trình

$$\frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}.$$

Chúng có đối xứng gương với mặt phẳng xz như được minh họa bằng các đường đứt nét trên hình 2.78. Nếu chúng ta định nghĩa thế vô hướng từ ϕ_m bằng công thức $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$, thì mặt đẳng thế là các mặt trụ vuông góc với các đường sức ở khắp mọi nơi. Giao tuyến của các mặt đẳng thế này với mặt phẳng yz là các đường liền nét trên hình. Do đó nếu hai sợi dây được thay thế bằng một viên nam châm vĩnh cửu hình trụ với hai mặt bên ($+z$ và $-z$) trùng với các mặt đẳng thế thì có thể nhận được các đường sức từ tương tự, bởi vì đối với một nam châm sắt có $\mu \rightarrow \infty$ các đường sức từ gần như vuông góc với các bề mặt của các cực nam châm.

Sử dụng thêm ý tưởng về các từ tích ta sẽ có

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2 \phi_m = \rho_m,$$



Hình 2.78

trong đó ρ_m là mật độ từ tích. Khi đó áp dụng định lý Diver ta có:

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{H} dV = q_m$$

ở đây q_m là từ tích được bao quanh bởi mặt S , cho thấy rằng $\mathbf{H}$ tương tự như $\mathbf{D}$ trong tĩnh điện. Áp dụng tích phân đối với một hình trụ đều ta có

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \lambda_m,$$

trong đó C là chu vi của tiết diện hình trụ và λ_m là từ tích trên một đơn vị chiều dài. So sánh với định luật Ampe về lưu số $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ ta có sự tương đương giữa hai đại lượng

$$I \leftrightarrow \lambda_m$$

Tiếp tục phân tích thêm sự giống nhau giữa điện trường và từ trường, ta giả sử rằng một ống kim loại có tiết diện tương-tự được sử dụng thay thế cho viên nam châm hình trụ với các điện tích $\pm \lambda$ trên một đơn vị chiều dài các mặt bên $\pm z$. Khi đó, một sự phân bố trường tĩnh điện sẽ được tạo ra tương tự như các đường sức của $\mathbf{B}$ ở trên. Với sự thay thế $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$, $I \rightarrow \lambda$, các biểu thức trong các phần (a) và (b) vẫn còn có hiệu lực.

(d) Tương tự, phương trình (1) cho

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Với $a = z = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $E_z = 8 \times 10^5 \text{ V/m}$, ta có:

$$q = 8,90 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Hiệu điện thế giữa hai mặt bên hình trụ chứa các điện tích trái dấu q trên một đơn vị chiều dài là

$$\Delta V = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{z}{a}\right) \Big|_{z_1}^{z_2} = 2,7 \times 10^3 \text{ V}$$

với $z_1 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$, $z_2 = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$.

2107

Trong một phép đo e/m cho electron người ta sử dụng một dụng cụ loại Thomson, nghĩa là cho electron đi qua điện trường và từ trường trong ống tia catốt, chú ý rằng nếu hiệu điện thế gia tốc đủ lớn thì tỉ số e/m trở thành một nửa của giá trị đã được công nhận. Lấy $e/m_0 = 1,8 \times 10^{11} \text{ C/kg}$.

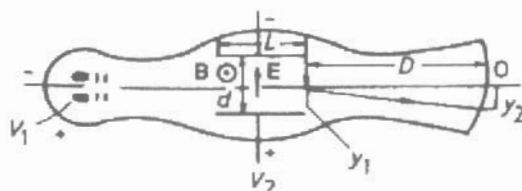
(a) Hãy vẽ phác dụng cụ đã được sử dụng và giải thích ngắn gọn sự hoạt động của nó.

(b) Hãy tìm hiệu điện thế gia tốc V để e/m chỉ còn bằng một nửa giá trị được công nhận của nó. Lấy $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

(a) Dụng cụ loại Thomson được thấy trên hình 2.79, trong đó V_1 là hiệu điện thế gia tốc và V_2 là hiệu điện thế làm lệch hướng.



Hình 2.79

Với từ trường B được đặt thêm vào như trên hình, trường điện từ có tác dụng như một bộ lọc tốc độ. Với các giá trị đã cho của V_1 và V_2 , ta điều chỉnh độ lớn của B sao cho các electron đập vào tâm O của màn hình. Tại thời điểm này tốc độ của electron là $v = E/B$ (vì $eE = evB$). Sau đây từ trường B được ngắt đi và người ta đo được độ dịch lệch y_2 của các electron trên màn hình. Tỉ

số e/m được tính như sau

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{eE}{m} \left(\frac{L}{v} \right)^2,$$

$$y_2 = \frac{D + \frac{L}{2}}{L/2} y_1 = \frac{eE}{mv^2} \left(\frac{L^2}{2} + LD \right) = \frac{e}{m} \cdot \frac{dB^2}{V_2} \left(\frac{L^2}{2} + LD \right),$$

Suy ra

$$e/m = \frac{V_2 y_2}{dB^2 \left(\frac{L^2}{2} + LD \right)}.$$

(b) Khi hiệu điện thế gia tốc rất lớn, các hiệu ứng tương đối tính phải được xét đến. Từ sự bảo toàn năng lượng ta có

$$eV_1 + m_0 c^2 = mc^2,$$

Từ đó chúng ta tìm được

$$V_1 = \left(\frac{m}{e} - \frac{m_0}{e} \right) c^2.$$

Vì $\frac{e}{m} = \frac{1}{2} \frac{e}{m_0}$, hiệu điện thế gia tốc là

$$V_1 = \frac{m_0 c^2}{e} = \frac{9 \times 10^{16}}{1,8 \times 10^{11}} = 5 \times 10^5 \text{ V}.$$

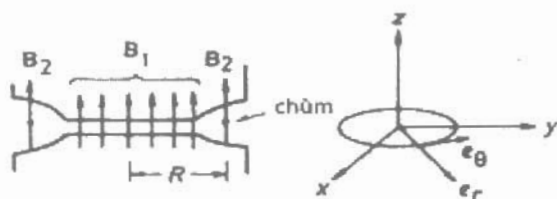
2108

Máy Bétatron tăng tốc các hạt nhờ suất điện động được cảm ứng gây bởi một từ trường tăng bên trong quỹ đạo hạt. Lấy $\bar{B}_1$ là từ trường trung bình trong quỹ đạo hạt có bán kính R và lấy B_2 là từ trường tại quỹ đạo (xem H. 2.80).

(a) Tìm mối quan hệ như giữa $\bar{B}_1$ và B_2 để hạt vẫn còn được giữ trên quỹ đạo tại bán kính R không phụ thuộc vào năng lượng của nó.

(b) Mối quan hệ trên có còn đúng tại các năng lượng tương đối tính hay không? Hãy giải thích.

(MIT)



Hình 2.80

Lời giải:

(a) Giả thiết rằng từ trường được định hướng theo trục \$z\$, nghĩa là \$\mathbf{B}_2 = B_2 \mathbf{e}_z\$. Từ \$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\$ mà \$\frac{\partial B}{\partial t} > 0\$, chúng ta thấy rằng điện trường dọc theo hướng \$-\mathbf{e}_\theta\$ và có đối xứng trục. Khi đó từ

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}$$

ta có

$$2\pi R E = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}.$$

Từ trường trung bình là

$$\bar{B}_1 = \frac{\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}}{\pi R^2}.$$

Do đó

$$E = - \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}_1}{dt}.$$

Nếu hiệu ứng của bức xạ tắt dần có thể bỏ qua, phương trình chuyển động của hạt được viết như sau

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2.$$

Trong hệ toạ độ trụ phương trình này tương đương với hai phương trình

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= qvB_2 && \text{theo } \mathbf{e}_r \text{ hướng,} \\ \frac{d(mv)}{dt} &= -qE - \frac{qR}{2} \frac{d\bar{B}_1}{dt} && \text{theo } \mathbf{e}_\theta \text{ hướng.} \end{aligned}$$

Phương trình cuối cùng có thể tích phân để cho \$mv = \frac{1}{2}qR\bar{B}_1\$ với giả thiết \$v = 0, B_1 = 0\$ tại \$t = 0\$. Do đó, \$B_2 = \frac{mv}{Rq}, \bar{B}_1 = \frac{2mv}{Rq}\$. Tức là cần phải có \$B_2 = \bar{B}_1/2\$.

(b) Đối với trường hợp tương đối tính, phương trình chuyển động của hạt là

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Bằng cách phân tích tương tự, ta một lần nữa ta lại nhận được hệ thức $B_2 = B_1/2$.

2109

(a) Hãy tính vectơ phân cực điện $\mathbf{P}$ và mật độ điện tích liên kết mặt cũng như mật độ điện tích liên kết khối trong một hình trụ cách điện dài, quay với tốc độ góc ω quanh trục của nó trong một từ trường đều $\mathbf{B}$ song song với trục.

(b) Một cuộn xôlênôit dạng hình xuyến có các kích thước $R = 1$ mét, đường kính của vòng dây = 10 cm và số vòng cuộn là = 1000. Nếu một dòng điện 10 Ampe chạy qua dây dẫn, hãy xác định độ lớn và hướng của lực tác dụng lên một vòng dây?

(c) Hãy tìm áp suất bức xạ trên một cái gương ở cách xa một bóng đèn 70 W là 1 m. Giả thiết rằng bức xạ tới vuông góc.

(d) Một sóng điện từ phẳng đi tới một vật dẫn hoàn hảo (siêu dẫn) theo hướng vuông góc. Hãy tìm các trường phản xạ $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$, mật độ điện tích mặt và mật độ dòng mặt qua các trường đi đến vật dẫn.

(e) Hai điện tích q và $-q$ được đưa từ vô hạn đến một vị trí cách một mặt phẳng dẫn điện một khoảng cách d và cách nhau một khoảng cách r . Hãy tìm công do một ngoại lực thực hiện trong quá trình làm dịch chuyển các điện tích. Hãy cho biết cả độ lớn và dấu.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Phương trình cơ bản đối với điện trường trong một môi trường điện môi chuyển động với vận tốc $\mathbf{v}$ trong một từ trường $\mathbf{B}$ là

$$\mathbf{D} = k\varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0(k-1)\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

trong đó k là hằng số điện môi tương đối của nó. Đối với một điểm cách trục quay một khoảng cách r , $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ và $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\omega \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\omega = \omega B r$ khi $\mathbf{r}$ vuông góc với $\mathbf{B}$. Vì không có các điện tích tự do, theo định lý Gauss

$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ suy ra $\mathbf{D} = 0$. Khi đó từ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, ta nhận được

$$\mathbf{P} = -\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B \mathbf{r}.$$

Do đó mật độ điện tích liên kết khối là

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r) = -2\varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B$$

và mật độ điện tích liên kết mặt là

$$\sigma' = P_r = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \omega B a,$$

vì $r = a$ đối với bề mặt hình trụ.

(b) Do đối xứng và sử dụng định luật Ampe về lưu số ta nhận được cảm ứng từ trong một xôlênôit có dạng hình xuyên như sau

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r},$$

trong đó r là khoảng cách từ tâm của hình xuyên. Xét một phần nhỏ có chiều dài dl của xôlênôit. Phần này chứa $\frac{N}{2\pi R} dl$ vòng dây, với R là bán kính của hình xuyên. Coi một đoạn của phần này như một phần tử dòng điện, nó tương với một góc $d\theta$ tại trục của xôlênôit

$$\Delta I = \frac{N I dl}{2\pi R} \rho d\theta,$$

trong đó θ là góc tạo bởi bán kính từ trục đến đoạn đó và đường từ trục đến tâm của hình xuyên, ρ là bán kính của một vòng dây. Lực từ tác dụng lên phần tử dòng điện đó có hướng theo bán kính và có độ lớn

$$\begin{aligned} dF &= \Delta I \cdot \frac{B}{2} = \frac{N I \rho}{4\pi R} B d\theta dl \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 \rho}{8\pi^2 R r} d\theta dl, \end{aligned}$$

ở đây $B/2$ đã được sử dụng thay thế cho B , bởi vì từ trường đã được tạo ra bởi chính phần tử dòng điện đó sẽ phải bị loại ra khỏi từ trường toàn phần. Chú ý rằng dF vuông góc với bề mặt của xôlênôit và chỉ có thành phần $dF \cdot \cos \theta$

của nó nằm dọc theo đường thẳng từ trục đến tâm của hình xuyến là không triệt tiêu với một phần tử khác tại $2\pi - \theta$. Vì

$$r = R + \rho \cos \theta,$$

ta có lực toàn phần tác dụng lên trên hình xuyến là

$$\begin{aligned} F &= \int \cos \theta dF \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 R} \int_0^{2\pi R} dl \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \theta}{R + \rho \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{R}{R + \rho \cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(1 + \frac{\rho}{R} \cos \theta \right)^{-1} \right] d\theta \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 10^2}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 0,05^2}} \right] \\ &= -0,079 \text{ N} \end{aligned}$$

Do đó, lực tác dụng lên một vòng dây là

$$\frac{F}{N} = -\frac{0,079}{1000} = -7,9 \times 10^{-5} \text{ N}$$

và hướng về tâm của hình xuyến.

(c) Động lượng của trường điện từ đi đến gương trên một đơn vị thời gian và trên một đơn vị diện tích là $\frac{W}{4\pi d^2 c}$, với W là công suất của bóng đèn và d là khoảng cách từ bóng đèn đến gương. Giả thiết rằng gương phản xạ một cách hoàn toàn. Độ biến thiên của động lượng xảy ra trên gương trong một đơn vị thời gian và một đơn vị diện tích chính là áp suất

$$p = \frac{2W}{4\pi d^2 c} = \frac{2 \times 70}{4\pi \times 1^2 \times 3 \times 10^8} = 3,7 \times 10^{-8} \text{ N/m}^2.$$

(d) Gọi $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{B}_0$ là các vectơ điện từ trường đi đến, $\mathbf{E}'$ và $\mathbf{B}'$ là các trường phản xạ. Áp dụng hệ thức biên $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$ đối với bề mặt của vật dẫn, ta nhận được $\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0 = 0$, hay $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}_0$, vì cả $\mathbf{E}_0$ và $\mathbf{E}'$ đều là tiếp tuyến đối với biên. Đối với một sóng điện từ phẳng ta có

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' = \frac{1}{\omega} (-\mathbf{k}_0) \times (-\mathbf{E}_0) = \mathbf{B}_0.$$

Đối với vật dẫn, mật độ điện tích mặt $\sigma = 0$ và mật độ dòng điện mặt là

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}' + \mathbf{H}_0) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 = -2(\mathbf{k}_0 \times \mathbf{H})/k_0 \\ &= 2\varepsilon_0\omega_0\mathbf{E}_0/k_0 = 2\varepsilon_0c\mathbf{E}_0. \end{aligned}$$

(e) Công do ngoại lực thực hiện có thể xét theo ba bước:

1. Điện tích điểm q được mang từ vô cực đến khoảng cách d tính từ mặt phẳng dẫn điện. Khi khoảng cách giữa q và mặt phẳng dẫn điện là z , lực (hút) trên q được tính bằng phương pháp ảnh là

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2z)^2}.$$

Trong bước này, ngoại lực thực hiện một công

$$W_1 = -\int_{\infty}^d F dz = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}.$$

Lưu ý dấu trừ trước dấu tích phân là vì F và dz là ngược hướng.

2. Điện tích điểm $-q$ được mang từ vô cực đến khoảng cách d tính từ mặt phẳng dẫn điện nhưng ở xa điện tích q . Công do ngoại lực thực hiện trong quá trình này giống hệt như trong bước 1

$$W_2 = W_1 = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}.$$

3. Điện tích $-q$ được chuyển dịch đến q một khoảng cách r trong khi phải giữ khoảng cách của nó đối với mặt phẳng dẫn điện không đổi là d . Khi điện tích $-q$ cách điện tích q một khoảng x , thành phần nằm ngang của lực (hút) tác dụng lên $-q$ được tính bằng phương pháp ảnh là

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + 4d^2)^{3/2}}.$$

Trong bước này công do ngoại lực thực hiện là

$$\begin{aligned} W_3 &= -\int_{\infty}^r F dx = \int_{\infty}^r \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx - \int_{\infty}^r \frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + 4d^2)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + 4d^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Do đó tổng công thực hiện bởi ngoại lực là

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \\ = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{(r^2 + 4d^2)^{1/2}} \right].$$

Ta cũng có thể giải bài tập này bằng cách xét năng lượng tĩnh điện của hệ. Điện thế tại vị trí của q là

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} \right)$$

và điện thế tại vị trí của $-q$ là

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} \right),$$

ở đây một lần nữa ta đã sử dụng phương pháp ảnh. Năng lượng tĩnh điện của hệ được tính bởi công thức $W_e = \frac{1}{2} \Sigma q\varphi$. Lấy điện thế trên mặt phẳng dẫn điện bằng 0, ta tìm được công thực hiện bởi ngoại lực là

$$W = W_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4d^2}} \right).$$

2110

Một đầu dò Hall với kích thước như được cho trên hình 2.81 có độ dẫn σ và chứa mật độ điện tích ρ . Đầu dò được đặt trong một từ trường B chưa biết có hướng $+y$. Một điện thế bên ngoài V_{ext} được đặt vào hai đầu sinh ra một điện trường theo hướng $+z$. Có thể quan sát được hiệu điện thế Hall V_{Hall} cân bằng ở giữa hai đầu nào? Hãy tìm một biểu thức của B qua V_{Hall} , V_{ext} , σ , ρ và các kích thước của mũi dò.

(Wisconsin)

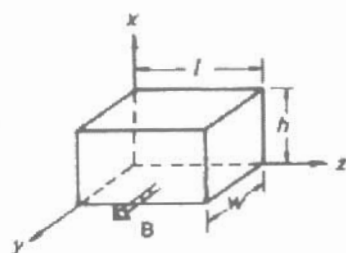
Lời giải:

Hiệu điện thế Hall xuất hiện ở giữa các mặt phẳng $x = 0$ và $x = h$. Đối với trạng thái cân bằng ta có

$$qE_{\text{Hall}} = qBv.$$

Vì

$$E_{\text{Hall}} = \frac{V_{\text{Hall}}}{h}, \quad v = \frac{j}{\rho} = \frac{\sigma E_{\text{ext}}}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{V_{\text{ext}}}{l},$$



Hình 2.81

nên các phương trình trên cho

$$\frac{V_{\text{Hall}}}{h} = B \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{V_{\text{ext}}}{l},$$

hay

$$B = \frac{V_{\text{Hall}}}{V_{\text{ext}}} \cdot \frac{\rho l}{\sigma h}.$$

2111

Một từ trường đều được đặt vuông góc với dòng điện trong một vật dẫn như thấy trên hình 2.82. Lực Lorentz tác dụng lên các hạt tải tích điện sẽ làm lệch hướng các hạt tải qua mẫu để tạo ra một điện thế, gọi là hiệu điện thế Hall, vuông góc với cả hướng của dòng điện I_y và từ trường B_z . Như vậy điện trường toàn phần có thể được biểu thị như sau

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + R_H \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

trong đó R_H là hệ số, σ là độ dẫn điện và $\mathbf{j}$ là mật độ dòng điện.

(a) Đối với trường hợp một loại hạt tải, hãy chứng minh rằng R_H cho dấu của điện tích hạt tải và mật độ hạt tải.

(b) Mô tả phương pháp thí nghiệm để xác định R_H đối với một mẫu ở nhiệt độ phòng. Dựa trên cơ sở hình 2.82, hãy vẽ sơ đồ thí nghiệm chỉ rõ cách mắc dây và tất cả các điểm tiếp xúc với mẫu, bao gồm mạch điện và các thiết bị đo để xác định chính xác hiệu điện thế Hall (độ lớn và sự phân cực của nó).

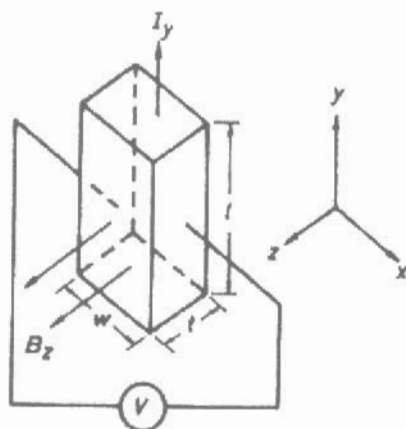
(c) Chuẩn bị một bảng có tất cả các thông số sẽ cần phải đo với từ trường B đóng hoặc mở. Nêu rõ các đơn vị của từng thông số được đo.

(d) Làm thế nào bù trừ được bằng thực nghiệm các hiệu ứng chỉnh lưu có thể tồn tại ở các điểm tiếp xúc điện với mẫu?

(e) Một mẫu (bán dẫn) được phát hiện thấy R_H có giá trị âm ở nhiệt độ phòng. Mô tả các hạt tải tích điện.

(f) Tại nhiệt độ nitơ lỏng R_H của mẫu này đảo ngược thành giá trị dương. Bạn giải thích kết quả đó như thế nào đối với nhiệt độ phòng và nhiệt độ thấp với những giả thiết đơn giản hoá là (1) tất cả các hạt tải tích điện cùng loại có cùng tốc độ trôi và (2) bỏ qua một thực tế là đa số chất bán dẫn có hai vùng riêng biệt chồng lên nhau?

(Chicago)



Hình 2.82

Lời giải:

(a) Gọi diện tích của một hạt tải là q và tốc độ trôi là $\mathbf{v}$, khi đó trong trạng thái cân bằng

$$q\mathbf{E}_\perp + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

Vì $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$, với n là mật độ hạt tải, ta có

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{qn}\mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Nhưng ta cũng có

$$\mathbf{E}_\perp = R_H \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

do đó

$$R_H = -\frac{1}{qn}.$$

Như vậy R_H cho biết dấu của hạt tải và mật độ điện tích của các hạt tải.

(b) Một sơ đồ thí nghiệm để xác định R_H được cho trên hình 2.82. Độ lớn và phân cực của hiệu điện thế Hall V có thể đo được bằng cách sử dụng một vôn kế với điện trở trong lớn. Điện trường Hall là $E_{\perp} = V/w$. Theo đó

$$R_H = \frac{E_{\perp}}{jB_z} = \frac{Vt}{j\omega t B_z} = \frac{Vt}{I_y B_z}.$$

I_y có thể đo được bằng một ampe kế, B_z có thể xác định được bằng cách dùng một mẫu có hệ số Hall đã biết trước.

(c) Tất cả các thông số cần phải đo được liệt kê ở dưới đây

Thông số: B_z I_y t V

Đơn vị: T A m V

(d) Lặp lại thí nghiệm đối với hai cặp I_y và B_z khác. Ta có

$$R_H = \frac{(V_1 - V_0)t}{I_{y1} B_{z1}} = \frac{(V_2 - V_0)t}{I_{y2} B_{z2}},$$

trong đó V_0 là hiệu điện thế tiếp xúc gây ra bởi các hiệu ứng chỉnh lưu và có thể xác định từ các biểu thức trên là

$$V_0 = \frac{V_2 I_{y1} B_{z1} - V_1 I_{y2} B_{z2}}{I_{y1} B_{z1} - I_{y2} B_{z2}}.$$

Một khi V_0 đã được xác định, nó có thể sẽ được bù trừ.

(e) Vì R_H có giá trị âm, các hạt tải của mẫu có điện tích dương. Do đó mẫu là bán dẫn loại p.

(f) Tại nhiệt độ nito lỏng nồng độ của các lỗ trống có quan hệ với các nguyên tử chính giảm đi chủ yếu là do các electron và lỗ trống thuần. Nồng độ của các electron và lỗ trống thuần bằng nhau, nhưng vì độ linh động của electron lớn hơn nên hiệu ứng Hall của chúng vượt quá hiệu ứng Hall của các lỗ trống. Kết quả là R_H của mẫu chuyển dấu thành dương.

2112

Hiệu ứng Hall có liên quan với:

(a) sự lệch của các đường đẳng thế trong một vật liệu mang dòng điện ở trong từ trường.

(b) sự quay mặt phẳng phân cực của ánh sáng đi qua một vật rắn trong suốt.

(c) điện tích không gian trong dòng electron ở trong chân không.

(CCT)

Lời giải:

Câu trả lời là (a).

2113

(a) Chứng minh rằng trong một plasma dừng có độ dẫn ohmic σ và độ từ thẩm $\mu = 1$, từ trường $\mathbf{B}$ thoả mãn phương trình sau

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D \nabla^2 \mathbf{B},$$

trong đó $D = c^2/4\pi\sigma$.

(b) Nếu plasma ở trong trạng thái chuyển động với tốc độ $\mathbf{v}$, hãy chứng minh rằng phương trình trên được thay thế bằng

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + D \nabla^2 \mathbf{B}.$$

(c) Tại $t = 0$ một plasma ở trạng thái dừng chứa một từ trường

$$\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_z,$$

$$B(x) = \begin{cases} B_0, & |x| < L \\ 0, & |x| > L, \end{cases}$$

trong đó B_0 là một hằng số. Hãy xác định sự phụ thuộc thời gian của từ trường với giả thiết rằng plasma vẫn ở trạng thái dừng.

(d) Độ dẫn trung bình của trái đất xấp xỉ bằng độ dẫn của đồng, tức là $\sigma \sim 10^{15} \text{s}^{-1}$. Từ trường của trái đất có phải vẫn là từ trường nguyên thủy, đã

tồn tại từ khi tạo thành hệ mặt trời, khoảng 5×10^9 năm hay không?

(MIT)

Lời giải:

(a) Nếu một plasma ở trạng thái dừng và dòng điện dịch của nó có thể bỏ qua thì điện từ trường bên trong plasma thoả mãn các phương trình Maxwell sau (trong hệ đơn vị Gauss)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_f, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f,\end{aligned}$$

Và nếu plasma là điện trở thuần, ta cũng có thể viết định luật Ohm

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}.$$

Như vậy

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sigma \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

hay

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1)$$

với $D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$. Phương trình (1) là một phương trình khuếch tán.

(b) Nếu tốc độ của plasma không bằng 0, ta có

$$\mathbf{j}_f = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Trong phép gần đúng phi tương đối với $v \ll c$, sử dụng phương trình Maxwell ở trên, ta được

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Lấy rota của cả hai vế ta có

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2)$$

(c) Đối với một plasma ở trạng thái dừng từ trường được xác định bởi phương trình (1). Từ điều kiện ban đầu ta thấy rằng (1) có thể được quy về phương trình khuếch tán một chiều

$$\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x^2}.$$

Tách các biến số bằng đặt $B_z(x, t) = X(x)T(t)$, ta được

$$\frac{1}{DT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\omega^2$$

Phương trình này có nghiệm là

$$T(t) = A e^{-\omega^2 D t}, \quad X(x) = C e^{i \omega x}.$$

do đó

$$B_z(x, t, \omega) = A(\omega) e^{-\omega^2 D t} e^{i \omega x}.$$

Vì ω là bất kì, nên nghiệm tổng quát là

$$B_z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-\omega^2 D t} e^{i \omega x} d\omega.$$

Đối với $t = 0$, nghiệm trên quy về

$$B_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i \omega x} d\omega,$$

Và bằng phép biến đổi Fourier ta nhận được

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\xi) e^{-i \omega \xi} d\xi.$$

Do đó

$$B_z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\xi) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 D t} e^{i \omega (x - \xi)} d\omega \right] d\xi,$$

trong đó tích phân xác định bên trong ngoặc vuông có thể tính là,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 D t} e^{i \omega (x - \xi)} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{D t}} e^{-(x - \xi)^2 / 4 D t},$$

và $B(\xi)$ được cho bởi điều kiện ban đầu

$$B_z(\xi) = \begin{cases} B_0, & \text{với } |\xi| \leq L \\ 0, & \text{với } |\xi| > L. \end{cases}$$

Do đó, sự tiến hoá theo thời gian của từ trường được cho bởi phương trình

$$B_z(x, t) = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi. \quad (3)$$

(d) Không có khả năng từ trường trái đất vẫn là từ trường nguyên thủy đã tồn tại từ khi hình thành hệ mặt trời cách đây khoảng 5×10^9 năm trước, vì B_0 có thể biến mất nhanh chóng do khuếch tán. Một chứng minh bán định lượng được đưa ra dưới đây:

Vì độ dẫn của trái đất xấp xỉ là $\sigma \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$, nên hệ số khuếch tán của từ trường trái đất là

$$D = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \approx 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$$

và $Dt \approx 10^{22}$ đối với $t = 5 \times 10^9 \text{ năm} = 1,5 \times 10^{17} \text{ s}$. Kích thước dài của trái đất là $L \approx 10^9 \text{ cm}$. Như vậy, số mũ trong phương trình (3) gần đúng là

$$\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} \approx \frac{L^2}{4Dt} \sim 10^{-4},$$

Suy ra

$$e^{-(x-\xi)^2/4Dt} \approx 1$$

và

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \approx L.$$

do đó

$$B_z(x, t) = \frac{LB_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \approx 10^{-4} B_0.$$

Điều này cho thấy rằng từ trường của trái đất hiện tại chỉ còn bằng $10^{-4} B_0$ nếu nó phát sinh từ một từ trường nguyên thủy B_0 . Với từ trường trái đất hiện tại cỡ $\sim 1 \text{ Gs}$, từ trường nguyên thủy của trái đất đã có thể là $B_0 \sim 10^4 \text{ Gs}$. Giá trị này lớn hơn nhiều so với các từ trường trong plasma của các thiên thể khác nhau.

2114

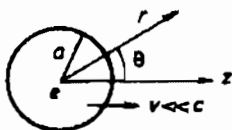
Mô hình của một êlectron bao gồm một vỏ có phân bố điện tích đồng đều trên bề mặt hình cầu bán kính a . Êlectron chuyển động với tốc độ $v \ll c$ (xem H. 2.83).

(a) E và B tại một điểm (r, θ) ngoài quả cầu là bao nhiêu?

(b) Hãy tìm giá trị của a sao cho động lượng toàn phần do trường sinh ra đúng bằng động lượng cơ học mv , v là tốc độ của electron.

(c) Sử dụng giá trị này của a để tính năng lượng trong trường của điện tích chuyển động và so sánh nó với năng lượng nghỉ và động năng.

(Wisconsin)



Hình 2.83

Lời giải:

(a) Trong hệ quy chiếu electron đứng yên Σ' , trường điện từ tại một điểm có vectơ bán kính $\mathbf{r}'$ tính từ điện tích đó (trong hệ đơn vị Gauss) là

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0.$$

Trong hệ phòng thí nghiệm Σ , bằng phép biến đổi Lorentz (với $v \ll c$), suy ra các trường là

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}' = \mathbf{E}', \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'. \end{aligned}$$

Điểm trường có tọa độ (r, θ) trong hệ quy chiếu Σ như thấy trong hình 2.83. Khi $v \ll c$, ta có $r' \approx r$ và

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3} \simeq \frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' \simeq \frac{e}{c} \cdot \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned}$$

với các độ lớn

$$E = \frac{e}{r^2}, \quad B = \frac{ev \sin \theta}{cr^2}.$$

(b) Mật độ động lượng của trường là

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{N}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Thay thế các biểu thức của $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ vào, ta được

$$\mathbf{g} = \frac{e^2}{4\pi c^2} \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^6} = \frac{e^2}{4\pi c^2 r^5} (\mathbf{v}r - v\mathbf{r} \cos \theta).$$

Do đó động lượng của trường điện từ của êlectron là:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \iiint_{\infty} \mathbf{g} dV = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^{\infty} dr \frac{e^2 v (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi c^2 r^4} r^2 \sin \theta \\ &= \frac{2e^2 v}{3c^2 a} \mathbf{e}_z = \frac{2e^2}{3c^2 a} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng trong biểu thức dưới dấu tích phân ở trên, thành phần của $\mathbf{g}$ vuông góc với $\mathbf{v}$ sẽ bị triệt tiêu khi lấy tích phân, chỉ có thành phần song song với $\mathbf{v}$ cần được xét đến.

Nếu động lượng trường điện từ của êlectron bằng động lượng cơ $m\mathbf{v}$ của nó, nghĩa là $\frac{2e^2}{3c^2 a} \mathbf{v} = m\mathbf{v}$, khi đó

$$a = \frac{2e^2}{3mc^2} = \frac{2}{3} \times 2,82 \times 10^{-5} \text{ \AA} = 1,88 \times 10^{-5} \text{ \AA}.$$

(c) Năng lượng của trường của êlectron là

$$\begin{aligned} W &= \iiint_{\infty} \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) dV = \iiint_{\infty} \frac{1}{8\pi} \left[\frac{e^2}{r^4} + \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{c^2 r^4} \right] dV \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_a^{\infty} r^2 \sin \theta \left[\frac{1 + \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}{r^4} \right] dr \\ &= \frac{e^2}{2a} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{3mc^2}{4} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} \right] = \frac{3}{4} mc^2 + \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned}$$

Suy ra đối với $v \ll c$, $\frac{1}{2}mv^2 \ll W \lesssim mc^2$.

Một chùm các nguyên tử Na (ở trạng thái cơ bản $^2S_{1/2}$) phân cực theo hướng $+x$ được phóng theo hướng z qua một vùng có từ trường theo hướng

$+y$. Mô tả dạng của chùm nguyên tử đó theo dòng chảy từ vùng từ trường (cả cấu trúc không gian và sự phân cực), giả thiết từ trường có gradient lớn theo hướng y .

(Wisconsin)

Lời giải:

Nguyên tử Na phân cực theo hướng $+x$ có xác suất là một nửa ở trạng thái riêng $S_y = +\frac{\hbar}{2}$ và một nửa ở trạng thái riêng $S_y = -\frac{\hbar}{2}$. Dưới tác dụng của từ trường $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ với $\frac{dB}{dy} > 0$, nguyên tử Na có $S_y = +\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $-y$, trong khi nguyên tử Na có $S_y = -\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $+y$. Như vậy, khi đi qua từ trường các nguyên tử Na sẽ tách thành hai chùm với các hướng phân cực là $-y$ và $+y$. (Vì $\Delta E = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{mc}(-S) \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{mc}S_y B$, và $\frac{dB}{dy} > 0$, các nguyên tử Na có $S_y = \frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $-y$ và các nguyên tử Na có $S_y = -\frac{\hbar}{2}$ sẽ bị lệch về hướng $+y$).

2116

Trong một hệ quy chiếu S có một trường điện từ đều

$$\mathbf{E} = 3A\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = 5A\mathbf{e}_z$$

(trong hệ đơn vị Gauss). Một ion có khối lượng nghỉ m_0 và điện tích q được thả ra từ trạng thái yên tại $(0, b, 0)$. Phải mất bao nhiêu thời gian ion này mới quay trở lại trục y ?

(SUNY, Buffalo)

Lời giải:

Phương trình lực Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right)$$

có các phương trình thành phần

$$\begin{cases} m_0\ddot{x} = 3Aq + \frac{5Aq}{c}\dot{y}, & (1) \\ m_0\ddot{y} = -\frac{5Aq}{c}\dot{x}, & (2) \\ m_0\ddot{z} = 0. & (3) \end{cases}$$

Lấy tích phân (3) và lưu ý rằng $z|_{t=0} = 0, \dot{z}|_{t=0} = 0$, ta có $z = 0$. Lấy tích phân (2) và sử dụng $x|_{t=0} = 0, \dot{y}|_{t=0} = 0$, ta tìm được

$$\dot{y} = -\frac{5Aq}{m_0c}x. \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta được

$$\ddot{x} + \left(\frac{5Aq}{m_0 c} \right)^2 \left(x - \frac{3m_0 c^2}{25Aq} \right) = 0.$$

Với $\dot{x}|_{t=0} = 0$ ta nhận được

$$x = \frac{3m_0 c^2}{25Aq} (1 - \cos \omega t),$$

trong đó

$$\omega = \frac{5Aq}{m_0 c}.$$

Lưu ý rằng $x = 0$ tại các thời điểm $t = \frac{2n\pi}{\omega}$. Lấy $n = 1$, khi đó

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_0 c}{5Aq}.$$

Đây là khoảng thời gian mà sau nó ion quay trở lại trục y .

2117

Một từ trường có thể chặn dòng điện trong một diôt. Xét một từ trường đều $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ lấp đầy khoảng trống giữa hai vật dẫn vô hạn trong mặt phẳng yz . Catốt được đặt tại $x = 0$ và anốt đặt tại $x = d$. Một điện thế dương V_0 được đặt vào anốt. Êlectron rời catốt với tốc độ ban đầu bằng 0 và mật độ điện tích của chúng gây ra điện trường không đều

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, 0, 0 \right).$$

(a) Dưới các điều kiện ở trạng thái dừng, những đại lượng nào của chuyển động êlectron là các hằng số?

(b) Hãy xác định cường độ từ trường cần thiết để làm cho các êlectron phản xạ trở lại trước khi chúng đạt đến anốt.

(MIT)

Lời giải:

Khi trọng lực được bỏ qua, chuyển động của các êlectron được diễn tả bằng các phương trình sau (giả thiết $v \ll c$)

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -e \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y B_0 \right), & (1) \\ m \frac{dv_y}{dt} = e v_x B_0, & (2) \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0. & (3) \end{cases}$$

(a) Lấy tích phân (3) ta có

$$\begin{aligned}v_z(t) &= v_z(t=0) = 0, \\z(t) &= z(t=0) = \text{const.}\end{aligned}$$

Do đó toạ độ và tốc độ của electron theo hướng z là không đổi, trường hợp đặc biệt là $v_z = 0$.

(b) Công thực hiện bởi điện trường làm dịch chuyển một electron từ catốt đến anốt là

$$W = \int_0^d -e \cdot \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = eV_0,$$

vì từ trường không sinh ra công. Khi electron đạt đến anốt, độ lớn của tốc độ $\mathbf{v}_f = v_{fx}\mathbf{i} + v_{fy}\mathbf{j}$ của nó sẽ nhận được bằng cách cho động năng của electron bằng công đã thực hiện bởi điện trường

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = eV_0,$$

suy ra

$$v_f = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}.$$

Nếu electron không thể đạt đến anốt, chúng ta cần

$$v_{fx} = 0, \quad v_{fy} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}.$$

Viết (2) như sau

$$m \frac{dv_y}{dt} = eB_0 \frac{dx}{dt}$$

và lấy tích phân cả hai vế, với lưu ý $v_y = 0, x = 0$, tại $t = 0$, ta nhận được

$$m \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = eB_0 d,$$

Suy ra

$$B_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}}.$$

Như vậy, cảm ứng từ phải lớn hơn nhiều so với $\sqrt{\frac{2mV_0}{ed^2}}$ để electron phản xạ trở lại trước khi đạt đến anốt.

2118

Các vi khuẩn đặc biệt có thể sống ở những nơi chẳng hấp dẫn tí nào ví dụ như dầu và nước thải của các nhà máy. Một vi khuẩn sống ở những nơi hoàn toàn tối và trong các bể mặt chất lỏng gần đồng nhất sẽ phải đối mặt với vấn đề định hướng rất nghiêm trọng mỗi khi phải ngoi lên lấy oxy và rồi ngụp xuống để lấy thức ăn cho phần bữa ăn quan trọng của nó. Có cách nào để giải quyết vấn đề này? Một nhóm các vi khuẩn đã giải quyết được vấn đề này bằng cách đưa một nam châm ô xít sắt vào bên trong tế bào của nó. Hãy bàn luận những câu hỏi sau một cách định lượng để làm sáng tỏ bản chất của các phép gần đúng thô cần thiết đã được sử dụng.

(a) Vì sao không sử dụng cảm nhận về gradient áp suất (độ chênh áp suất) trong chất lỏng thay cho việc sử dụng một nam châm?

(b) Hãy tính mômen từ tối thiểu có thể sử dụng để xếp thẳng hàng các vi khuẩn.

(c) Giả thiết cho chiều dài của kim nam châm là 10^{-4} , hãy tính đường kính tối thiểu của nó.

(d) Tại sao một nam châm hình kim tốt hơn một nam châm hình cầu?

(Princeton)

Lời giải:

(a) Gradient áp suất trong một chất lỏng (sức nổi) có thể làm cho một vi khuẩn ngoi lên hoặc ngụp xuống phụ thuộc vào trọng lượng riêng của nó so sánh với chất lỏng. Trái lại, một nam châm bên trong một vi khuẩn có thể làm cho một vi khuẩn ngoi lên hoặc ngụp xuống phụ thuộc vào sự định hướng tương đối giữa mômen từ và từ trường trái đất. Vì sự chuyển động nhiệt ngẫu nhiên (chuyển động Brown) sự định hướng tương đối này cũng thay đổi một cách ngẫu nhiên để một vi khuẩn có thể ngoi lên lấy oxy và ngụp xuống lấy thức ăn. Thực tế, các nam châm rất nhỏ đó của các vi khuẩn có thể xâu chuỗi với nhau tạo thành những nam châm lớn có mômen m . Trong từ trường trái đất không đều, lực làm cho một nam châm để ngoi lên hoặc ngụp xuống là

$$F_z = m \cdot \frac{\partial B}{\partial z},$$

trong đó B là cảm ứng từ của trái đất. Nếu chúng ta biểu thị chiều cao ở trên bề mặt đất là z , khi đó $\frac{\partial}{\partial z}|B|$ là âm khi nó đi lên. F_z có thể chỉ lên trên hoặc xuống dưới phụ thuộc vào sự định hướng của m đối với $\frac{\partial B}{\partial z}$.

(b) Trong hệ đơn vị Gauss năng lượng tương tác giữa hai lưỡng cực từ có

mômen m_1 và m_2 là

$$W = -\mathbf{m}_1 \cdot \left[\frac{\mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right]$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vectơ bán kính từ m_2 đến m_1 .

Đối với các nam châm bên trong hai vi khuẩn cạnh nhau sắp xếp sao cho đầu này gối đầu kia, $m_1 = m_2 = m$, $m_1 // m_2$, $r = d = 10^{-4}$ cm, và năng lượng tương tác là

$$W = \frac{2m^2}{d^3}.$$

Năng lượng chuyển động Brown của các vi khuẩn là $\sim kT$, với k là hằng số Boltzman và T là nhiệt độ tuyệt đối. Sự chuyển động này có xu hướng phá vỡ sự sắp xếp thẳng hàng của các vi khuẩn. Do đó để có sự sắp xếp thẳng hàng của các nam châm vi khuẩn, cần phải thoả mãn hệ thức

$$\frac{2m^2}{d^3} \gtrsim kT,$$

Từ đây suy ra mômen từ tối thiểu bên trong một vi khuẩn là

$$|m_{\min}| \gtrsim \sqrt{kTd^3}.$$

(c) Lấy r , M và d là bán kính tiết diện, độ từ hoá và chiều dài của một kim nam châm, khi đó mômen lưỡng cực từ của nó là

$$m = \pi r^2 d M.$$

kết hợp với kết quả trong câu (b), ta nhận được

$$r \gtrsim \left(\frac{\sqrt{kTd}}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lấy T là nhiệt độ phòng, $T \sim 300$ K. Độ từ hoá bão hoà của một nam châm sắt từ tại nhiệt độ này là $M \sim 1,7 \times 10^3$ Gs. Khi đó phương trình trên cho

$$r \simeq 0,6 \times 10^{-6} \text{ cm}.$$

(d) Nam châm dạng kim tốt hơn so với nam châm dạng cầu vì chúng có thể dễ dàng sắp xếp thành hàng hơn.

2119

Để làm một mô hình nhằm mô phỏng các tính chất điện động lực của một pulsar, ta xét một quả cầu bán kính R , quay giống như một vật thể rắn với tốc độ góc ω quanh một trục cố định. Do đó sự phân bố điện tích và dòng điện đối xứng đối với trục này (và đối với mặt phẳng trung gian vuông góc của pulsar). Điện tích toàn phần của quả cầu bằng 0. Trong chân không bên ngoài pulsar, từ trường là từ trường của một lưỡng cực từ m song song với trục quay. Từ trường bên trong pulsar phù hợp với từ trường bên ngoài, nhưng ở những nơi khác là bất kì.

(a) Độ lớn của các lực điện và từ tác dụng lên các hạt điện tích bên trong pulsar rất lớn so với tất cả các lực khác. Vì các hạt điện tích được giả thiết rằng cùng chung chuyển động quay với pulsar, suy ra một hệ thức gần đúng khá chính xác, đó là $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, với $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ là tốc độ cục bộ, tại khắp mọi nơi bên trong pulsar. Lợi dụng điều kiện này tại các điểm ngay ở bên trong bề mặt của pulsar, hãy chứng minh rằng tại tất cả những điểm này ta có

$$E_{\theta} = -\frac{\mu_0 m \omega \sin \theta \cos \theta}{2\pi R^2},$$

trong đó θ là góc cực đối với trục.

(b) Dựa vào kết quả trên hãy tìm điện thế tĩnh điện tại một điểm bất kì bên ngoài quả cầu.

(c) Hãy chứng minh rằng phương trình $\mathbf{E} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}$ là không đúng ở ngay tại bên ngoài pulsar.

(UC, Berkeley)

Lời giải:

(a) Như ta thấy trên hình 2.84, tại một điểm P bên trong bề mặt của quả cầu ($r \approx R$), từ trường sinh ra bởi lưỡng cực m là

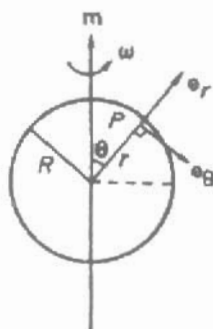
$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= B_r \mathbf{e}_r + B_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{m \cos \theta}{R^3} \mathbf{e}_r + \frac{m \sin \theta}{R^3} \mathbf{e}_{\theta} \right).\end{aligned}$$

Như vậy điện trường tại điểm P là

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}|_{r \approx R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{m \omega \sin^2 \theta}{R^2} \mathbf{e}_r - \frac{2m \omega \cos \theta \sin \theta}{R^2} \mathbf{e}_{\theta} \right),\end{aligned}$$

với thành phần θ

$$E_{\theta} = -\frac{\mu_0 m \omega \sin \theta \cos \theta}{2\pi R^2}.$$



Hình 2.84

(b) Lấy diện thể trên đường xích đạo làm mốc quy chiều, diện thể cảm ứng tại một điểm có vĩ độ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ là

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} E_{\theta} R d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\mu_0 m \omega \sin \theta d(\sin \theta)}{2\pi R} = \frac{\mu_0 m \omega \sin^2 \theta}{4\pi R} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\ &= \frac{\mu_0 m \omega}{4\pi R} (\cos^2 \alpha - 1) = \frac{B_P \omega R^2}{2} (\cos^2 \alpha - 1), \end{aligned}$$

trong đó $B_P = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$ là cảm ứng của lưỡng cực từ tại cực bắc.

(c) Phương trình $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ không còn đúng bên ngoài quả cầu. Nguyên nhân là như sau: Phương trình này được suy ra từ phép biến đổi của trường điện từ (với $v \ll c$),

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

trong đó $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$ là các trường tại một điểm ở ngay bên trong bề mặt của pulsar được đo bởi một người quan sát trong hệ quy chiếu đứng yên K cố định tại một ngôi sao ở xa, $\mathbf{E}'$ là điện trường được quan sát trong hệ quy chiếu chuyển động K' cố định với bề mặt của pulsar và $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ là tốc độ của K' đối với K . Bởi vì trong K' lớp bề mặt của pulsar tương đương với

một vật dẫn ở trạng thái dừng, $E' = 0$ (vì nếu không, $j' = \sigma E' \neq 0$, nghĩa là người quan sát trong K' có thể thấy một dòng điện). Như vậy chúng ta có $E = -v \times B = -(\omega \times R) \times B$. Nhưng tại các điểm ngay ở bên ngoài bề mặt của pulsar yêu cầu $E' = 0$ là không cần thiết. Mật độ điện tích trên bề mặt nói chung cũng không bằng 0 sao cho điều kiện biên không có thể cho $E' = 0$ tại các điểm ngay ở bên ngoài bề mặt. Do đó $E \neq -v \times B$ bên ngoài quả cầu.