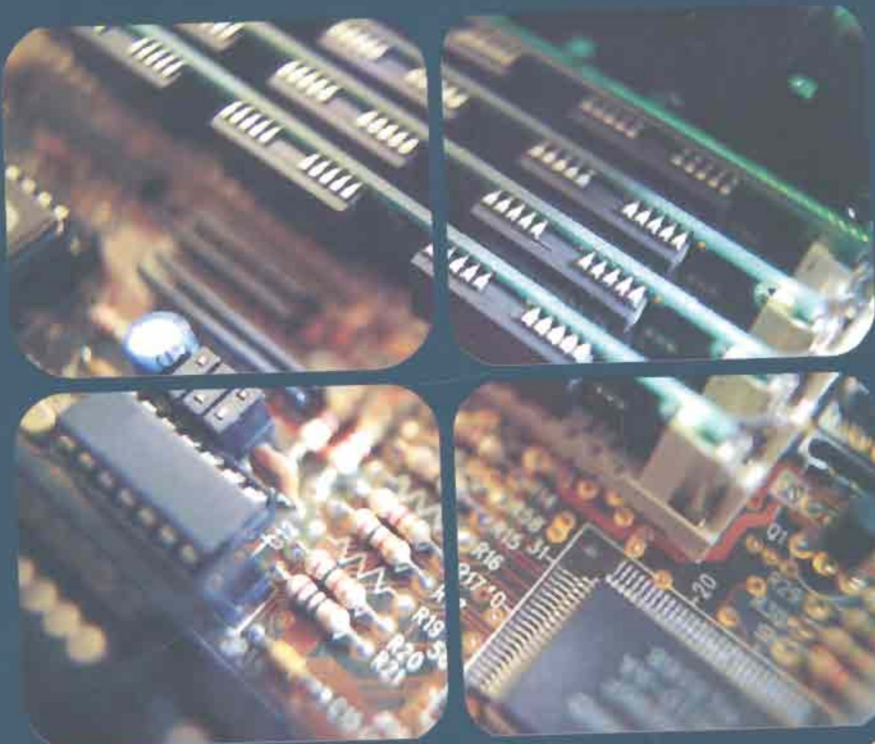
TS. TRƯƠNG HỮU CHÍ
TS. VÕ THỊ RY



CƠ ĐIỆN TỬ

HỆ THỐNG TRONG CHẾ TẠO MÁY

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TS. TRƯƠNG HỮU CHÍ
TS. VÕ THỊ RY

CƠ ĐIỆN TỬ

(Hệ thống- trong chế tạo máy)

(In lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
Hà Nội - 2005

Tác giả: TS. Trương Hữu Chí
TS.Võ Thị Ry

Chịu trách nhiệm xuất bản: *PGS.TS Tô Đặng Hải*
Biên tập và sửa chế bản: *Nguyễn Thị Diệu Thuý*
Trình bày và chế bản: *Lê Thụy Anh*
Vẽ hình *Phạm Văn Tước*
Vẽ bìa: QUỲNH CHÂU

In 700 cuốn khổ 16 x 24 tại Xí nghiệp in Thương mại.
Giấy phép xuất bản số: 150-41 Cục xuất bản cấp ngày 4/2/2005.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3/2005.

LỜI NÓI ĐẦU

Công nghệ kỹ thuật thông tin trong đó ngành ***cơ điện tử*** *có vị trí quan trọng cùng với công nghệ sinh học, công nghệ vật liệu mới, công nghệ tạo năng lượng mới, công nghệ môi trường và công nghệ hàng không vũ trụ là 06 cuộc cách mạng về công nghệ cao trong thế kỷ 21. Các công nghệ này sẽ tạo ra những ngành công nghiệp mới rất quan trọng bởi vì chúng tạo ra giá trị gia tăng rất lớn và làm cho các quốc gia sở hữu các ngành công nghệ mới này trở nên giàu có. Trong định hướng phát triển ngành* ***cơ điện tử*** *ở Việt Nam , việc đào tạo nguồn nhân lực đòi hỏi phải đi trước một bước. Với thành công ban đầu trong quá trình chuyển đổi từ một viện nghiên cứu cơ khí truyền thống sang nghiên cứu cơ điện tử, Viện Máy và Dụng cụ công nghiệp (IMI) đã xây dựng một chương trình khung để đào tạo đại học ngành cơ điện tử, đồng thời đào tạo lại các kỹ sư đã tốt nghiệp ngành cơ khí, điện, điện tử- tin học theo hướng cơ điện tử.*

Cùng với việc tái bản quyển " Cơ điện tử- các thành phần cơ bản" trong đầu năm 2005, nhóm tác giả xin giới thiệu với bạn đọc quyển " cơ điện tử- hệ thống trong chế tạo máy ". Đây là quyển sách thứ 2 nằm trong loạt tài liệu về cơ điện tử do chúng tôi- các cán bộ trong nhóm biên soạn giáo trình của bộ môn "cơ điện tử" của Viện IMI thực hiện. Chúng tôi quan niệm rằng nội dung quyển " cơ điện tử- hệ thống trong chế tạo máy" được bắt đầu từ các lí thuyết hệ thống (mô hình toán học, mô hình hệ thống, đáp ứng của hệ thống động học, các hàm truyền hệ thống, mô hình không gian trạng thái) và được kết thúc bởi việc phân tích hệ thống máy công cụ CNC sẽ giúp bạn đọc có được kiến thức về tính hệ thống đối với các sản phẩm cơ điện tử.

Do biên soạn lần đầu, đặc biệt nhiều thuật ngữ chưa được việt hoá nên không tránh khỏi sai sót. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn bạn đọc về những ý kiến đóng góp để tài liệu được hoàn chỉnh trong lần xuất bản sau.

Những ý kiến đóng góp xin gửi về: Viện Máy và Dụng cụ công nghiệp, 46 Láng Hạ, Đống Đa Hà nội

Các tác giả

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN

Sự khác nhau giữa cơ khí truyền thống và cơ điện tử có thể minh hoạ trong khi nghiên cứu chuyển động của một chất điểm trong không gian.Trong khi trong cơ khí truyền thống vấn đề nghiên cứu là chất điểm sẽ chuyển động như thế nào nếu tác động một lực cụ thể nào đó, thì câu hỏi đặt cho cơ điện tử lại là lực phải là như thế nào để khi tác động lên chất điểm, chất điểm sẽ thực hiện được một chuyển động theo yêu cầu.

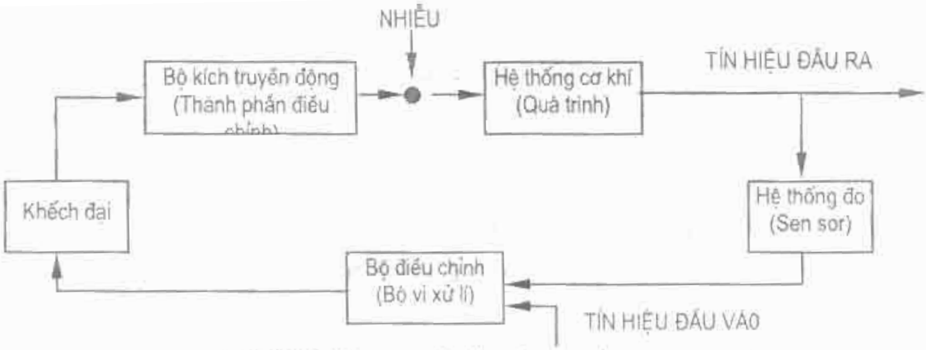
Để giải quyết bài toán của cơ truyền thống, có thể sử dụng hệ phương trình cân bằng động để giải quyết. Còn ở câu hỏi sau, có thể nhận thấy lực tác động ở trong trường hợp này không thể giữ bất biến, lực phải được tính toán và điều khiển để sao cho chất điểm có thể thực hiện được quỹ đạo cho trước. Đó là vấn đề của cơ điện tử. Với nhận thức: "Cơ điện tử là sự kết hợp đồng thời của kỹ thuật cơ khí, điều khiển điện tử và hệ thống tư duy trong thiết kế sản phẩm và quá trình sản xuất " (theo IRDAC) thì để giải quyết vấn đề của cơ điện tử, bên cạnh kiến thức cơ khí còn cần các kiến thức về lí thuyết hệ thống, bao gồm cả kỹ thuật điện-điện tử và thông tin.

1.1. SỰ TÍCH HỢP

Đặc trưng cơ bản của một hệ thống là sự tích hợp . Tích hợp này gồm có *tích hợp không gian và tích hợp chức năng*. Phụ thuộc vào cấu trúc tích hợp qua giải pháp ghép nối (interconection) mà hệ thống có thể là đơn giản hoặc phức tạp hơn. Các nối ghép này thường được kết hợp từ 3 cấu trúc cơ sở là: liên tiếp, song song hoặc cấu trúc có phản hồi (xem 5.4 "Mô hình không gian cho các hệ thống có nối kết")

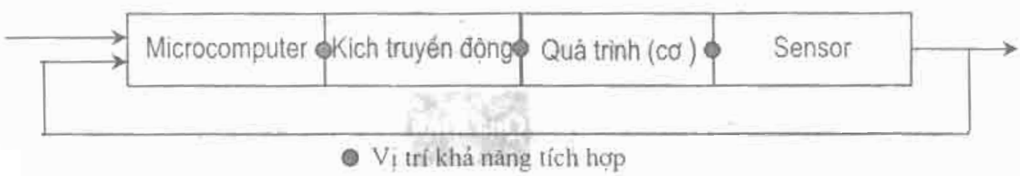
Tích hợp không gian

Tích hợp không gian là tích hợp các thành phần/ mô đun của hệ thống thông qua những giao diện kết nối thành phần. Kết cấu nguyên lí của một hệ thống cơ điện tử có thể được thể hiện như ở hình 1.1. Sự tích hợp ở đây có thể xảy ra giữa quá trình và sensor; giữa quá trình và hệ kích truyền động, trong khi máy tính có thể tích hợp với hệ kích truyền động, quá trình hoặc với sensor theo nhiệm vụ điều khiển của nó. Trong hệ thống này trước hết các đại lượng yêu cầu được đo và lưu lại. Trong đó nhiều đại lượng cho đến ngày nay vẫn chưa thể đo trực tiếp mà cần phải có sự chuyển đổi tín hiệu thông qua các loại cảm biến. Trong nhiều hệ thống, để có thể xử lí nhanh



Hình 1.1: Cấu trúc nguyên lí một hệ thống cơ điện tử

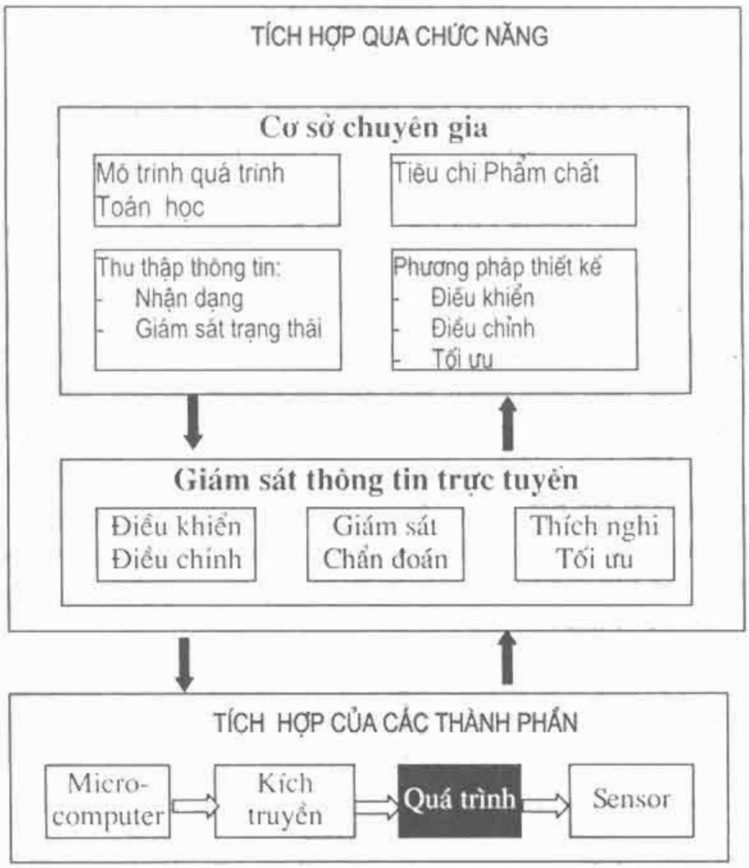
hơn, người ta có thể không dùng các đường cáp mà sử dụng các cảm biến và hệ xử lí dữ liệu cục bộ, tích hợp trong mối liên quan đến miền lân cận của các thành phần thiết bị. Điều đó cũng có nghĩa là ngày càng có yêu cầu tăng cường điều kiện môi trường của các thành phần điện tử và cảm biến ở các dạng như nhiệt độ, gia tốc, sự ô nhiễm.... Ngoài ra, các cơ cấu chấp hành cũng như các thành phần kích truyền động cũng có những nhu cầu mới, ví dụ, chúng có thể phải sở hữu một điều khiển vị trí số cục bộ. Trong nhiều trường hợp chúng tích hợp thích hợp với hệ thống cơ khí. Đôi khi các tín hiệu từ hệ kích truyền động qua xử lí thông tin được sử dụng cho quá trình cơ khí kết nối . Vì vậy sự tính toán thiết kế hệ kích truyền động và quá trình cơ khí đóng một vai trò hết sức cơ bản trong tất cả các hệ thống cơ điện tử – trong chế tạo máy. Khả năng tích hợp không gian của một hệ thống cơ điện tử có thể được thể hiện như ở hình 1.2. Tích hợp không gian thể hiện ở phần cứng vật lí của hệ thống cơ điện tử.



Hình 1.2: Tích hợp không gian của một hệ thống cơ điện tử

Tích hợp chức năng

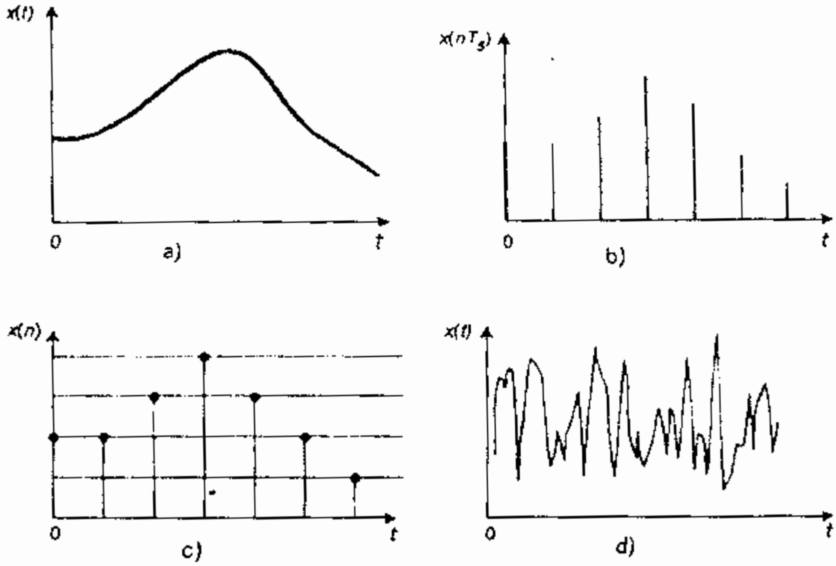
Tích hợp chức năng là tích hợp qua sự gia công xử lí thông tin. Trên cơ sở các đại lượng đo, được xử lí, lưu chuyển và thực hiện dưới dạng: điều chỉnh , giám sát, tối ưu, v..v. Điều này yêu cầu trong hệ thống có sự gia công thông tin trực tuyến (online), loại ngay từ khâu thiết kế hoặc để tương thích với nó cần thiết phải có những cơ sở chuyên gia, ví dụ, dưới dạng toán mô hình quá trình, phương pháp nhận dạng, quan sát các đại lượng trạng thái và các phương pháp thiết kế khác nhau kèm theo các tiêu chí đánh giá phẩm chất. Gia công thông tin trực tuyến trong mối quan hệ với hệ chuyên gia cho phép tích hợp chức năng của các hệ thống điện tử- cơ khí. Hệ thống tích hợp chức năng toàn bộ như vậy có thể được thể hiện như ở hình1.3. Sự tích hợp chức năng yêu cầu có những phần cứng thích hợp cùng với sự phát triển lắp đặt phần mềm.



Hình 1.3: Tích hợp chức năng

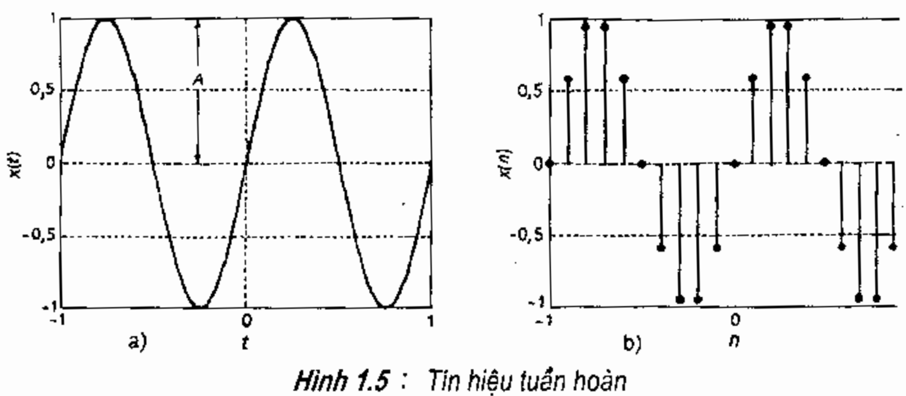
1.2. TÍN HIỆU

Tín hiệu là các biến vật lí hoặc là các đại lượng vật lí được đo ở tại các phần khác nhau của một hệ thống, khi được xử lí cho thông tin được quan tâm. Trong các hệ thống thực tế người ta thường gặp nhiều loại tín hiệu khác nhau. Trong đó tín hiệu điện, dòng điện hoặc điện áp là các đại lượng dễ đo nhất do vậy người ta thường sử dụng sensor và tranducer để chuyển các đại lượng vật lí thành các tín hiệu điện. Những tín hiệu này, sau đó được xử lí bởi các kỹ thuật phù hợp , thể hiện thông tin của một vị trí hoặc thành phần trong hệ thống hoặc thông tin của phần này liên quan đến phần kia của hệ thống (mối quan hệ I/O).



Hình 1.4 Các dạng tín hiệu

a)Tương tự b)Lấy mẫu c)Số d)Ngẫu nhiên



Hình 1.5 : Tín hiệu tuần hoàn

a)Tín hiệ liên tục b)Tín hiệu số

Tín hiệu liên tục hoặc gián đoạn

Tín hiệu có thể phân loại thành tín hiệu liên tục hoặc tín hiệu gián đoạn, trong mỗi loại này có thể phân tiếp thành tín hiệu xác định (deterministics signal) hoặc tín hiệu ngẫu nhiên (ramdom signal). Một tín hiệu xác định luôn có thể biểu diễn dưới dạng toán học (dạng bậc, dốc, xung, SIN, COS..), nhưng thời gian diễn ra tín hiệu hoặc giá trị tín hiệu ngẫu nhiên thì không thể dự báo chắc chắn được. Một tín hiệu liên tục, x(t) có một giá trị định rõ tại mỗi một giá trị thời gian, trong khi tín hiệu gián đoạn x(n) có giá trị định rõ chỉ ở tại những điểm rời rạc (là các số nguyên thuộc n). Tương ứng với tín hiệu liên tục và gián đoạn là tín hiệu tương tự (analog) và tín hiệu số (digital). Một số dạng tín hiệu (tín hiệu liên tục, tín hiệu lấy mẫu, tín hiệu số và tín hiệu ngẫu nhiên) được thể hiện ở hình 1.4.

Tín hiệu tương tự (analog) và tín hiệu số (digital)

Tín hiệu tương tự là tín hiệu mà biên độ của nó có thể lấy một giá trị bất kỳ trong một miền liên tục. Còn tín hiệu số là tín hiệu mà biên độ chỉ được xác định ở một số thời điểm cụ thể.

Các tín hiệu xác định có thể chia thành 2 loại: tín hiệu tuần hoàn (xem hình 1.5) và tín hiệu không tuần hoàn (như tín hiệu dao động hình sin giảm dần, các tín hiệu có tần số thay đổi biến điệu).

Tín hiệu thể hiện luồng thông tin qua hệ thống cũng là đại lượng thể hiện mối quan hệ giữa các thành phần trong hệ thống.

1.3. CÁC THÀNH PHẦN CHỦ YẾU CỦA HỆ THỐNG CƠ ĐIỆN TỬ

Trong [1], các thành phần cơ bản của hệ thống cơ điện tử đã được liệt kê và miêu tả. Sơ đồ ở hình 1.1 thể hiện các thành phần chủ yếu của một hệ thống cơ điện tử trong chế tạo máy. Hệ thống này được xác định bởi thành phần cơ thực hiện một số chuyển động cụ thể và phần điện tử (máy tính hoặc các hệ thống vi xử lí nhúng), bổ sung tính thông minh cho hệ thống. Trong thành phần cơ, công suất hệ thống luôn đóng một vai trò lớn, ngược lại với phần điện tử, xử lí thông tin mới là vấn đề chính. Các cảm biến chuyển đổi chuyển động cơ học thành các tín hiệu điện (nếu cần, có thể qua một bộ chuyển đổi tương tự-số (AD)). Các khuếch đại công suất sẽ chuyển đổi tín hiệu thành các công suất điều biến. Trong đa số các trường hợp nguồn cấp là nguồn điện, nhưng cũng có những trường hợp nguồn là hệ thống thuỷ lực hoặc khí nén.

1.4. SẢN PHẨM CƠ ĐIỆN TỬ

Tất cả các sản phẩm cơ điện tử đều mang tính hệ thống. Theo [9] , sản phẩm cơ điện tử hiện nay có thể phân loại theo:

1. Những sản phẩm với các thành phần chính là cơ có kết hợp điện tử để tăng cường chức năng như các máy công cụ điều khiển số hoặc các bộ truyền động có tốc độ vô cấp sử dụng trong các máy gia công.
2. Các hệ thống cơ truyền thống được thực hiện theo hướng kết hợp với các bộ phận điện tử bên trong , trong khi giao diện sử dụng giữ nguyên không thay đổi, ví dụ, các máy khâu hiện đại hoặc các hệ thống sản xuất tự động.
3. Các hệ thống giữ nguyên các chức năng của hệ thống cơ truyền thống , nhưng các cơ cấu bên trong được thay đổi bởi thành phần điện tử, ví dụ như đồng hồ điện tử, cân điện tử.
4. Các sản phẩm thiết kế với sự tích hợp đồng vận công nghệ cơ và điện tử, ví dụ như máy photocopy, máy giặt thông minh, v…v.

Các sản phẩm cơ điện tử có cấu trúc điều khiển theo các mức sau:

- Mức 1: điều khiển mức thấp (ví dụ cho tiến ăn dao, phản hồi có cản, ổn định hoá, tuyến tính hoá).
- Mức 2: điều khiển mức cao (điều khiển phản hồi cấp cao).
- Mức 3: giám sát, kể cả chẩn đoán lỗi.
- Mức 4:tối ưu hoá quá trình
- Mức 5: quản lí quá trình chung.

Dù đơn giản hoặc phức tạp hơn, thì đặc tính tích hợp của cơ điện tử là tạo cho các sản phẩm và hệ thống cơ điện tử phát triển hướng tới các đặc điểm:

- Sự phân chia chức năng giữa cơ và điện tử hướng về đơn giản phần cơ, đảm bảo kết cấu khoẻ, gọn nhẹ. Kết quả là có sự tăng đáng kể lượng sensor, kích truyền động, thiết bị điều khiển, cáp và các đầu nối điện trong sản phẩm.
- Các tính năng hoạt động được cải thiện: bằng ứng dụng điều khiển phản hồi tích cực, điều khiển thích nghi và điều khiển trên cơ sở mô hình.
- Các chức năng mới được bổ sung: đó là những chức năng mà chỉ có điện tử số mới thực hiện được như các biến phụ thuộc vào thời gian hoặc sự thích nghi của các tham số.

CHƯƠNG 2. MÔ HÌNH HỆ THỐNG CƠ ĐIỆN TỬ TRONG CHẾ TẠO MÁY

Trong lí thuyết hệ thống, mô hình đóng một vai trò quan trọng vì chúng rất cần cho việc phân tích, tổng hợp và thiết kế hệ thống. Một hệ thống không phải chỉ có một mô hình duy nhất vì các mục đích khác nhau có thể dẫn đến mô hình khác nhau. Ví dụ, đối với một động cơ điện, những mô hình có thể xây dựng theo mục đích có thể là: quá trình chuyển đổi năng lượng cơ-điện; hệ thống nhiệt hoặc hệ thống cơ khí để nghiên cứu dao động và vật liệu.

Ngoài ra, trong thiết kế các hệ thống cơ điện tử, việc thay đổi cấu trúc và bộ điều khiển luôn cần được đánh giá đồng thời. Mặc dù một bộ điều khiển phù hợp có thể tạo nên một kết cấu đơn giản hơn, thì một thiết kế tồi về cơ khí không bao giờ có thể tạo khả năng thực hiện chức năng tốt cho dù hệ thống có bộ điều khiển tinh vi. Vì vậy, quan trọng là ngay từ giai đoạn đầu thiết kế đã phải có sự lựa chọn thích hợp, đáp ứng các tính cơ khí cần thiết để đạt được sự hoạt động tốt của hệ thống được điều khiển. Mặc khác, khả năng bù của bộ điều khiển có thể tạo nên những kết cấu cơ khí rẻ hơn. Điều này biểu hiện rằng, tại những giai đoạn đầu của thiết kế, một mô hình đơn giản thể hiện các yếu tố cơ bản của hệ thống có thể cho biết các giới hạn khả năng hoạt động của hệ thống.

Mặc khác, trong thực tế có những hệ thống đang vận hành nhưng khi xảy ra sự cố hoặc lâu ngày cần điều chỉnh lại tham số , lúc đó người ta mới nghĩ đến việc cần xem xét lại việc phân tích hệ thống, nghĩa là phải đánh giá lại các chỉ tiêu chất lượng hệ thống. Muốn làm được việc này ta cần xác định được mô tả toán học của các thành phần trong hệ thống và thực hiện phân tích hệ thống. Như vậy mô hình hệ thống không những cần cho phân tích, tổng hợp và thiết kế hệ thống mà đặc biệt cần cho các trường hợp "lần tìm lỗi" sau này.

Như vậy khi bàn về hệ thống người ta thường nói đến mô hình hệ thống, tín hiệu qua hệ thống và đáp ứng của hệ thống .

2.1. MÔ HÌNH CÁC HỆ THỐNG CƠ BẢN

2.1.1. Mô hình toán học

Hãy xem xét trường hợp bộ xử lí điều khiển tốc độ một động cơ. Tốc độ động cơ sẽ thay đổi như thế nào đối với thời gian? Chắc chắn, tốc độ động cơ không đạt ngay được giá trị tốc độ đủ (tức giá trị thiết lập) mà chỉ đạt được sau một khoảng thời gian. Trong tất cả các trường hợp xử lí đều có hiện tượng "trễ". Vậy điều gì gây ra hiện tượng đó. Cần phải biết "thái độ" của hệ thống đối với thời gian khi hệ thống phải chịu một số "nhiễu"

Mô hình toán học là một trong những công cụ giúp để có thể hiểu "thái độ" của một hệ thống. Chúng là những công thức miêu tả mối quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của một hệ thống, sử dụng cho khả năng dự báo trước những đáp ứng có thể sinh ra trong hệ thống dưới những điều kiện cụ thể. Cơ sở của mọi mô hình toán học là các định luật vật lí chi phối "thái độ" của hệ thống.

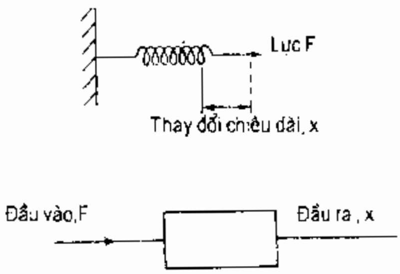
Tựa như một ngôi nhà, ô tô, cần cẩu,v...v. được xây dựng từ một số các khối đặc trưng cơ bản, một hệ thống cũng được cấu thành từ một dãy các khối đặc trưng. *Mỗi khối đặc trưng được coi là có một thuộc tính hoặc chức năng đơn.* Điều này có thể nhận xét qua các ví dụ đơn giản: một hệ thống mạch điện được cấu thành từ các khối đặc trưng, thể hiện tác động của các điện trở, tụ điện và các cuộn cảm. Khối đặc trưng điện trở được cho là chỉ có đặc tính "trở", khối đặc trưng tụ điện thì có đặc tính điện dung còn các khối đặc trưng điện cảm thì chỉ có thuộc tính về khả năng tự cảm. Khi kết hợp các khối đặc trưng này theo các cách khác nhau, sẽ hình thành các hệ thống mạch điện đa dạng mà mối quan hệ xuất / nhập của từng hệ thu được bởi cách kết hợp hợp lí mối quan hệ của các khối đặc trưng. Theo cach đó, có thể thu được mô hình toán học cho hệ thống. Một hệ thống được lập từ các khối đặc trưng nêu trên được gọi là hệ thống tham số gộp (lumped parameter system), vì mỗi một tham số (tức tính chất hoặc chức năng) được xem xét riêng biệt.

Có sự tương tự trong "hoạt động " của các khối đặc trưng sử dụng trong các hệ thống "kinh điển" cơ, điện, nhiệt và thuỷ-khí. Sau đây sẽ đề cập đến các khối đặc trưng cơ bản, có thể tổng hợp để tạo nên mô hình toán học cho các hệ thống vật lí thực .

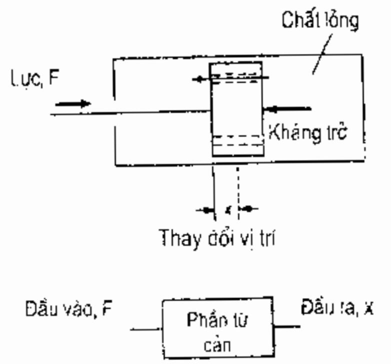
2.1.2. Các khối đặc trưng của một hệ thống cơ khí

Hệ thống tịnh tiến

Mô hình thể hiện các hệ thống cơ khí có các khối đặc trưng cơ bản là lò xo, phần tử cản hay còn gọi là giảm chấn (dashpot) và các khối lượng. *Lò xo* (hình 2.1) được sử dụng thể hiện độ cứng của hệ thống, *phần tử cản* thể hiện các lực chống chuyển động như các tác động ma sát hoặc các tác động giảm dao động còn *khối lượng* thể hiện quán tính hoặc kháng trở đối với gia tốc. Hệ thống cơ thực không nhất thiết phải hình thành từ lò xo, giảm chấn và khối lượng nhưng lại luôn có tính chất về độ cứng, độ cản (giảm chấn) và quán tính. Các khối đặc trưng này có thể coi như có *đầu vào* là *một lực*, *đầu ra* là một *chuyển vị*.



Hình 2.1: Lò xo



Hình 2.2: Phần tử cản

Độ cứng của một lò xo được miêu tả bằng mối quan hệ giữa lực F, sử dụng để làm căng hoặc nén lò xo và lượng x dãn/nén lò xo:

$$F=k.x \qquad (2.1)$$

Trong đó k là hằng số.

Để có cùng lượng kéo nén, khi k càng lớn, lực để kéo hoặc nén lò xo càng phải lớn. Lò xo có k cao hơn gọi là có độ cứng cao hơn. Đối tượng tạo lực để kéo lò xo cũng bị tác động bởi một lực (theo định luật 3 của Niuton). Lực này có giá trị bằng lực kéo lò xo (tức kx) nhưng có hướng ngược lại.

Khối đặc trưng *phần tử cản* (dashpot) được thể hiện bằng lực cản phổ biến nhất là ma sát nhớt và ma sát khô. Ma sát xuất hiện khi một vật thể được cố đẩy trong một dòng chất lỏng hoặc dịch chuyển vật ngược lại với các lực ma sát. Vật được đẩy nhanh hơn đồng nghĩa với việc phải chịu lực cản cao hơn. Phần tử cản được sử dụng để biểu diễn các lực này , loại làm chuyển động của các đối tượng chậm dần, giống như chuyển động của piston trong một xilanh đóng (hình 2.2). Sự chuyển dịch của piston buộc chất lỏng ở mặt bên kia phải chảy qua piston, theo chiều ngược lại, tạo một lực cản. Trong trường hợp lí tưởng, lực cản F là tỉ lệ với tốc độ v của piston:

$$F=cv \qquad (2.2)$$

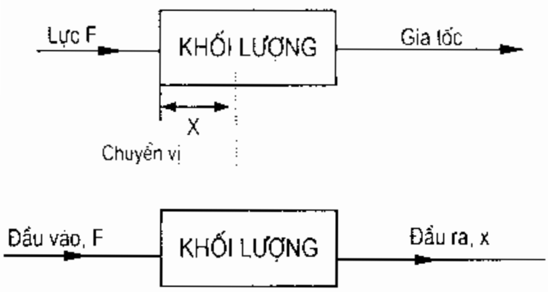
Trong đó c là hằng số. c càng lớn thì lực cản tại một tốc độ cho trước càng lớn. Do tốc độ tỉ lệ với sự thay đổi chuyển dịch x của piston, tức $v=dx/dt$, nên:

$$F = c\frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$

Đó là mối quan hệ giữa chuyển dịch x của piston- *đầu ra* và lực F - *đầu vào*, phụ thuộc vào tốc độ thay đổi của đầu ra.

Khối đặc trưng *khối lượng* (hình 2.3) thể hiện tính chất sau : một khối lượng lớn hơn thì yêu cầu lực lớn hơn để tạo cho nó một gia tốc nhất định. Mối quan hệ giữa lực F và gia tốc a, theo định luật 2 của Niuton là: $F=ma$, trong đó hằng số tỉ lệ giữa lực và gia tốc được gọi là khối lượng m. Gia tốc là sự thay đổi của tốc độ đối với thời gian, dv/dt và tốc độ v là sự thay đổi của chuyển dịch x đối với thời gian, dx/dt, như vậy:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d(dx/dt)}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.4)$$



Hình 2.3: Khối lượng

Để kéo lò xo, tăng tốc chuyển động của một khối và chuyển dịch piston trong môi trường có cản, cần phải có năng lượng. Trong trường hợp *lò xo* và *khối lượng*, thì có thể thu lại năng lượng nhưng trong trường hợp *phần tử cản và đàn hồi* thì không. Lò xo khi bị kéo dãn, đã lưu năng lượng trong nó, năng lượng này sẽ được giải phóng khi lò xo co về vị trí ban đầu. Năng lượng dự trữ khi giãn lượng lò xo x là $^1/_2kx^2$. Vì $F=kx$ nên có thể viết:

$$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} \qquad (2.5)$$

Cũng có một năng lượng dự trữ trong khối lượng khi khối lượng chuyển động với tốc độ v. Năng lượng này được gọi là động năng, được giải phóng khi dừng chuyển động:

$$E={}^1/_2mv^2 \qquad (2.6)$$

Tuy nhiên lại không có năng lượng tích trong phần tử cản. Piston không quay về vị trí ban đầu khi không có lực đầu vào. Phần tử cản làm tiêu hao năng lượng . Tiêu năng P phụ thuộc vào tốc độ v và được xác định bởi:

$$P=cv^2 \qquad (2.7)$$

Hệ thống quay tròn

Lò xo, phần tử cản và khối lượng là các khối đặc trưng cơ bản cho các hệ thống tịnh tiến, trong hệ chỉ gồm lực và các dịch chuyển thẳng. Còn trong hệ thống quay tròn, 3 khối đặc trưng cơ bản là lò xo xoắn, phần tử cản quay (rotary damper) và khối lượng quay (biểu thị quán tính của khối lượng quay). Với những khối đặc trưng này, đầu vào là mômen xoắn và đầu ra là góc chuyển vị (góc quay). Với *lò xo xoắn*, góc quay θ tỉ lệ với mômen xoắn:

$$T = k.\,\theta \tag{2.8}$$

Với phần tử cản quay, một đĩa quay trong chất lỏng, mômen kháng T tỉ lệ với tốc độ góc ω. Vì tốc độ góc là sự thay đổi của góc so với thời gian ,tức dθ/dt, nên

$$T = c\omega = c.d\theta/dt \tag{2.9}$$

Với *khối lượng quay*, khối đặc trưng biểu thị đặc tính là mômen quán tính I càng cao, thì mômen xoắn cần thiết để tạo ra gia tốc góc α càng lớn:

$$T = I\alpha \tag{2.10}$$

Gia tốc gócα là sự thay đổi của tốc độ góc đối với thời gian, tức *dω/dt*, còn tốc độ góc là sự thay đổi của góc chuyển dịch với thời gian, vì vậy:

$$T = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d(d\theta/dt)}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2.11}$$

Lò xo xoắn và khối lượng quay đều trữ năng lượng, phần tử cản quay thì tiêu hao năng lượng . Năng lượng được trữ bởi lò xo xoắn, khi xoay một góc θ là $\frac{1}{2}k\theta^2$. Vì $T = k\theta$ nên có thể viết:

$$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k} \tag{2.12}$$

Năng lượng được tích bởi một khối lượng quay với tốc độ góc ω là động năng E, được tính bởi:

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{2.13}$$

Năng lượng hao tán bởi giảm chấn xoay khi xoay với tốc độ góc ω là:

$$P = c\omega^2 \tag{2.14}$$

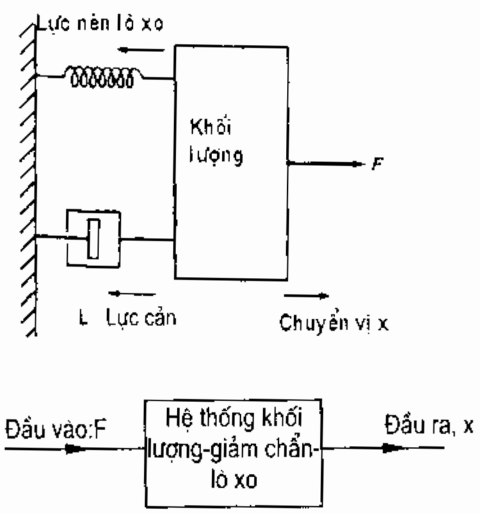
Bảng 2.1 tổng kết các phương trình xác định đặc tính các khối đặc trưng, trong trường hợp có dịch chuyển thẳng (tịnh tiến), đầu vào -lực *F*, đầu ra-chuyển dịch x và trong trường hợp chuyển động quay tròn, có mômen xoắn T- đầu vào và θ- góc chuyển vị là đầu ra

Bảng 2.1 các khối đặc trưng cơ

Khối đặc trưng	*Phương trình miêu tả*	*Động năng/ tán năng*
	Tịnh tiến:	
Lò xo	*F=kx*	$E=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$
Giảm chấn	$F=c\frac{dx}{dt}$	$P=cv^2$
Khối lượng	$F=m\frac{d^2x}{dt^2}$	$E=\frac{1}{2}mv^2$
	Quay tròn:	
Lò xo	*T=k. θ*	$E=\frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$
Phần tử cản quay	$T=c\frac{d\theta}{dt}$	$P=c\omega^2$
Mômen quán tính	$T=I\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$E=\frac{1}{2}I\omega^2$

Đặc trưng một hệ thống cơ

Các thành phần cơ khí trong hệ thống cơ điện tử thể hiện sự hiện diện của chúng thông qua các tác động về chuyển động và các tác động về lực /mômen lên các kết cấu đỡ, kích truyền động (actuator) và cảm biến (sensor). Hiểu và dự báo thuộc tính của các tác động này, những thuộc tính nảy sinh từ sự kết hợp các tác động độ cứng, ma sát- đàn hồi và quán tính, có thể thu được nếu xác định được trạng thái lưu trữ hoặc tiêu hao năng lượng của chúng. Sự lưu trữ hoặc tiêu hao năng lượng có tầm quan trọng, quyết định tính hệ thống mối quan hệ cấu thành các thành phần tạo mô hình hệ thống cơ .



Hình 2.4: *Hệ thống khối lượng-lò xo- giảm*

Các thành phần cơ bản của hệ thống cơ thường là: khối lượng, lò xo, giảm chấn theo kiểu thể hiện ở hình 2.4. Để đánh giá mối quan hệ giữa lực và chuyển dịch, giả thiết hệ thống gồm chỉ một khối lượng m (mà thực chất đó là hệ thhống gồm khối lượng - giảm chấn- lò xo) và các lực tác dụng lên chúng. Biểu đồ khối lượng và các lực tác dụng lên khối lượng ấy được gọi là *biểu đồ-vật thể - tự do* (free - body diagram). Khi các lực tác dụng đồng thời lên vật thể, tổng của chúng có thể được thể hiện dưới dạng vectơ tương đương. Nếu tất cả các lực tác dụng thẳng cùng hướng, lực tổng là tổng đại số các lực thành phần. Như vậy, các lực tác dụng vào khối lượng trong hình 2.4 có lực tổng bằng lực F trừ lực tạo nên từ việc bị giãn lò xo và lực cản từ giảm chấn:

Hình 2.5: Mô hình toán học

a) Máy được lắp trên nền

b) Bánh xe đang chuyển động trên đường

F_Σ *lực tổng tác dụng vào khối lượng xác định bởi:*

$$F_\Sigma = F - kx - cv \qquad (2.15)$$

trong đó v là tốc độ của piston trong cơ cấu giảm chấn khi khối lượng m đang chuyển động. Lực này tác động lên khối lượng, làm nó tăng tốc:

$$F_\Sigma = ma \qquad (2.16)$$

Tức :

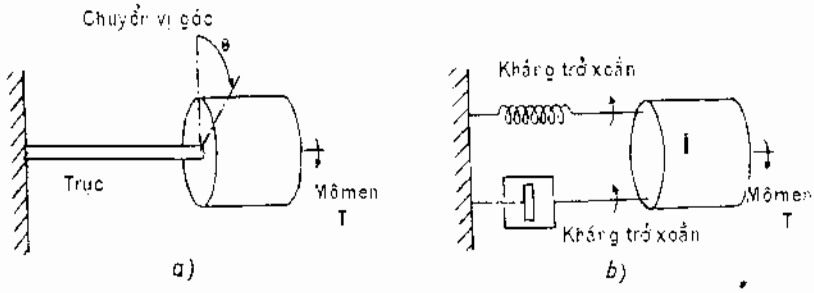
$$F - kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.17)$$

hoặc:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \qquad (2.18)$$

Phương trình (2.18) là phương trình vi phân bậc hai, miêu tả mối quan hệ của lực F -đầu vào hệ thống và lượng chuyển vị x- đầu ra.

Nhiều hệ thống được kết hợp hợp lí từ các khố đặc trưng của lò xo, giảm chấn và khối lượng. Hình 2.5 a thể hiện một mô hình máy lắp trên nền, có thể sử dụng làm cơ sở để nghiên cứu các tác động dao động lên nền vào chuyển vị móng máy. Hình 2.5b thể hiện mô hình bánh xe và hệ thống giảm xóc cho một ô tô hoặc máy kéo . Mô hình này có thể sử dụng để nghiên cứu hoạt động của xe khi chạy trên đường gồ ghề, từ đó làm cơ sở để thiết kế hệ thống giảm xóc của xe. Phân tích các mô hình này đều có thể theo nguyên tắc đã nêu cho mô hình đơn giản lò xo-giảm chấn –khối lượng. Biểu đồ vật thể tự do (free body diagram) được thiết kế cho từng khối lượng trong hệ thống, thể hiện từng khối lượng độc lập và các lực áp vào nó. Từ đó, đối với mỗi khối lượng, lực tổng tác dụng lên nó bằng tích của khối lượng (m)và gia tốc (a).

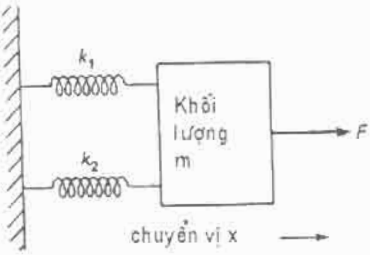


Hình 2.6 : Quay một khối lượng ở đầu mút trục
a) Cấu trúc vật lí *b) Mô hình khối đặc trưng*

Các mô hình tương tự được xây dựng cho hệ thống chuyển động quay tròn. Để đánh giá mối quan hệ giữa mômen xoắn và góc quay chuyển vị trong hệ thống, ta chỉ xem xét một khối lượng quay và các mômen tác dụng lên khối lượng này. Khi có một vài mômen tác dụng đồng thời lên khối lượng, mômen tổng là tổng đại số (có chú ý đến hướng) của các mômen thành phần. Vì vậy, một hệ thống gồm một mômen xoắn tác động để quay một khối lượng tại đầu mút một trục (hình 2.6a) có thể được biểu hiện bởi các khối đặc trưng trong chuyển động quay tròn như biểu diễn ở hình 2.6b. Có thể so sánh hệ quay với hệ tịnh tiến đã được phân tích ở hình 2.4 về lực và chuyển vị thẳng, kết quả cho một phương trình tương tự:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T \tag{2.19}$$

Để minh hoạ cho các vấn đề nêu trên, ta xem xét, phát triển phương trình của các ví dụ sau đây.



Hình 2.7: Minh hoạ cho ví dụ 2.1

Ví dụ 2.1: hệ thống hình thành từ 2 lò xo k_1, k_2 và khối lượng m. Xuất phát từ phương trình vi phân miêu tả quan hệ giữa đầu vào -lực F và đầu ra -lượng dịch chuyển x trong hệ thống ở hình 2.7, ta có

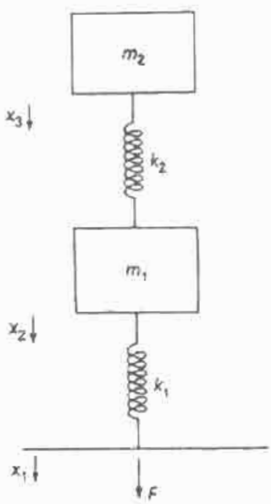
$$F_\Sigma = F - k_1 x - k_2 x \qquad (2.20)$$

Vì lực tổng gây tăng tốc cho khối lượng, nên

$$F_\Sigma = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.21)$$

Do vậy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = F \qquad (2.22)$$



Hình 2.8: Ví dụ 2.2

Ví dụ 2.2 : tìm phương trình vi phân miêu tả chuyển động của khối lượng m_1, khi chịu tác dụng lực F (hình 2.8). Trước tiên, ta xem xét khối lượng m_1 và các lực tác dụng lên nó (hình 2.9). Đó là các lực tác dụng bởi hai lò xo. Lực tác dụng kéo lò xo dưới k_1 căng với lượng (x_1-x_2), lực tác dụng sẽ là $k_1(x_1-x_2)$. Lực tác dụng bởi lò xo phía trên, gây giãn bằng (x_2-x_3) là $k_2(x_3-x_2)$. Như vậy lực tác dụng lên khối lượng là:

$$F_\Sigma = k_1(x_2-x_1) - k_2(x_3-x_2) \qquad (2.23)$$

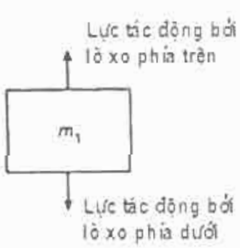
Do lực này gây gia tốc cho khối lượng m_1, nên:

$$m_1\frac{d^2x}{dt^2} = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) \qquad (2.24)$$

Nhưng vì lực gây căng lò xo phía dưới là F : $F=k_1(x_2-x_1)$

Nên phương trình trên có thể viết lại là:

$$m_1\frac{d^2x}{dt^2} + k_2(x_3 - x_2) = F \qquad (2.25)$$



Hình 2.9: Minh hoạ cho ví dụ 2.2

Ví dụ 2.3: một động cơ được sử dụng để quay một tải, mô hình miêu tả vật lí thể hiện ở hình 2.6a, được đặc trưng bởi các khối như thể hiện ở hình 2.6b có phương trình vi phân là:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T \qquad (2.26)$$

2.1.3. Các khối đặc trưng hệ thống điện

Các khối đặc trưng cơ sở cho hệ thống điện là các cuộn điện cảm, tụ điện và điện trở. Đối với *cuộn cảm (inductor)*, hiệu điện thế *u* qua cuộn cảm tại thời điểm tức thời phụ thuộc vào sự thay đổi của dòng qua cuộn *(di/dt)*:

$$u=L\frac{di}{dt} \qquad (2.27)$$

Trong đó *L* là độ tự cảm. Hướng của hiệu điện thế là ngược với hướng hiệu điện thế được sử dụng để truyền dòng qua cuộn cảm, còn gọi là suất điện động ngược (back e.m.f.). Phương trình có thể viết lại là:

$$i=\frac{1}{L}\int udt \qquad (2.28)$$

Đối với một *tụ điện (capacitor)*, hiệu điện thế qua tụ phụ thuộc vào điện tích q trên tấm tụ tại thời điểm liên quan:

$$u=\frac{q}{C} \qquad (2.29)$$

Trong đó *C* là điện dung. Do dòng điện *i* nạp hoặc phóng của tụ điện là tốc độ tại đó các điện tích đến hoặc rời bản tụ, tức $i=dq/dt$, nên điện tích tổng *q* trên các bản tụ là:

$$q=\int idt \qquad (2.30)$$

Như vậy:

$$u=\frac{1}{C}\int idt \qquad (2.31)$$

Mặc khác, vì $u=q/C$ nên:

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=\frac{1}{C}i$$

Vậy :

$$i=C\frac{du}{dt} \qquad (2.32)$$

Đối với một *điện trở (resistor)*, hiệu điện thế *u* qua điện trở tại một thời điểm tức thời phụ thuộc vào dòng điện i đi qua nó:

$$u=Ri \tag{2.33}$$

Trong đó R là điện trở.

Cả cuộn cảm và tụ điện đều tích năng lượng, năng lượng này có thể được giải phóng sau này. Điện trở không tích năng lượng mà lại tiêu hao chúng. Năng lượng lưu trong cuộn cảm khi có dòng điện i qua là:

$$E=\frac{1}{2}Li^2 \tag{2.34}$$

Năng lượng lưu bởi tụ điện khi có một hiệu điện thế qua nó là:

$$E=\frac{1}{2}Cu^2 \tag{2.35}$$

Tiêu năng P bởi điện trở khi có một hiệu điện thế qua nó là

$$P=iu=\frac{u^2}{R} \tag{2.36}$$

Bảng 2.2 tổng kết các phương trình xác định đặc tính của các khối đặc trưng điện khi *đầu vào* là *dòng điện* và *đầu ra* là *hiệu điện thế*. Có thể so chúng với các phương trình trong bảng 2.1 về các khối đặc trưng hệ thống cơ.

Bảng 2.2 Các khối đặc trưng điện

Khối đặc trưng	*Phương trình miêu tả*	*Động năng hoặc tán năng*
Cuộn cảm	$i=\frac{1}{L}\int u\,dt$	$E=\frac{1}{2}Li^2$
Tụ điện	$i=C\frac{du}{dt}$	$E=\frac{1}{2}Cu^2$
Điện trở	$i=\frac{u}{R}$	$P=\frac{u^2}{R}$

2.1.3.1. Xây dựng mô hình hệ thống điện

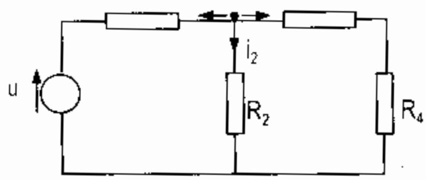
Các phương trình miêu tả các khối đặc trưng điện có thể kết hợp với nhau tuân theo định luật Kirchhoff (Kirchhoff's law). Các định luật này có thể phát biểu như sau:

Định luật 1: dòng điện tổng đến một nút thì bằng tổng dòng điện rời khỏi nó, tức tổng đại số dòng điện tại đầu nối bằng 0.

Định luật 2: tại một mạch kín hoặc vòng lặp (loop), tổng đại số hiệu điện thế qua từng phần mạch bằng sức điện động (e.m.f) đặt vào phần đó.

Định luật 1 Kirchhof sử dụng rất tiện để *phân tích nút* (nút là điểm nối giữa các khối đặc trưng hoặc các phần tử của mạch. Một nút là nơi gặp của 3 nhánh hoặc nhiều hơn của mạch). Định luật 2 sử dụng để *phân tích mắt lưới* (mesh analyis). luật này áp dụng được đến từng mắt (một mắt lưới là một đường đóng hoặc một loop, không chứa một đường đóng khác).

Ví dụ 2.4: để minh hoạ định luật Kirchhoff, sử dụng hai phương pháp phân tích trên để xây dựng các mối quan hệ của mạch thể hiện ở hình 2.10. Trong mạch này, *tất cả các thành phần là điện trở.* Phân tích nút chính, điểm A, điện áp là u_A, khi tham chiếu đến các nút chính khác, ví dụ B, có thể coi rằng tất cả các dòng điện vào và rời A, theo định luật 1 của Kirchhoff :

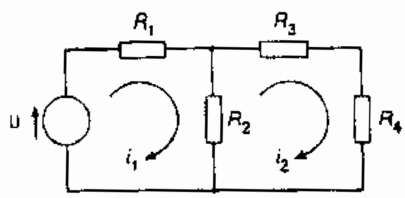


Hinh 2.10: Phân tích nút

$$i_1=i_2+i_3 \qquad (2.37a)$$

Dòng điện vào qua R_1 là i_1, do hiệu điện thế qua R_1 là u_A-u), nên $i_1 R_1= u_A-u$. Dòng qua R_2 là i_2, do hiệu điện thế qua R_2 là u_A nên $i_2 R_2= u_A$. Dòng điện i_3 qua R_3 nối tiếp với R_4 và hiệu điện thế u_A áp lên kết hợp này, tức $i_3(R_3+R_4)=u_A$. Cân bằng dòng, ta có:

$$\frac{u-u_A}{R_1}=\frac{u_A}{R_2}+\frac{u_A}{R_3+R_4} \qquad (2.37b)$$



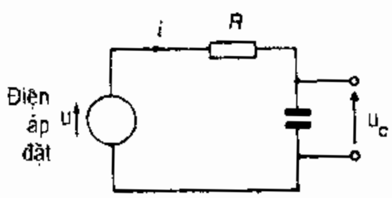
Hinh 2.11: Phân tích lưới

Ví dụ 2.5: phân tích mắt lưới cho mạch ở hình 2.10. Giả thiết đang có các dòng điện trong từng loop như thể hiện ở hình 2.11. Áp dụng định luật 2 Kirchhoff cho từng loop. Xét loop có dòng i_1: vì dòng qua R_1 là i_1 , qua R_2 là (i_1-i_2), nên

$$u=i_1R_1+(i_1-i_2)R_2 \qquad (2.38)$$

Tương tự, xét loop có i_2, vì không có nguồn sức điện động (e.m.f) nên:

$$0=i_2R_3+i_2R_4+(i_2-i_1)R_2 \qquad (2.39)$$



Hinh 2.12: Hệ thống tụ-điện trở

Từ hai công thức trên có thể giải để

thu được dòng trong hai loop, từ đó suy ra dòng trong từng nhánh mạch. Nhìn chung nếu số nút trong mạch nhỏ hơn số loop, thì nên sử dụng phương pháp phân tích nút.

Ví dụ 2.6: xét một mạch bao gồm *một điện trở và một tụ điện mắc nối tiếp*, như thể hiện ở hình 2.12. Ứng dụng định luật 2 của Kirchhoff đối với loop, ta có:

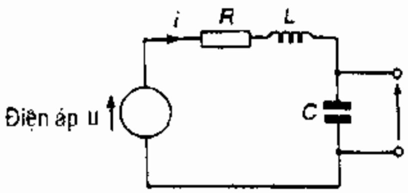
$$u=u_R+u_C \tag{2.40}$$

Trong đó u_R là hiệu điện thế qua điện trở R và u_C là hiệu điện thế của tụ. Vì mạch là 1 loop đơn, dòng i đi qua các thành phần là như nhau. Nếu đầu ra khỏi mạch là hiệu điện thế qua tụ u_C, và vì $u_R=iR$, $i=C(dv_C/dt)$, nên:

$$u = RC\frac{du_C}{dt} + u_C \tag{2.41}$$

Công thức (2.41) là phương trình vi phân bậc 1 cho biết mối quan hệ giữa đầu ra u_C và đầu vào u.

Ví dụ 2.7: Hình 2.13 thể hiện một hệ thống *điện trở-cuộn cảm và tụ điện*. Áp dụng định luật 2 của Kirchhoff cho loop, ta có:



Hình 2.13: Hệ thống điện cảm-điện trở

$$u= u_R +u_L +u_C \tag{2.42}$$

Trong đó u_R là hiệu điện thế qua điện trở, u_L- hiệu điện thế qua cuộn cảm và u_C - hiệu điện thế của tụ điện. Vì mạch chỉ có một loop nên dòng *i* là như nhau khi qua các thành phần . Do đầu ra hệ thống là hiệu điện thế của bản tụ u_C và vì $u_R=iR$, $u_L=L(di/dt)$, nên:

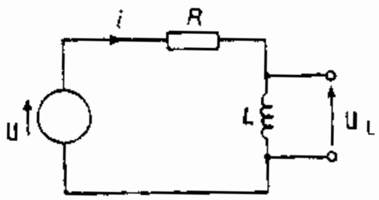
$$u = iR + L\frac{di}{dt} + u_C \tag{2.43}$$

Nhưng $i=C(du_C/dt)$

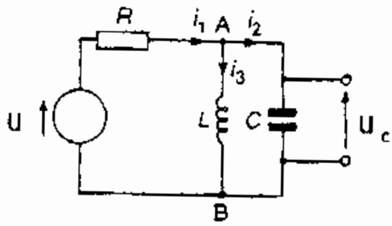
$$\text{Nên : } u = RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \tag{2.44}$$

(2.44) là *phương trình vi phân bậc 2.*

Ví dụ 2.8 : Xét mối quan hệ giữa đầu ra- hiệu điện thế qua cuộn cảm u_L và đầu vào *u* của mạch, thể hiện trong hình 2.14. Áp dụng định luật 2 của Kirchhoff cho loop, ta có:



Hình 2.14 : Ví dụ 2.8



Hình 2.15 : Ví dụ 2.9

$$u = u_R + u_L \qquad (2.45a)$$

Trong đó u_R là hiệu điện thế qua điện trở R và u_L là hiệu điện thế qua cuộn cảm. Vì $v_R = iR$ nên: u= $iR + u_L$ (2.45b)

$$i = \frac{1}{L}\int u_L dt \qquad (2.46)$$

Nên: $$u = \frac{R}{L}\int u_L dt + u_L \qquad (2.47)$$

Ví dụ 2.9: Xét mối quan hệ của đầu ra, hiệu điện thế u_C qua cặp tụ C, và đầu vào u của mạch như hình vẽ 2.15

Sử dụng phân tích nút, nút B được lấy như là nút chuẩn và nút A được lấy tại điện thế v_A tương đối so với B. Áp dụng định luật 1 của Kirchhoff:

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad (2.48)$$

Nhưng:

$$i_1 = \frac{u - u_A}{R} \qquad (2.49)$$

$$i_2 = \frac{1}{L}\int u_A dt \qquad (2.50)$$

$$i_3 = C\frac{du_A}{dt} \qquad (2.51)$$

Nên:

$$\frac{u - u_A}{R} = \frac{1}{L}\int u_A dt + C\frac{du_A}{dt} \qquad (2.52)$$

vì $u_C = u_A$ nên có thể viết lại là:

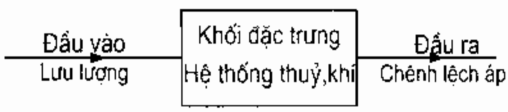
$$u = RC\frac{du_C}{dt} + u_C + \frac{R}{L}\int u_C dt \qquad (2.53)$$

2.1.3.2. Sự tương tự giữa hệ cơ và điện

Các khối đặc trưng cho hệ thống cơ và điện có một số điểm tương tự. Ví dụ, điện trở của hệ điện không trữ mà tiêu hao năng lượng . Nếu dòng điện *i* qua điện trở R, $i=u/R$, R không đổi, thì năng lượng mất mát $P= u^2/R$. Giảm chấn (phần tử cản) trong hệ thống cơ tương tự điện trở , cũng không trữ mà tiêu hao năng lượng . Với lực F có mối quan hệ với tốc độ $F=cv$, c là hằng số, thì năng lượng tiêu hao bởi giảm chấn là $P=cv^2$. Hai phương trình này có hình thức tương tự.

Nếu so sánh có thể thấy dòng điện tương đương với lực, hiệu điện thế tương đương với tốc độ, hằng số c tương đương với số đảo nghịch của điện trở $(1/R)$. Các thành phần tương tự khác có thể so sánh lò xo với cuộn cảm và khối lượng với tụ.

2.1.4. Khối đặc trưng cho hệ thống thủy,, khí



Hình 2.16: Ví dụ

Hệ thống thủy khí có 3 khối đặc trưng cơ bản, có thể coi là tương đương với điện trở, cuộn cảm và tụ điện trong hệ thống điện. Một hệ thống như vậy (hình 2.16), đầu vào, tương đương với dòng điện, là lưu lượng dòng q, và đầu ra, tương đương với hiệu điện thế, là chênh lệch áp (p_1-p_2). Hệ thống thuỷ khí có thể là hệ thuỷ lực, chất dẫn lưu là dòng chất lỏng, không có khả năng nén hoặc là hệ khí nén, chất dẫn lưu là là khí, có thể nén nên có thể thay đổi tỉ trọng.

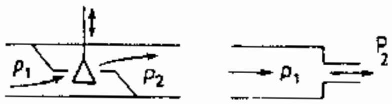
Hệ thống thuỷ lực

Trở thuỷ lực (hydraulic resistance), R là sức cản đối với dòng chảy, xảy ra khi chất lỏng chảy qua các van hoặc qua ống có đường kính thay đổi (hình 2.17). Mối quan hệ giữa lưu lượng theo thể tích q qua thành phần trở và chênh lệch áp tạo ra (p_1-p_2) là:

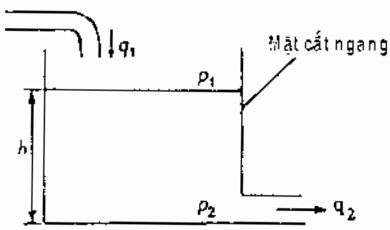
$$p_1 - p_2 = Rq \tag{2.54}$$

trong đó R là hằng số gọi là trở thuỷ lực. Trở thủy lực càng cao thì chênh lệch áp càng cao đối với một tốc độ dòng cho trước. Trở thuỷ lực tuyến tính sinh ra ở dòng chảy tầng qua các ống mao dẫn và các đầu ống có chứa các lỗ nhỏ li ti (porous plugs), còn trở không tuyến tính xẩy ra ở các lỗ có cạnh sắc hoặc dòng chảy rối.

Áp năng thuỷ lực (hydraulic capacitance) là thuật ngữ miêu tả sự trữ năng lượng với một chất lỏng, dưới dạng thế năng. Chiều cao chất lỏng trong thùng chứa (hình 2.18) h gọi là cột áp (pressure head), là một dạng dự



Hình 2.17 : Ví dụ trở kháng thuỷ lực



Hình 2.18 : Áp năng thuỷ lực
(Hy draulic capacitance)

trữ năng lượng như thế. Đối với sự dự trữ này, tốc độ thay đổi thể tích V trong thùng, tức dV/dt bằng chênh lệch giữa các lưu lượng theo thể tích của chất lỏng vào thùng q_i và rời thùng q_2.

$$q_1 - q_2 = dV/dt \tag{2.55}$$

Nhưng $V=Ah$, A là tiết diện ngang của thùng chứa, h- chiều cao cột chất lỏng nên:

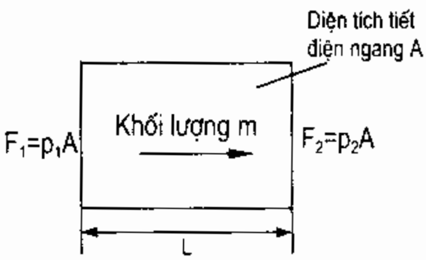
$$q_1 - q_2 = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt} \tag{2.56}$$

Với chênh lệch áp giữa đầu ra và đầu vào là p, $p=h\rho g$, ρ- tỉ trọng chất lỏng, g- gia tốc trọng trường, giả thiết chất lỏng không nén được, tức tỉ trọng chất lỏng không thay đổi theo áp suất, ta có:

$$q_1 - q_2 = A\frac{d(p/\rho g)}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{dp}{dt} \tag{2.57}$$

áp năng C được xác định là:

$$C = \frac{A}{\rho g} \tag{2.58}$$



Hình 2.19 :Thuỷ năng

viết lại :

$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt} \tag{2.59}$$

Tích phân phương trình trên , ta có:

$$p = \frac{1}{C}\int (q_1 - q_2)dt \tag{2.60}$$

Thuỷ năng (hydraulic inertance) có ý nghĩa tương đương với cuộn cảm trong hệ thống điện hoặc lò xo trong hệ thống cơ. Để tăng tốc dòng chất lỏng cần có một lực tác động lên khối chất lỏng *m* (hình 2.19), lực tổng tác động vào chất lỏng là:

$$F_2 - F_1 = p_1A - p_2A = (p_1 - p_2)A \tag{2.61}$$

Trong đó: p_1-p_2 là chênh lệch áp; A là tiết diện ngang . Lực tổng này tăng tốc chất lỏng với gia tốc a:

$$(p_1-p_2)\,A=ma \tag{2.62}$$

$a= dv/dt$ nên:

$$(p_1-p_2)A=mdv/dt \tag{2.63}$$

Do khối chất lỏng này có thể tích bằng AL, với L - chiều dài của khối hoặc là khoảng cách giữa hai điểm trong chất lỏng, nơi đo áp suất p_1 và p_2. Nếu chất lỏng có tỉ trọng riêng ρ thì $m=AL\rho$, như vậy :

$$(p_1-p_2)A = AL\rho\frac{dv}{dt} \tag{2.64}$$

Lưu lượng theo thể tích của dòng $q=Av$ nên:

$$(p_1-p_2)A = L\rho\frac{dq}{dt} \tag{2.65}$$

$$(p_1-p_2)A = I\frac{dq}{dt} \tag{2.66}$$

Ở đây I là thủy năng , được xác định là:

$$I = \frac{L\rho}{A} \tag{2.67}$$

Hệ thống khí nén

Hệ thống khí nén có 3 khối đặc trưng tựa hệ thống thủy lực, đó là: trở, áp năng khí nén và khí năng. Khác với chất lỏng, khí có thể nén nên sự thay đổi áp suất sẽ kéo theo sự thay đổi thể tích và tỉ trọng. *Trở khí nén R* (pneumatic resistance) được xác định trong thành phần của công thức (2.66), thể hiện mối quan hệ với lưu lượng theo trọng khối của dòng $\dot{m}$ và chênh lệch áp $(p_1$-$p_2)$:

$$p_1 - p_2 = R\dot{m} \tag{2.68}$$

Áp năng khí C (pneumatic capacitance) là do tính nén được của khí, có thể so sánh tương tự với nén lò xo để nạp năng lượng. Nếu có lưu lượng theo trọng khối của dòng $\dot{m}_1$ vào thùng chứa khối lượng V và $\dot{m}_2$ rời thùng, thì tốc độ thay đổi trọng khối trong thùng là ($\dot{m}_1 - \dot{m}_2$). Nếu khí trong thùng có tỷ trọng ρ, thì tốc độ thay đổi khối lượng trong thùng là :

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{d(\rho V)}{dt} \tag{2.69}$$

Nhưng do khí có thể nén được, ρ và V có thể thay đổi với thời gian, nên:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \rho\frac{dV}{dt} + V\frac{d\rho}{dt} \tag{2.70}$$

Nhưng$(dV/dt)=(dV/dp)/(dp/dt)$ và đối với khí lí tưởng $pV=mRT$ suy ra $p=(m/V)RT=\rho RT$ và $d\rho/dt=(1/RT)(dp/dt)$, khi đó:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \rho\frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt} + \frac{V}{RT}\frac{dp}{dt} \tag{2.71}$$

Trong đó R là hằng số khí và T là nhiệt độ được thừa nhận là bất biến theo thang Kelvin. Như vậy:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (\rho\frac{dV}{dp} + \frac{dV}{RT})\frac{dp}{dt} \tag{2.72}$$

Áp năng khí do có sự thay đổi trong khối lượng khí chứa trong thùng , C_1 được xác định là:

$$C_1=\rho\,(dV/dt) \tag{2.73}$$

Và áp năng khí do tính nén được của khí, C_2 là:

$$C_2 = \frac{V}{RT} \tag{2.74}$$

Nên :

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp}{dt} \tag{2.75}$$

Hoặc:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{C_1 + C_2}\int(\dot{m}_1 - \dot{m}_2)dt \tag{2.76}$$

Khí năng I thể hiện sự giảm áp cần thiết để tăng tốc một khối khí. Theo định luật 2 Newton, lực tổng $ma=d(mv)/dt$. Do lực được tạo bởi chênh lệch áp (p_1-p_2), thì nếu A là tiết diện ngang khối khí tăng tốc đi qua, ta có:

$$(p_1 - p_2)A = \frac{d(mv)}{dt} \tag{2.77}$$

Do $m=\rho LA$ (ρ là tỉ trọng khí, m là khối lượng khí đang tăng tốc, L là chiều dài của khối khí đang tăng tốc) và vì lưu lượng theo thể tích của dòng $q=Av$ với v là tốc độ nên:

$$mv = \rho LA\frac{q}{A} = \rho Lq \tag{2.78}$$

Vì vậy:

$$(p_1 - p_2)A = L\frac{d(\rho q)}{dt} \tag{2.79}$$

Nhưng $\dot{m} = \rho q$, nên:

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{A}\frac{d\dot{m}}{dt} \tag{2.80}$$

$$p_1 - p_2 = I\frac{d\dot{m}}{dt} \tag{2.81}$$

Trong (2.81) I là khí năng được xác định bằng:

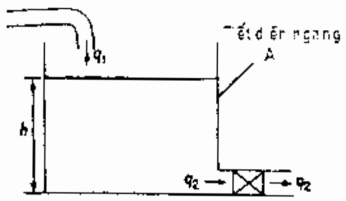
$$I = L/A \tag{2.82}$$

Bảng 2.3 thể hiện các đặc tính cơ bản của các khối đặc trưng cho thủy lực và khí nén. Lưu lượng theo theo thể tích của dòng đối với thủy lực và lưu lượng theo trọng khối đối với khí nén là tương tự với dòng điện, chênh lệch áp tương tự với hiệu điện thế trong một hệ thống điện. So sánh với bảng 2.2 áp năng và thuỷ/khí năng của thủy lực và khí nén là những thành phần trữ năng lượng, trở thuỷ lực/ khí nén đều tiêu hao năng lượng .

Bảng 2.3 : Các khối đặc trưng cho khí nén và thủy lực

Khối đặc trưng	*Phương trình miêu tả*	*Năng lượng trữ/ tiêu hao*
	Thuỷ lực	
Thuỷ năng (Inertance)	$q = \frac{1}{L}\int(p_1 - p_2)dt$	$E = \frac{1}{2}Iq^2$
Áp năng thuỷ lực (capacitance)	$q = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$
Trở (resistance)	$q = \frac{p_1 - p_2}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$
	Khí nén	
Khí năng (Inertance)	$\dot{m} = \frac{1}{L}\int(p_1 - p_2)dt$	$E = \frac{1}{2}I\dot{m}^2$
Áp năng khí nén (capacitance)	$\dot{m} = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$
Trở (resistance)	$\dot{m} = \frac{p_1 - p_2}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$

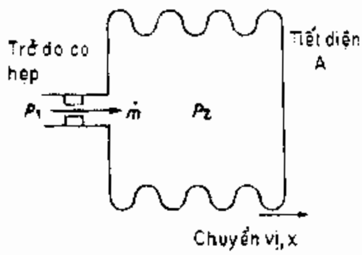
Xây dựng mô hình cho hệ thống thuỷ/khí



Hình 2.20 : Hệ thống chất lỏng

Hình 2.20 thể hiện một hệ thống thuỷ lực đơn giản,-dòng chất lỏng vào (q_1) và ra (q_2) khỏi một thùng chứa. Hệ thống này gồm: 1 thùng chứa, chất lỏng trong thùng và một trở là van. Thuỷ năng có thể được bỏ qua do tốc độ dòng thay đổi rất chậm. Đối với thùng này, ta có thể viết:

$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt} \qquad (2.83)$$



Hinh2.21 : Hệ thống Thuỷ lực

Tốc độ chất lỏng rời thùng q_2, bằng tốc độ ra khỏi van. Vậy đối với trở

$$p_1 - p_2 = Rq_2 \qquad (2.84)$$

Chênh lệch áp $(p_1\text{-}p_2)$ là áp suất p được tạo bởi chiều cao của chất lỏng trong thùng, và $p=h\rho g$. Thay giá trị của q_2 và p vào phương trình (2.83), ta có:

$$q_1 - \frac{h\rho g}{R} = C\frac{d(h\rho g)}{dt} \qquad (2.85)$$

Và vì $C=A/\rho g$

$$\text{nên: } q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R} \qquad (2.86)$$

Phương trình (2.86) miêu tả chiều cao của cột chất lỏng trong thùng phụ thuộc vào tốc độ vào thùng của chất lỏng.

Ví dụ 2.10: Hình 2.21 thể hiện hệ khí nén. Trở tạo nên bởi đường hẹp khí qua, quyết định tốc độ khí vào ống, áp năng khí được tự cấp bởi chính ống xếp. Khí năng có thể bỏ qua vì tốc độ thay đổi dòng rất chậm. Lưu lượng theo trọng khối của dòng $\dot{m}$ vào ống xếp được cho bởi :

$$p_1 - p_2 = R\dot{m} \qquad (2.87)$$

Với p_1 là áp suất trước khi vào lối hẹp và p_2 là áp sau đó (tức là áp trong ống xếp). Tất cả khí vào ống xếp, được lưu trong đó, không có đường ra khỏi ống. Áp năng khí của ống xếp được cho bởi:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} \qquad (2.88)$$

$\dot{m}_1$ là tốc độ của dòng cho bởi phương trình (2.87) và vì ống xếp không có đường thoát nên $\dot{m}_2 = 0$, thay vào (2.88) ta có:

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = (c_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} \qquad (2.89)$$

Hay:
$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} + p_2 \qquad (2.90)$$

(2.90) là công thức miêu tả áp suất bên trong ống xếp, p_2 thay đổi theo hàm thời gian khi có đầu vào là áp p_1.

Ống xếp co hoặc dãn phụ thuộc vào áp suất thay đổi bên trong nó. Như thế ống xếp có dạng của một lò xo, có thể viết lại : $F=kx$, mối quan hệ giữa lực gây dãn/ nén , đưa đến dịch chuyển x, với k là hằng số co giãn của ống xếp. Lực F phụ thuộc vào áp suất p_2, với $p_2=F/A$, A là tiết diện ngang của ống xếp, và $p_2A=F=kx$. Thay p_2 vào công thức (2.90), ta có:

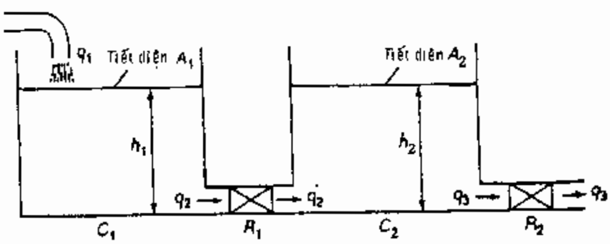
$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{k}{A}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{A}x \qquad (2.91)$$

Công thức (2.91) là đạo hàm bậc 1, miêu tả thay đổi khoảng giãn /nén x của ống xếp trong khoảng thời gian t khi đầu vào là áp p_1. *Áp năng khí* C_1 do thay đổi khối lượng thùng chứa là $\rho dV/dp_2$ và do $V=Ax$ nên $C_1 = \rho A dx/dp_2$. Nhưng đối với ống xếp $p_2A=kx$, nên:

$$C_1 = \rho A\frac{dx}{d(kx/A)} = \frac{\rho A^2}{k} \qquad (2.92)$$

C_2 là áp năng khí do tính nén được của khí :

$$C_2 = V/RT = Ax/RT \qquad (2.93)$$



Hình 2.22 : Ví dụ 2.11

Ví dụ 2.11: Hình 2.22 thể hiện hệ thống thuỷ lực minh hoạ mối quan hệ chiều cao cột chất lỏng trong hai bình chứa thay đổi với thời gian. Trong mô hình này, bỏ qua thuỷ năng.

Trong thùng 1 :

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{dp}{dt} \tag{2.94}$$

Với $p=h_1\rho g$ và $C_1=A_1/\rho g$, nên:

$$q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \tag{2.95}$$

Tốc độ dòng thuỷ khí rời thùng q_2, bằng tốc độ rời van R_1. Như vậy đối với trở:

$$p_1 - p_2 = R_1 q_2 \tag{2.96}$$

vì $p_1= h_1\rho g$ và $p_2= h_2\rho g$,

Nên : $$(h_1-h_2)\rho g=R_1 q_2 \tag{2.97}$$

Sử dụng giá trị của q_2 cho bởi phương trình (2.97) thay vào phương trình (2.95) và (2.96), ta có:

$$q_1 - \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \tag{2.98}$$

Phương trình (2.98) miêu tả sự thay đổi chiều cao của chất lỏng trong thùng 1 phụ thuộc vào tốc độ dòng vào.

Đối với thùng 2, các phương trình thu được tương tự:

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{dp}{dt} \tag{2.99}$$

Với $p=h_2\rho g$ và $C_2=A_2/\rho g$ từ đó:

$$q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \tag{2.100}$$

Tốc độ chất lỏng rời thùng chứa, q_3 bằng với tốc độ nó rời khỏi van R_2. Như vậy đối với trở (van):

$$p_2 - 0 = R_2 q_3 \tag{2.101}$$

Giả thiết chất lỏng thoát ra khí quyển. Thay giá trị q_3 cho bởi phương trình (2.101) vào công thức (2.99) và (2.100) ta có:

$$q_2 - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \tag{2.102}$$

Thay q_2 trong (2.102) bằng các giá trị cho bởi các phương trình chuyển hoá từ các biểu thức cho thùng 1:

$$\frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2\frac{dh_2}{dt} \qquad (2.103)$$

Phương trình (2.103) miêu tả sự thay đổi của cột chất lỏng trong thùng 2.

2.1.5. Các khối đặc trưng nhiệt

Khối đặc trưng cho hệ thống nhiệt có: nhiệt trở (thermal resistance) và nhiệt dung (thermal capacitance). Giữa hai điểm nếu có chênh lệch nhiệt sẽ có một dòng nhiệt. Hiện tượng này tương đương với mạch điện có dòng i giữa hai điểm nếu có một chênh lệch điện áp u giữa chúng. Mối quan hệ giữa dòng điện và chênh lệch điện áp là $i=u/R$ (R là điện trở giữa các điểm) . Mối quan hệ tương tự được sử dụng để xác định *nhiệt trở* R. Nếu q là tốc độ của dòng nhiệt, (T_1-T_2), là chênh lệch nhiệt, khi đó :

$$q = \frac{T_2 - T_1}{R} \qquad (2.104)$$

Giá trị của trở phụ thuộc vào phương thức truyền nhiệt. *Trong trường hợp truyền nhiệt qua một chất rắn, truyền một chiều*, ta có:

$$q = Ak\frac{T_1 - T_2}{L} \qquad (2.105)$$

Trong đó A – tiết diện nhiệt truyền qua ; L- khoảng cách giữa hai điểm vật liệu tại đó nhiệt đo được T_1 và T_2, k - hệ số dẫn nhiệt. Như vậy, trong phương thức truyền nhiệt này

$$R = \frac{L}{Ak} \qquad (2.106)$$

Nếu phương thức truyền nhiệt là đối lưu, như khí và nước, lúc đó:

$$q=Ah(T_2-T_1) \qquad (2.107)$$

Với A là diện tích bề mặt có chênh lệch nhiệt, h là hệ số truyền nhiệt. Như vậy, với phương thức truyền nhiệt này:

$$R = \frac{1}{Ah} \qquad (2.108)$$

Nhiệt dung là đại lượng đánh giá sự lưu nhiệt lượng bên trong (nội năng) một hệ thống. Nếu tốc độ luồng nhiệt vào hệ thống là q_1 và tốc độ ra là q_2, thì:

$$\textit{Tốc độ thay đổi nội năng} = q_1 - q_2 \quad (2.109)$$

Sự thay đổi năng lượng bên trong, có nghĩa là có sự thay đổi nhiệt , do:

$$\textit{Thay đổi nội năng} = mc \times \textit{thay đổi trong nhiệt độ} \quad (2.110)$$

Với m- khối lượng, c- nhiệt dung riêng , khi đó:

$$\textit{Tốc độ thay đổi nội năng} = mc \times \textit{tốc độ thay đổi nhiệt độ} \quad (2.111)$$

$$\text{vì vậy} \quad q_1 - q_2 = mc\frac{dT}{dt} \quad (2.112)$$

Trong đó dT/dt là tốc độ thay đổi nhiệt. Công thức này có thể viết lại :

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt} \quad (2.113)$$

C là nhiệt dung , $C=mc$. Bảng 2.5 thể hiện tổng kết của các khối đặc trưng cho hệ thống nhiệt

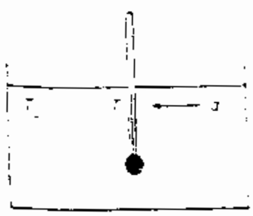
Bảng 2.5 Các khối đặc trưng nhiệt

Khối đặc trưng	*Công thức*	*Năng lượng lưu*
Nhiệt dung (Capacitance)	$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$	E=CT
Nhiệt trở (Resistance)	$q = \frac{T_1 - T_2}{R}$	

Xây dựng mô hình cho hệ thống nhiệt

Xét một nhiệt kế có nhiệt độ T, nhúng vào một chất lỏng có nhiệt độ T_L (hình 2.23). Nếu trở nhiệt đối ngược từ dòng đến nhiệt kế là R, thì:

$$q = \frac{T_L - T}{R} \quad (2.114)$$



Hình 2.23 :Hệ thống nhiệt

trong đó q là tốc độ dòng nhiệt từ chất lỏng đến nhiệt kế. C là nhiệt dung của nhiệt kế, xác định bởi :

$$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt} \quad (2.115)$$

Vì chỉ có mỗi một dòng nhiệt từ chất lỏng đến nhiệt kế nên $q_1=q$ và $q_2=0$, tức:

$$q = C\frac{dT}{dt} \quad (2.116)$$

Thay thế giá trị q ở (2.116) vào (2.114) ta được :

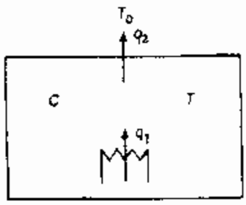
$$C\frac{dT}{dt}=\frac{T_L-T}{R} \quad (2.117)$$

Chuyển đổi lại , ta có:

$$RC\frac{dT}{dt}+T=T_L \quad (2.118)$$

Phương trình (2.118) là đạo hàm bậc 1, miêu tả sự thay đổi của nhiệt độ với thời gian khi nhiệt kế được nhúng vào một chất lỏng nóng.

Ở hệ thống nhiệt nêu trên , các tham số được xem như gộp lại, tức nhiệt kế thể hiện chỉ có một nhiệt độ, chính là nhiệt độ của chất lỏng. Có nghĩa, nhiệt độ chỉ là hàm của thời gian chứ không của vị trí trong vật thể.



Hình 2.24: *Ví dụ 21.12*

Ví dụ 21.12: hình 2.24 thể hiện một hệ thống nhiệt- lò sưởi điện trong một căn phòng . Lò sưởi phát nhiệt lượng với tốc độ q_1 và nhiệt mất của căn phòng với tốc độ q_2. Ta chấp nhận không khí trong phòng là như nhau ở nhiệt độ T và không có trữ nhiệt trong tường. Hãy xem xét nhiệt độ của căn phòng sẽ thay đổi như thế nào với thời gian.

+ Nếu không khí trong trong phòng có nhiệt dung C, thì:

$$q_1-q_2=C\frac{dT}{dt} \quad (2.119)$$

+ Nếu nhiệt độ trong phòng là T và phía ngoài phòng là T_o, thì

$$q_2=\frac{T-T_o}{R} \quad (2.120)$$

Ở đây R là trở kháng của tường. Thay vào q_2 ở (2.119)

$$q_1-\frac{T-T_o}{R}=C\frac{dT}{dt} \quad (2.121)$$

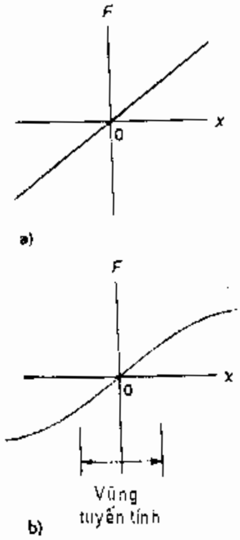
Nên :

$$RC\frac{dT}{dt}+T=Rq_1+T_0 \quad (2.122)$$

2.2. CÁC MÔ HÌNH HỆ THỐNG

2.2.1. Các hệ thống kỹ thuật

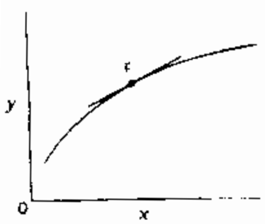
Trong mục2.1 các khối đặc trưng cơ bản cho hệ cơ tịnh tiến, cơ chuyển động quay tròn, điện, thủy lực, nhiệt đã được xem xét riêng lẻ. Trong thực tế, các hệ thống cơ điện tử là những hệ thống đa thành phần, ví dụ, một động cơ điện có cả thành phần cơ và điện. Như vậy các khối đặc trưng được kết hợp thành các hệ thống đa "lĩnh vực". Các kết hợp này được thực hiện với giả thiết là có mối quan hệ tuyến tính. Thực tế, nhiều hệ thống có mối quan hệ không tuyến tính, tuy nhiên ta có thể sử dụng phép xấp xỉ tuyến tính cho những hệ thống như vậy.



Hình 2.25: Lò xo
a) Lí tưởng b) Thực

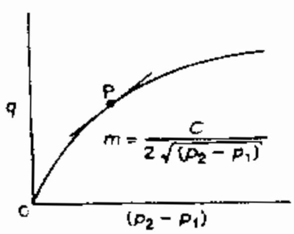
2.2.1.1. Tuyến tính

Mối quan hệ giữa lực F và độ giãn x sinh bởi một lò xo lí tưởng là tuyến tính và được cho bởi $F=kx$, có nghĩa lực F_1 sẽ gây giãn đoạn x_1, F_2 sẽ tạo đoạn dãn x_2 và một lực bằng (F_1+F_2) sẽ gây dãn (x_1+x_2). Đó gọi là *nguyên tắc cộng*, là điều kiện cần cho một hệ thống được gọi là *tuyến tính*. Một điều kiện nữa cho hệ thống tuyến là nếu có một đầu vào- lực F_1 tạo giãn x_1 thì một đầu vào cF_1 sẽ tạo nên một đầu ra cx_1, với c là hằng số. Đồ thị quan hệ của lực với độ dãn x là một đường thẳng đi qua gốc (hình 2.25a).



Hình 2.26: Quan hệ không tuyến tính

Thực tế, lò xo cũng như các thành phần cấu tạo khác không phải là tuyến tính lí tưởng (hình 2.25b). Thường chúng có một vùng hoạt động có thể cho là theo quan hệ tuyến tính (hình 2.25b). Đối với lò xo, phần tuyến tính được thừa nhận là vùng giữa của đồ thị. Đối với nhiều thành phần của hệ thống, có thể được chấp nhận tính tuyến tính trong một phạm vi giá trị của các biến quanh một số điểm hoạt động.



Hình 2.27: Dòng qua lỗ hẹp

Một số thành phần hệ thống có mối quan hệ là không tuyến tính (non- linear), (hình 2.26). Trong trường hợp này, cách tốt nhất để có được mối quan hệ tuyến tính là tuyến tính hoá thông qua đường thẳng tiếp tuyến với đồ thị tại điểm hoạt động. Quan hệ y và x (hình 2.26), tại điểm hoạt động P, độ dốc m là:

$$\Delta y = m\Delta x \tag{2.123}$$

Trong đó Δx và Δy là những thay đổi nhỏ trong tín hiệu đầu vào và đầu ra tại điểm hoạt động.

Ví dụ 2.13: tốc độ chảy của dòng chất lỏng q qua một lỗ được cho là:

$$q = c_d A\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \tag{2.124}$$

Trong đó C_d- là hằng số, hệ số chảy. A -tiết diện của lỗ, ρ- tỉ trọng của chất lỏng,$(p_1$-$p_2)$ - chênh lệch áp. Đối với A và ρ không đổi, công thức có thể viết lại là:

$$q = C\sqrt{p_1 - p_2} \tag{2.125}$$

C là hằng số . (2.125) là mối quan hệ không tuyến tính giữa tốc độ dòng chảy và chênh lệch áp. Có thể có được mối quan hệ tuyến tính khi xét đường thẳng thể hiện độ dốc của tốc độ dòng/ chênh lệch áp (đồ thị hình 2.27) tại điểm công tác. Độ dốc m là $dq/d(p_1$-$p_2)$ và có giá trị:

$$m = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{C}{2\sqrt{p_{01} - p_{02}}} \tag{2.126}$$

Ở đây $(p_{01}$-$p_{02})$ là giá trị tại điểm hoạt động. Đối với các thay đổi nhỏ quanh điểm công tác, có thể thay đồ thị không tuyến tính bằng đường thẳng độ dốc m , như vậy có thể viết $m=\Delta q/\Delta(p_1$-$p_2)$, do vậy:

$$\Delta q = m\Delta(p_1 - p_2) \tag{2.127a}$$

Nếu có $C=2m^3/s/kPa$,→ $q=2(p_1$-$p_2)$, nếu ở điểm hoạt động $(p_1$-$p_2)=4kPa$ với $m=2/(2\sqrt{4})=0.5$; tuyến tính hoá, phương trình có thể viết là:

$$\Delta q = 0.5\,\Delta(p_1 - p_2) \tag{2.127b}$$

Trên đây là vấn đề dòng chảy qua lỗ có tiết diện không đổi. Nếu như dòng chảy qua van điều chỉnh (tiết điện ngang của van được điều chỉnh để thay đổi tốc độ dòng chảy), vấn đề sẽ khác. Trong trường hợp này

$$q = CA\sqrt{p_1 - p_2} \tag{2.128}$$

Do cả A và $(p_1$-$p_2)$ đều có thể thay đổi, phải tuyến tính hoá phương trình khi một hay cả hai biến thay đổi. Nhờ nguyên lí xếp chồng, ta có thể xem xét trường hợp các biến thay đổi độc lập. Sau đó cộng hai kết quả để có được phương trình cho trường hợp cả hai thay đổi. Như vậy đối với các thay đổi quanh điểm công tác, các dốc của đồ thị q đối với A sẽ là:

$$m_1 = \frac{dq}{dA} C\sqrt{p_{01} - p_{02}} \tag{2.129}$$

Vì $\Delta q = m_1 \Delta A$ (chỉ số o được sử dụng để hiển thị các giá trị tại điểm hoạt động) . Đối với đồ thị, quan hệ q đối với $(p_1 - p_2)$:

$$m_2 = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{CA_0}{2\sqrt{p_{01} - p_{02}}} \tag{2.130}$$

Vì vậy $\Delta q = m_2 \Delta(p_1 - p_2)$. Tuyến tính hoá khi cả hai biến có thể thay đổi sẽ là:

$$\Delta q = m_1 \Delta A + m_2 \Delta(p_1 - p_2) \tag{2.131}$$

Các mô hình toán học tuyến tính hoá được sử dụng vì phần lớn kỹ thuật của các hệ thống điều khiển dựa trên mối quan hệ có sự tuyến tính hoá cho các thành phần của hệ thống. Do đa số các bộ điều khiển giữ đầu ra bằng với một giá trị tham chiếu, các thay đổi so với giá trị này thường nhỏ, nên mô hình tuyến tính hoá sử dụng rất thích hợp.

Ví dụ2.14: để minh hoạ trường hợp trên, xét một thermistor sử dụng để đo nhiệt trong một hệ thống điều khiển . Mối quan hệ giữa trở R của thermistor và nhiệt độ T của nó là: $R = ke^{-cT}$.

Có thể tuyến tính hoá phương trình này quanh điểm hoạt động T_o: độ dốc m của biểu đồ R-T tại điểm hoạt động T_o được cho bởi dR/dT, như vậy:

$$m = \frac{dR}{dt} = -kce^{-cT_o} \tag{2.132}$$

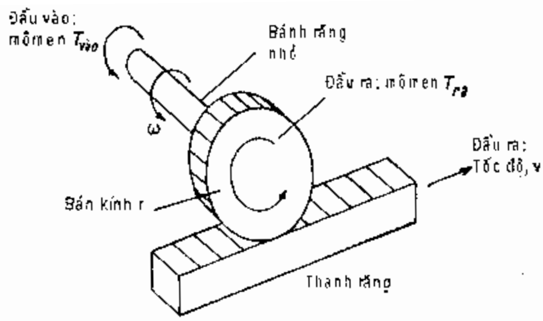
Nên :

$$\Delta R = m\Delta T = (-kce^{-cT_o})\,\Delta T \tag{2.133}$$

2.2.2. Hệ thống quay- tịnh tiến

Có nhiều cơ cấu cơ khí để biến đổi chuyển động quay thành tịnh tiến hoặc ngược lại. Ví dụ như bánh răng–thanh răng, trục với vít me dẫn, puli và hệ thống cáp, v..v.

Để phân tích các hệ thống như vậy, xét một hệ thống bánh răng- thanh răng(hình 2.28), chuyển động quay của bánh răng được chuyển thành tịnh



Hình 2.28: *Hệ thống bánh- thanh răng*

tiến của thanh răng. Trước hết xét bánh răng. Mômen hữu ích tác động lên bánh răng là ($T_{vào}$-T_{ra}) (bỏ qua mômen thành phần ì và giảm chấn):

$$T_{vào}-T_{ra} = I\frac{d\omega}{dt} \qquad (2.134)$$

Trong đó I là mômen quán tính của bánh răng và ω là tốc độ góc của bánh răng. Bánh răng quay tạo nên tốc độ tịnh tiến v của thanh răng. Nếu r là bán kính bánh răng, thì $v= r\omega$, có thể viết lại:

$$T_{vào}-T_{ra} = \frac{I}{r}\frac{dv}{dt} \qquad (2.135)$$

Tiếp theo xét thanh răng. Sẽ có lực $F = \frac{T}{r}$ tác dụng lên thanh răng do chuyển động của bánh răng. Nếu có một lực ma sát $F_{ms}= cv$, thì lực tổng sẽ là :

$$\frac{T_{ra}}{r} - cv = m\frac{dv}{dt} \qquad (2.136)$$

Khử T_{ra} ở cả hai phương trình (2.135, 2.136) , ta có

$$T_{vào} - rcv = (\frac{I}{r} + mr)\frac{dv}{dt} \qquad (2.137)$$

Như vậy:

$$\frac{dv}{dt} = (\frac{r}{I + mr^2})(T_{vào} - rcv) \qquad (2.138)$$

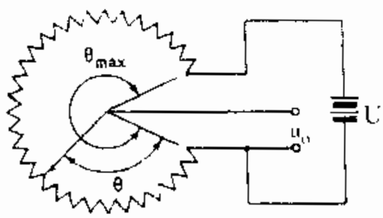
Kết quả (2.138) là một phương trình vi phân bậc một, miêu tả mối liên quan đầu ra với đầu vào hệ thống quay-tịnh tiến.

2.2.3. Hệ thống cơ điện (electromechanical)

Thiết bị cơ điện như chiết áp (potentiometer), động cơ (motor), máy phát (generator) đều chuyển tín hiệu điện thành chuyển động quay tròn và ngược lại. Ở đây ta xét để đưa ra mô hình cho các hệ thống như vậy.

2.2.3.1. Chiết áp

Chiết áp là dụng cụ chia điện áp (hình 2.29), có đầu vào là chuyển động tròn, đầu ra là hiệu điện thế.



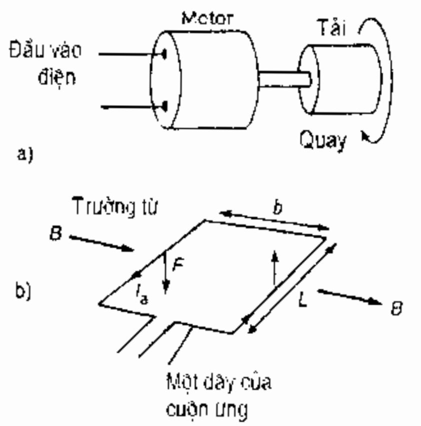
Hình 2.29 : Chiết áp (potentiometer)

$$\frac{u_0}{U} = \frac{\theta}{\theta_{max}} \qquad (2.139)$$

Trong đó U là hiệu điện thế qua chiều dài toàn bộ của rãnh potentiometer và θ_{max} là góc tổng con trượt quét qua từ một đầu mút rãnh sang đầu mút khác. Đầu ra là u_o đối với đầu vào θ.

2.2.3.2. Động cơ DC

Động cơ điện có đầu vào là một hiệu điện thế, đầu ra là chuyển động quay của trục (chuyển đổi tín hiệu điện đầu vào thành tín hiệu cơ đầu ra (hình 2.30a)). Động cơ cơ bản gồm một cuộn dây, cuộn phần ứng quay tự do . Cuộn này được đặt trong một trường từ , được tạo nên bởi dòng điện qua các cuộn trường. Khi một dòng điện i_a qua cuộn ứng, do tác dụng của từ trường, tạo ra các lực tác dụng lên cuộn dây, làm roto quay (hình 2.30b). Lực F tác dụng lên dây có dòng điện i_a , chiều dài L, trong trường từ có mật độ thông lượng B tại các góc vuông với dây, được cho bởi:



Hình2.30 : Động cơ DC
a) Kéo một tải b) Nguyên lí động cơ cơ sở

$$F = Bi_aL \qquad (2.140)$$

Với N dây:

$$F = NBi_aL \qquad (2.141)$$

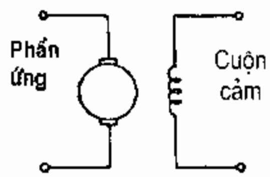
Các lực trên cuộn lõi tạo thành mômen T: $T = Fb$, b là bề rộng của cuộn dây, nên:

$$T = NBi_aLb \qquad (2.142)$$

Mômen tổng này tỉ lệ với (Bi_a), các thông số khác trong (2.142)không đổi nên có thể viết lại:

$$T=k_t Bi_a \tag{2.143}$$

Do lõi là một cuộn quay trong từ trường, sẽ gây ra một điện áp như là hệ quả của cảm ứng điện từ. Điện áp này theo hướng ngược với thay đổi sinh ra nó, gọi là sức điện động ngược (back e.m.f). Sức điện động ngược u_b này, tỉ lệ thuận với tốc độ quay của phần ứng và thông lượng được kết nối bởi cuộn dây, mật độ thông lượng là B, thì:

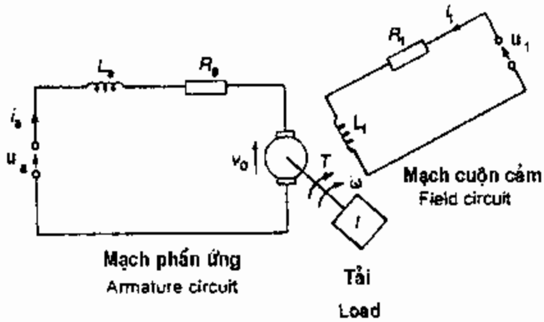


Hình 2.31: DC kích hoạt riêng

$$u_b=k_2 B\omega \tag{2.144}$$

Trong đó ω là tốc độ góc của trục và k_2 là một hằng số.

Xét một động cơ DC. có cuộn lõi (phần ứng) và cuộn trường (cuộn cảm) kích riêng lẻ (xem hình 2.31). Động cơ được gọi là *điều khiển phần ứng* (armature –controlled motor) khi động cơ có dòng điện cuộn cảm i_f giữ cố định; điều khiển động cơ thực hiện bằng điều chỉnh điện áp phần ứng u_a. Dòng điện cuộn cảm cố định đồng nghĩa mật độ thông lượng B cố định cho cuộn lõi. Như vậy:



Hình 2.32: Mạch động cơ DC

$$u_b = k_2 B\omega = k_3\omega \tag{2.145}$$

Ở đây k_3 là một hằng số. Mạch phần ứng có thể xem là một trở R_a nối tiếp với cuộn cảm L_a (hình 2.32). Nếu u_a là điện áp của mạch phần ứng, do có sức điện động ngược (back e.m.f) u_b, ta có:

$$u_a - u_b = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \tag{2.146}$$

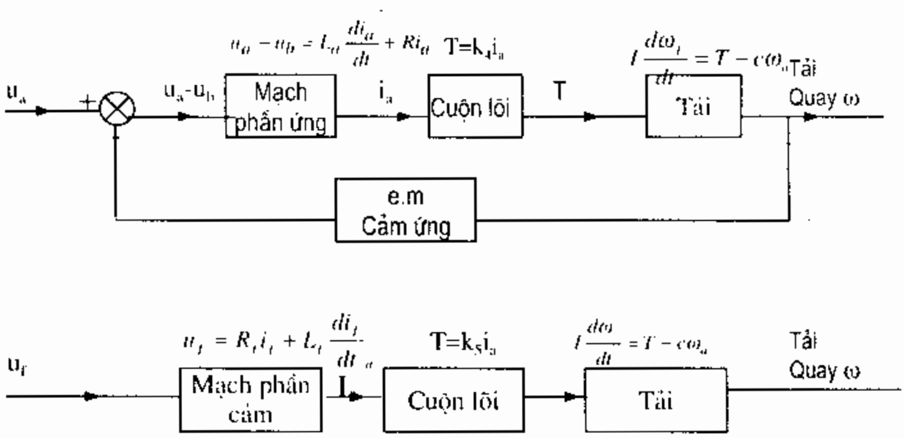
Các thành phần của phương trình (2.146) có thể thể hiện theo biểu đồ hình 2.33(a). Đầu vào hệ thống động cơ là u_a, được cộng với tín hiệu phản hồi (tức suất điện động e.m.f ngược) u_b để thành một tín hiệu sai lệch (u_a-u_b)-

đầu vào mạch phần ứng . Phương trình (2.146) miêu tả mối quan hệ giữa đầu vào- tín hiệu sai lệch vào cuộn lõi và đầu ra- dòng điện cuộn lõi i_a. Thay u_b bởi vế trái của (2.145) ta có:

$$u_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \tag{2.147}$$

Dòng i_a trong lõi sinh mômen T. Đối với động cơ điều khiển phần ứng, B là một hằng, ta có:

$$T = k_I B i_a = k_4 i_a \tag{2.148}$$



Hình2.33 : Động cơ DC

a) Điều khiển dòng ứng b) Điều khiển trường

Trong đó k_4 - hằng số . Mômen này trở thành đầu vào của hệ thống chịu tải (load system). Mômen hữu ích tác dụng lên tải là:

$$\textit{Mômen hữu ích} = T - \textit{mômen cản} \tag{2.149}$$

Mômen cản bằng $c\omega$, (c là hằng số) . Nếu bỏ qua mọi tác động do tính đàn hồi xoắn của trục ta có:

$$\textit{Mômen hữu ích} = k_4 i_a - c\omega \tag{2.150}$$

Mômen này gây ra gia tốc góc dω/dt, nên

$$I\frac{d\omega}{dt} = k_4 I_a - c\omega \tag{2.151}$$

Ta có hai phương trình miêu tả điều kiện cho động cơ điều khiển phần ứng, là:

$$u_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \quad \text{và} \quad I\frac{d\omega}{dt} = k_4 i_a - c\omega \tag{2.152}$$

Từ phương trình (2.152), có thể thu được các phương trình quan hệ đầu ra, ω với đầu vào, u_a của hệ thống khi khử i_a, (xem thêm phần 4.1.1 về chuyển đổi Laplace).

Động cơ *điều khiển phần cảm* (field controlled motor): dòng phần ứng i_a được giữ cố định và động cơ được điều khiển bằng cách thay đổi điện áp mạch cuộn cảm. Mạch này (hình 2.32) chủ yếu gồm cuộn cảm L_f nối tiếp với trở R_f. Trong mạch đó:

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \tag{2.153}$$

Có thể xét một động cơ điều khiển lõi với các thành phần theo sơ đồ hình 2.33b: đầu vào hệ thống là u_f, mạch cuộn cảm biến đổi điện áp thành dòng i_f , mối quan hệ u_f và i_f được thể hiện ở phương trình (2.153). Dòng này dẫn đến sinh một trường từ , tạo mômen T tác động lên cuộn lõi, $T=k_1Bi_a$. Do B tỉ lệ thuận với dòng cảm i_f và i_a không đổi, nên:

$$T=k_1Bi_a=k_5i_f \tag{2.154}$$

k_5 là hằng số . Mômen đầu ra được hệ thống tải chuyển thành tốc độ góc ω. Như phương trình (2.149), mômen hữu ích động lên tải là:

$$\textit{Mômen hữu ích} = T\text{-}\textit{mômen cản} \tag{2.155}$$

Mômen cản là cω, c là hằng số , nếu mọi ảnh hưởng do tính đàn hồi xoắn của trục được bỏ qua thì:

$$\textit{Mômen hữu ích} = k_5 i_f - c\omega \tag{2.156}$$

Mômen này gây ra gia tốc góc dω/dt, nên:

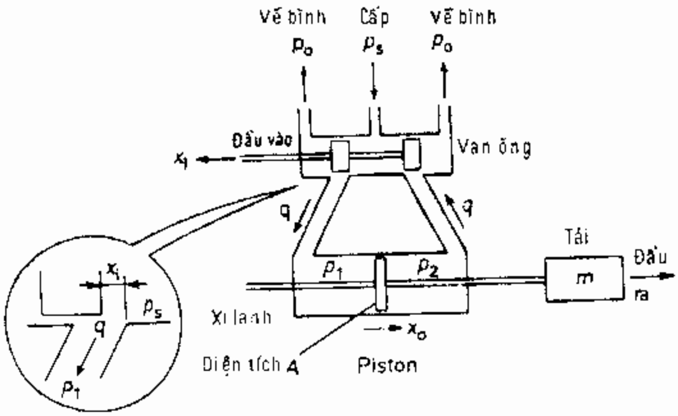
$$I\frac{d\omega}{dt} = k_5 i_f - c\omega \tag{2.157}$$

Điều kiện cho một động cơ điều khiển trường là:

$$u_f = R_f I_f + L_f \frac{di_f}{dt} \text{ và } I\frac{d\omega}{dt} = k_5 i_f - c\omega \tag{2.158}$$

2.2.4. Hệ thống cơ -thuỷ lực

Hệ thống cơ- thuỷ lực chuyển đổi tín hiệu thủy lực thành tín hiệu chuyển động tịnh tiến hoặc chuyển động quay tròn và ngược lại. Ví dụ, chuyển động của piston trong xilanh là kết quả của áp suất thủy lực khi có sự chuyển đổi áp thuỷ lực- đầu vào hệ thống thành chuyển động tịnh tiến- đầu ra.



Hình 2.34 :Hệ thống thủy lực và tải

Hình 2.34 thể hiện một hệ thống thuỷ lực : đầu vào là chuyển vị x_i, sau khi qua hệ thống, chuyển thành chuyển vị x_0của tải. Hệ thống bao gồm một *van ống* và một *xi lanh*. Đầu vào- chuyển vị x_i về phía trái tạo bởi áp cấp p_S làm chất lỏng chảy về mặt trái của xi lanh, đẩy piston trong xilanh về phía phải và đẩy nước ở mặt bên phải của khoang qua cửa ra tại mút phải của van ống. Tốc độ của dòng chất lỏng chảy *vào và ra* khỏi khoang phụ thuộc vào độ mở rộng cổng, cho phép dòng chất lỏng vào hoặc rời van . Khi đầu vào- dịch chuyển x_i ở bên phải van ống làm chất lỏng chuyển động về mút phải của xi lanh, tạo nên chuyển động piston về phía trái.

Tốc độ dòng q qua lỗ (là các cổng trong van ống) là quan hệ không tuyến tính, phụ thuộc vào chênh lệch áp giữa hai mặt và tiết diện A của lỗ. Ta có thể sử dụng tuyến hóa phương trình (xem 2.2.1):

$$\Delta q = m_1 \Delta A + m_2 \Delta(\text{chênh lệch áp}) \tag{2.159}$$

Trong đó m_1 và m_2 là hằng số tại điểm làm việc. Trong khoang, chênh lệch áp tại đầu vào là (p_S-p_1), tại cổng ra là (p_2-p_o). Nếu điểm công tác, quanh nó phương trình được tuyến tính hoá, là điểm mà tại đó van ống nằm giữa và các cổng nối nó với xilanh đều đóng, thì $q=0$ và $\Delta q=q$; A tỉ lệ với x_S nếu x_S được đo từ vị trí giữa, và sự thay đổi áp ở phía mặt vào piston là $-\Delta p_1$, tương quan với p_S, và ở phía ra Δp_2 tương quan với p_o. Như vậy, phương trình viết cho cổng vào là:

$$q = m_1 x_i + m_2(-\Delta p_1) \tag{2.160}$$

và cho cổng ra:

$$q = m_1 x_i + m_2 \Delta p_2 \tag{2.161}$$

Cộng 2 phương trình, ta có:

$$2q=2m_1x_i-m_2(\Delta p_1-\Delta p_2) \qquad (2.162a)$$

$$q=m_1x_i-m_3(\Delta p_1-\Delta p_2) \qquad (2.162b)$$

Trong đó $m_3=m_2/2$

Đối với xilanh, sự thay đổi dung tích chất lỏng vào phía bên trái khoang, hoặc rời khoang ở phía bên phải, khi piston chuyển một đoạn x_o là Ax_o. (A là tiết diện ngang của piston). Như vậy, thể tích thay đổi theo tốc độ là $A(dx_o/dt)$. Nếu chất lỏng vào bên trái xilanh với tốc độ q, do có sự rò chất lỏng từ mặt này sang mặt kia piston, nên:

$$q=A\frac{dx_o}{dt}+q_L \qquad (2.163)$$

Ở đây q_L là tốc độ rò. Thay thế q bởi vế trái của (2.162) ta có:

$$m_1x_i-m_3(\Delta p_1-\Delta p_2)=A\frac{dx_o}{dt}+q_L \qquad (2.164)$$

Tốc độ rò q_L là lưu lượng qua khe hở giữa piston và xilanh. Đối với một tiết diện cố định có chênh lệch áp $(\Delta p_1-\Delta p_2)$, sử dụng phương trình tuyến tính hoá cho dòng:

$$q_L=m_4(\Delta p_1-\Delta p_2) \qquad (2.165)$$

Sử dụng phương trình này thay vào q_L ở (2.164)):

$$m_1x_i-m_3(\Delta p_1-\Delta p_2)=A\frac{dx_o}{dt}+m_4(\Delta p_1-\Delta p_2) \qquad (2.166)$$

$$m_1x_i-(m_3+m_4)(\Delta p_1-\Delta p_2)=A\frac{dx_o}{dt} \qquad (2.167)$$

Chênh lệch áp qua piston tạo nên lực $(\Delta p_1-\Delta p_2)A$ đặt lên tải. Tuy nhiên còn có thành phần cản chuyển động. Thành phần này tỉ lệ với tốc độ của khối, (dx_o/dt)). Như vậy lực hữu ích tác dụng lên tải là:

$$\text{Lực hữu ích}=(\Delta p_1-\Delta p_2)A-c\frac{dx_o}{dt} \qquad (2.168)$$

Lực này làm khối lượng tăng tốc, (d^2x_0/dt^2), nên

$$m\frac{d^2x_o}{dt^2}=(\Delta p_1-\Delta p_2)A-c\frac{dx_o}{dt} \qquad (2.169)$$

Sắp xếp lại công thức này, ta có:

$$\Delta p_1-\Delta p_2=\frac{m}{A}\frac{d^2x_o}{dt^2}+\frac{c}{A}\frac{dx_o}{dt} \qquad (2.170)$$

Sử dụng phương trình này để thay vào chênh lệch áp ở công thức (2.167):

$$m_1x_i-(m_3+m_4)\left(\frac{m}{A}\frac{d^2x_o}{dt^2}+\frac{c}{A}\frac{dx_0}{dt}\right)=A\frac{dx_o}{dt} \qquad (2.171)$$

Sắp xếp lại:

$$\frac{m(m_3+m_4)}{A}\frac{d^2x_o}{dt^2}+\left(A+\frac{c(m_3+m_4)}{A}\right)\frac{dx_0}{dt}=m_1x_i \qquad (2.172)$$

Dẫn đến:

$$\frac{m(m_3+m_4)}{A^2+c(m_3+m_4)}\frac{d^2x_o}{dt^2}+\frac{dx_0}{dt}=\frac{Am_1}{A^2+c(m_3+m_4)}x_i \qquad (2.173)$$

Phương trình (2.173) có thể đơn giản hoá khi thay các hằng số bằng k và τ; τ được gọi là hằng thời gian (xem chương3):

$$\tau\frac{d^2x_o}{dt^2}+\frac{dx_0}{dt}=kx_i \qquad (2.174)$$

(2.171) là mối quan hệ giữa đầu ra và đầu vào được thể hiện dưới dạng phương trình vi phân bậc hai của một hệ thống cơ- thuỷ lực.

CHƯƠNG 3. ĐÁP ỨNG ĐỘNG HỌC CỦA CÁC HỆ THỐNG

Phân tích động học của các hệ thống để dự đoán và hiểu hoạt động của hệ thống có thể thực hiện bằng mô hình toán học miêu tả cách "ứng xử" động học thích hợp của hệ thống. Thông thường, một mô hình được trình bày chính xác để miêu tả hoạt động liên tục hoặc gián đoạn đối với thời gian của một hệ thống.

Các phương trình tương ứng chi phối mô hình được sử dụng để dự đoán và hiểu hoạt động động học của hệ thống. Thực tế, một phân tích chặt chẽ có thể thực hiện được với những mô hình tương đối đơn giản. Thông thường, các phân tích đáp ứng động học được giới hạn ở các mô hình bậc 1 và 2 tuyến tính. Dù vậy, các giải pháp này đã có thể cho thấy những đáp ứng động học đặc trưng của hệ thống. Đối với các mô hình bậc cao, không tuyến tính ngày nay đã có thể dễ dàng giải nhờ sự giúp đỡ của máy tính.

3.1. PHẢN ỨNG ĐỘNG HỌC

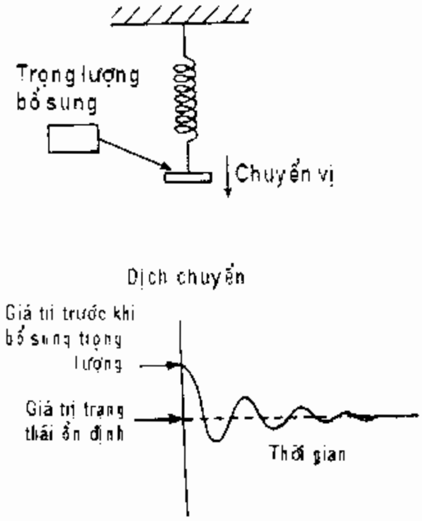
3.1.1. Mô hình hệ thống động học

Một trong những chức năng quan trọng của một mô hình được phát triển cho hệ thống đo hoặc điều khiển là có khả năng dự đoán đầu ra sẽ như thế nào đối với một đầu vào. Những vấn đề này không thuộc trường hợp tĩnh. Đó là trường hợp sau một khoảng thời gian, khi đã đạt trạng thái xác lập một đầu ra x tương ứng với một đầu vào y. Phải xem xét đầu ra thay đổi như thế nào với thời gian khi có sự thay đổi ở đầu vào hoặc khi đầu vào thay đổi với thời gian.

Chương 2 đã thể hiện những vấn đề liên qua mô hình hệ thống dưới dạng mô hình toán học. Phần này ta sử dụng các mô hình như vậy để thực hiện dự đoán các đầu ra sẽ thay đổi như thế nào theo thời gian khi đầu vào thay đổ.

3.1.1.1. Đáp ứng ở trạng thái –quá độ và trạng thái- xác lập

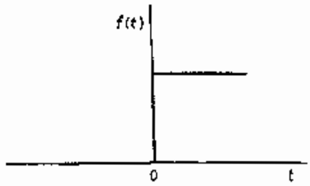
Đáp ứng của một hệ thống điều khiển được xem có hai thành phần, đáp ứng ở *trạng thái quá độ* (transient response) và đáp ứng ở *trạng thái xác lập* (steady-state response). Đáp ứng ở trạng thái quá độ là phần đáp ứng của hệ thống xảy ra khi có một thay đổi trong đầu vào và tắt sau một thời gian ngắn. đáp ứng ở trạng thái xác lập là đáp ứng giữ nguyên sau khi tất cả các đáp ứng quá độ đã tắt.



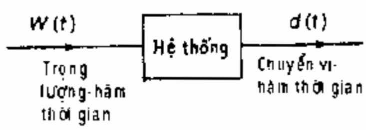
Hình 3.1 : Phản ứng ở trạng thái quá độ và ổn định của một hệ lò xo

Một minh họa đơn giản là một lò xo được treo thẳng đứng (hình 3.1). Điều gì sẽ xảy ra khi có một trọng lượng bất ngờ được gá vào lò xo. Độ võng của lò xo đột ngộ tăng, sau đó có thể dao động cho đến sau một khoảng thời gian, ổn định ở một giá trị xác định. Giá trị xác định là đáp ứng ở trạng thái xác lập của hệ thống lò xo, dao động xẩy ra trước khi đạt trạng thái xác lập là đáp ứng quá độ. Đầu vào hệ thống lò xo là trọng lượng, đại lượng thay đổi với thời gian. Cho đến một thời gian nào đó không còn sự bổ sung trọng lượng, lúc này đầu vào mới giữ, không đổi cho hết thời gian còn lại. Kiểu đầu vào như vậy gọi là đầu vào dạng bậc (step input), có đồ thị biểu diễn như hình 3.2.

Cả đầu vào và đầu ra đều là hàm của thời gian, có thể viết dưới dạng f(t) với kí hiệu *f* là hàm và *(t)* mang nghĩa biến thời gian. Như vậy đối với trọng lượng W-đầu vào hệ thống lò xo ta có thể viết W(t) và đối với độ võng *d*-đầu ra hệ thống là *d(t)*. Biểu đồ khối của hệ thống được thể hiện như hình 3.3.



Hình 3.2:Hàm bậc tại t=0



Hình 3.3: Hệ thống lò xo

3.1.1.2. Phương trình vi phân

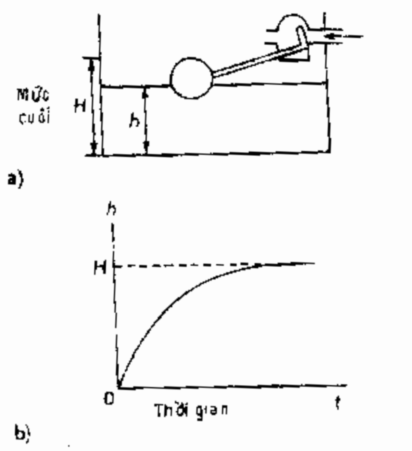
Để miêu tả mối quan hệ giữa đầu vào và đầu ra một hệ thống ta phải miêu tả mối quan hệ giữa chúng bằng hàm của thời gian. Ta cần dạng phương trình cho biết đầu ra sẽ thay đổi như thế nào với thời gian khi đầu vào thay đổi. Điều này có thể thực hiện được nếu sử dụng *phương trình* *vi phân*. Phương trình này bao gồm các đạo hàm đối với thời gian, qua đó cho thông tin về đáp ứng của hệ thống đối với thời gian. Hàm dx/dt miêu tả tốc độ x thay đổi đối với thời gian, d^2x/dt^2 (d(dx/dt)/dt) thể hiện sự thay đổi dx/dt với thời gian. Các phương trình vi phân có thể phân thành phương trình bậc 1, bậc 2 và bậc 3, v...v, phụ thuộc vào mức cao nhất của đạo hàm trong phương trình. Đối với phương trình bậc 1, mức của đạo hàm cao nhất là dx/dt, bậc 2 là d^2x/dt^2 và bậc 3 là d^3x/dt^3. Sau đây ta sẽ xem xét đáp ứng của các hệ thống có mô hình toán học bậc 1 và bậc 2, sử dụng cách tiếp cận gọi là "thử tìm kết quả -try a solution" để tìm đáp án. Phương pháp chuyển đổi Laplace được giới thiệu trong phần 3.2 được sử dụng để phân tích các hệ thống liên tục đối với thời gian.

3.1.2. Các hệ thống bậc 1

Ví dụ 3.1 :Một minh hoạ cho hệ thống bậc 1 là một bể nước điều khiển phao (hình 3.4(a). Ở hệ thống này, tốc độ nước vào bể và vì thế làm thay đổi độ cao cột nước trong thùng là hàm thời gian, phụ thuộc vào chênh lệch giữa chiều cao h của nước trong thùng và độ cao H, tại đó phao đóng nước hoàn toàn, tức tốc độ thay đổi cột nước tỉ lệ với (H-h):

$$\frac{dh}{dt} = k(H-h) \qquad (3.1)$$

trong đó *dh/dt* là tốc độ thay đổi chiều cao, *k* là hằng số. Mức nước trong thùng càng tăng, giá trị *(H-h)* càng nhỏ, như vậy tốc độ thay đổi cột nước đối với thời gian *(dh/dt)* cũng càng nhỏ. Biểu đồ cột nước đối với thời gian thể hiện như hình3.4(b). Phương trình miêu tả biểu đồ này là:



Hình 3.4 : *Điều khiển mức nước bằng phao*

$$h=H(1-e^{-kt}) \qquad (3.2)$$

Tất cả các hệ thống bậc 1 có đặc tính là tốc độ thay đổi của biến tỉ lệ thuận với chênh lệch giữa biến và giá trị đặt cho biến (có thể là zero). Tất cả chúng có dạng nghiệm như thể hiện ở phương trình (3.2)

Ví dụ 3.2: Xét một nhiệt kế đặt trong một chất lỏng nóng có nhiệt độ θ_0.

Tốc độ -giá trị đọc trên nhiệt kế θ thay đổi theo thời gian, tỉ lệ với chênh lệch giữa θ và θ_H. Dạng phương trình vi phân miêu tả nhiệt độ của nhiệt kế thay đổi với thời gian là:

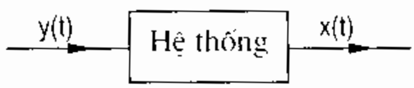
$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - \theta_H) \qquad (3.3)$$

k là hằng số. Đây là mối quan hệ đặc trưng của hệ thống bậc 1.

Đối với hệ thống bậc 1 có đầu vào θ_H và một đầu ra θ ta sẽ có phương trình đặc trưng của hệ thống bậc 1 là:

$$\theta = \theta_H (1 - e^{-kt}) \qquad (3.4)$$

3.1.2.1. Phương trình vi phân bậc 1

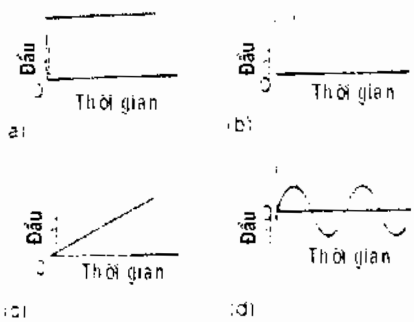


Hình3.5 : Hệ thống

Xét 1 hệ thống bậc 1 (hình 3.5) với *y(t)* là đầu vào và *x(t)* là đầu ra hệ thống, có tốc độ thay đổi tín hiệu đầu ra tỉ lệ với $(b_0 y - a_0 x)$, khi đó phương trình vi phân có dạng :

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \qquad (3.5)$$

Trong đó a_1, a_0, b_0 là hằng số.



Hình3.6: Các tín hiệu vào a) Bậc b) Xung lực c) Dốc d) Sin

Tín hiệu đầu vào hệ thống *y(t)* có thể có nhiều dạng . Dạng thường gặp nhất là dạng bậc (step input). Đây là dạng khi đầu vào bất thình lình thay đổi giá trị, như hình 3.6 (a). Những dạng thường gặp khác là tín hiệu dạng xung lực (impulse), dốc (ramp), dạng sin. Xung lực là tín hiệu đầu vào trong một khoảng thời gian rất ngắn, hình 3.6b, tín hiệu dốc là đầu vào liên tục tăng, hình 3.6c , có thể miêu tả bởi phương trình $y=kt$, với k là hằng số. Một đầu vào hình sin, hình 3.6d, có thể miêu tả là một phương trình dạng $y=k\sin\omega t$ với ω gọi là tần số góc và $\omega = 2\pi f$ (f là tần số).

3.1.2.2. Giải phương trình bậc 1

Giải phương trình bậc 1 là phương pháp đưa ra một biểu thức thể hiện trực tiếp đầu ra hay đổi như thế nào với thời gian, liên quan đến sự nhận biết loại nghiệm phù hợp với phương trình và xác định nghiệm đó.

Xét một phương trình vi phân bậc 1 có đầu vào *y(t)*, đầu ra *x(t)* và một phương trình vi phân có dạng:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \tag{3.6}$$

Tín hiệu đầu vào hệ thống *y(t)* có thể có nhiều kiểu:

1. Trường hợp, *đầu vào bằng 0*. Vì không có tín hiệu vào hệ thống, ta không có tín hiệu cưỡng bức hệ thống đáp ứng nào khác là đáp ứng tự nhiên của nó với đầu vào 0. Khi đó phương trình vi phân là:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \tag{3.7}$$

Ta hãy thử với nghiệm dạng $x=Ae^{st}$; A và s là hằng số. Khi đó ta có $dx/dt=sAe^{st}$. Thay thế các giá trị này vào phương trình vi phân (3.7) :

$$a_1 sAe^{st} + a_0 Ae^{st} = 0 \tag{3.8}$$

như vậy

$$a_1 s + a_0 = 0 \tag{3.9}$$

với $s=-a_0/a_1$, nghiệm sẽ là

$$x = Ae^{-a_0/a_1} \tag{3.10}$$

đáp ứng này thuật ngữ gọi là đáp ứng tự nhiên (natural response) vì không có hàm cưỡng bức.

2. Xét phương trình vi phân khi là hàm *cưỡng bức*, tức:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \tag{3.11}$$

Chia nghiệm của phương trình này thành 2 phần, $x=u+v$. u thể hiện trạng thái quá độ và v- trạng thái xác lập . Thay vào phương trình (3.11) có thể viết:

$$a_1 \frac{d(u+v)}{dt} + a_0(u+v) = b_0 y \tag{3.12}$$

sắp xếp lại:

$$(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u) + (a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v) = b_0 y \tag{3.13}$$

Nếu để:

$$a_1\frac{dv}{dt}+a_0v=b_0y \qquad (3.14)$$

ta phải có:

$$a_1\frac{du}{dt}+a_0u=0 \qquad (3.15)$$

(3.14) và (3.15) là hai phương trình vi phân, một chứa hàm cưỡng bức và 1 là phương trình đáp ứng tự nhiên. Phương trình tự nhiên, có nghiệm dạng:

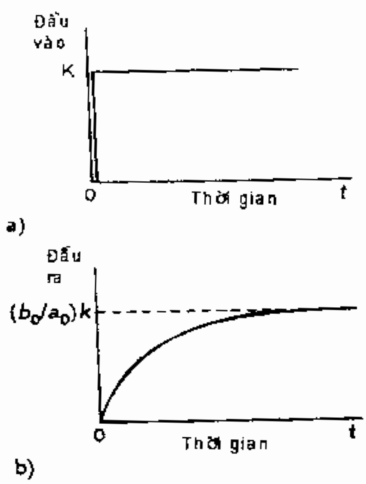
$$u=Ae^{-a_0t/a_1} \qquad (3.16)$$

Phương trình còn lại chứa hàm cưỡng bức y. Đối với phương trình vi phân này, kiểu nghiệm có thể thử phụ thuộc vào dạng tín hiệu đầu vào y. Với một *đầu vào* dạng bậc, khi y không đổi và lớn hơn 0 tại mọi thời gian, tức $y=k$, ta có thể thử nghiệm $v=A$ (A là hằng số). Nếu tín hiệu đầu vào có dạng $y=a+bt+ct^2+\ldots$, với a, b, c là hằng (có thể bằng 0). Khi đó ta có thể thử nghiệm dạng $v=A+Bt+ct^2+\ldots$ Đối với tín hiệu vào dạng SIN ta có thể thử nghiệm v=Acosωt+Bsinωt

Giả sử có hệ thống có đầu vào *dạng bậc*, độ lớn k, tại thời điểm t=0. Ta có thể thử nghiệm dạng $v=A$. Đạo hàm của một hằng bằng 0, như vậy khi thay thế vào phương trình vi phân (3.14) ta được :

$$a_0A=b_0k \qquad (3.17)$$

Vậy : $$v=(b_0/a_0)k \qquad (3.18)$$



Hình 3.7 : Hệ thống bậc 1
a) Đầu vào bậc
b) Đầu ra kết quả

Nghiệm đủ có dạng: $y=u+v$, như vậy:

$$y=Ae^{-a_0t/a_1}+\frac{b_0}{a_0}k \qquad (3.19)$$

Giá trị của hằng A có thể xác định nếu có các điều kiện biên, ví dụ, nếu đầu vào $y=0$ khi $t=0$ thì:

$$0=A+\frac{b_0}{a_0}k$$

Như vậy: $A=-(b_0/a_0)k$.

Khi đó nghiệm trở thành:

$$x=\frac{b_0}{a_0}k(1-e^{-a_0t/a_1}) \qquad (3.20)$$

Nếu t→ ∞, số mũ sẽ tiến đến 0, số hạng có số mũ thể hiện phần phản ứng, nghiệm trạng thái tạm thời. Khi ấy $x=(b_0/a_0)k$, là đáp ứng của hệ thống ở trạng thái xác lập. Như vậy phương trình có thể viết là:

$$x = \textit{giá trị trạng thái xác lập} \times (1 - e^{-a_0 t/a_1}) \quad (3.21)$$

Hình 3.7 thể hiện đồ thị sự thay đổi đầu ra x với thời gian đối với một đầu vào dạng bậc.

Ví dụ3.3 : Để minh hoạ, ta xét một hệ thống cảm biến điện (hình 2.12) gồm một trở nối tiếp với một tụ. Khi chịu một đầu vào bậc, độ lớn V, thì đầu ra là hiệu điện thế qua tụ, v được cho bởi phương trình vi phân:

$$RC\frac{dv}{dt} + v = V \quad (3.22)$$

Tìm nghiệm của phương trình, tức đáp ứng của hệ thống và thay đổi của v đối với thời gian.

So sánh phương trình vi phân (3.22) với phương trình (3.14) ta có a_1=RC, a_0=1 và b_0=1, khi đó đáp số có dạng:

$$v = V(1 - e^{t/RC}) \quad (3.23)$$

Ví dụ 3.4: Xét trường hợp *đầu vào có dạng dốc* (ramp input). Một mạch điện gồm một trở 1MΩ, nối tiếp với một điện dung 2μF. Tại thời điểm t=0, mạch chịu một điện áp dốc *4tV*, tức điện áp tăng với tốc độ 4V/s . Xác định điện áp qua tụ sẽ thay đổi như thế nào với thời gian.

Phương trình vi phân có dạng tương tự với bài toán phương trình (3.22), nhưng bậc điện áp V ở (3.22) được thay bằng điện áp dốc *4t*, tức:

$$RC\frac{du}{dt} + u = 4t \quad (3.24)$$

Thay các giá trị đã cho vào (3.24), có:

$$2\frac{du}{dt} + u = 4t \quad (3.25)$$

Lấy u=u_n+u_f, tổng của đáp ứng tự nhiên và cưỡng bức, ta có:

$$2\frac{du_n}{dt} + u_n = 0 \quad (3.26)$$

Và:

$$2\frac{du_f}{dt} + u_f = 4t \quad (3.27)$$

Với phương trình vi phân đáp ứng tự nhiên (3.26) , ta có thể thử nghiệm dạng $u_n = Ae^{st}$. Sử dụng giá trị này cho:

$$2Ase^{st} + Ae^{st} = 0 \tag{3.28}$$

Như vậy nếu $s=-1/2$ thì $u_n = Ae^{-t/2}$. Với phương trình vi phân đáp ứng cưỡng bức (3.27), do bên phải của phương trình là 4t, ta có thể thử nghiệm dạng $u_f=A+Bt$. Sử dụng giá trị này cho:

$$2B+A+Bt=4t \tag{3.29}$$

Như vậy ta phải có $B=4$ và $A=-2B=-8$. Khi đó nghiệm của phương trình là $u_f=-8+4t$. Nghiệm đủ của phương trình là:

$$u = u_n + u_f = Ae^{-t/2} - 8 = 4t \tag{3.30}$$

Vì v=0 khi t=0 ta phải có A=8, khi đó:

$$u = 8e^{-t/2} - 8 + 4t \tag{3.31}$$

Ví dụ 3.5: Xét một động cơ có mối quan hệ giữa tốc độ góc đầu ra ω và đầu vào- điện áp v được cho bởi:

$$\frac{IR}{k_1 k_2}\frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_1}u \tag{3.32}$$

Giá trị trạng thái xác lập của tốc độ góc là bao nhiêu? khi đầu vào là bậc có giá trị 1V?

So sánh với phương trình đã giải ở trên, thì $a_1=IR/k_1k_2$, $a_0=1$ và $b_0=1/k_1$. Giá trị trạng thái xác lập cho đầu vào dạng bậc là $(b_0/a_0)k=1/k_1$

3.1.2.3. Hằng thời gian

Đối với một hệ thống bậc 1 chịu một đầu vào dạng bậc có độ lớn k ta có một đầu ra y thay đổi với thời gian t theo:

$$x = \frac{b_0}{a_0}k(1 - e^{-a_0 t/a_1}) \tag{3.33}$$

hoặc: $x=$ *gía trị trạng thái xác lập* $\times (1 - e^{-a_0 t/a_1})$ (3.34a)

Khi thời gian $t=(a_1/a_0)$, thì thành phần mũ có giá trị $e^{-1} = 0,37$, lúc đó:

$x=$ *gía trị trạng thái xác lập* $\times (1 - 0,37)$ (3.34b)

Trong thời gian này, đầu ra đã tăng lên tới 0,63 lần giá trị ở vị trí xác lập . Thời gian này được gọi là *hằng thời gian (time constant)* τ. Trong thời

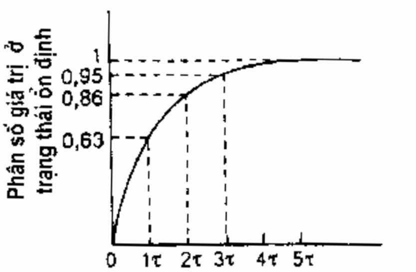
Bảng 3.1 Đáp ứng của hệ thống bậc 1 đối với đầu vào- dạng bậc	
Thời gian t	Phần đầu ra ở trạng thái xác lập
0	0
1τ	0,63
2τ	0,86
3τ	0,95
4τ	0,98
5τ	0,99
∞	1

gian $2(a_1/a_0)=2\tau$, thành phần có số mũ trở thành $e^{-2}=0.14$ nên:

$x=$ *giá trị trạng thái xác lập* $\times(1-0.14)$

Trong thời gian này, đầu ra đã tăng đến 0.86 lần giá trị của nó tại trạng thái xác lập. Tương tự, các giá trị này có thể tính toán cho đầu ra sau 3 τ, 4 τ và 5 τ v...v. Bảng 3.1 thể hiện kết quả tính toán này, còn biểu đồ hình 3.8 thể hiện đầu ra thay đổi như thế nào theo thời gian đối với một đầu vào là bậc đơn vị. Theo τ ta có thể viết phương trình là:

$$x = \text{giá trị trạng thái xác lập} \times(1-e^{-t/\tau}) \quad (3.35)$$



Hình3.8: Phản ứng của hệ thống bậc 1 đối với đầu vào dạng bậc

Trong đó hằng số thời gian τ là (a_1/a_0), ta có thể viết dạng tổng quát của phương trình vi phân bậc nhất:

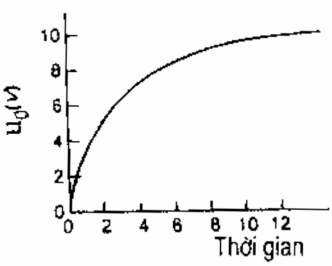
$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=b_0y \quad (3.36)$$

lại là:

$$\tau\frac{dx}{dt}+x=\frac{b_0}{a_0}y \quad (3.37)$$

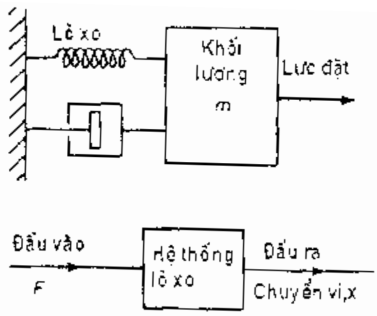
b_0/a_0 là hệ số, nhân với đầu vào y để cho giá trị ở trạng thái xác lập, gọi là *hệ số khuếch trạng thái xác lập* (steady-state gain), thể hiện đầu ra lớn hơn đầu vào bao nhiêu lần dưới điều kiện xác lập. Nếu biểu thị hệ số này là G_{SS} thì phương trình vi phân có thể viết dưới dạng:

$$\tau\frac{dx}{dt}+x=G_{SS}y \quad (3.38)$$



Hình3.9:Ví dụ

Ví dụ 3.6: Để minh hoạ, ta xét đầu ra u_0 của một hệ thống thay đổi như thế nào với thời gian khi chịu một đầu vào bậc - 5V (hình 3.9). Hằng thời gian là thời gian để đầu ra hệ thống bậc 1 thay đổi từ 0 đến 0.63 lần giá trị trạng thái xác lập cuối cùng của nó. Trong trường hợp này τ bằng khoảng $3\ s$. Ta có thể kiểm lại giá trị bằng tìm gía trị tại 2τ, tức $6s$. Tại đó hệ thống bậc 1 có giá trị trạng thái xác lập là 0,86. Trong trường hợp này, đầu ra trạng thái xác lập là 10V. Hệ số G_{SS} (=đầu ra/đầu vào ở trạng thái xác lập) là $10/5=2$. Phương trình vi phân bậc 1 có thể viết:



Hình3.10 : *Hệ thống lò xo bậc 2*

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = G_{SS}x \rightarrow \quad 3\frac{dv_0}{dt} + u_0 = 2u_1 \qquad (3.39)$$

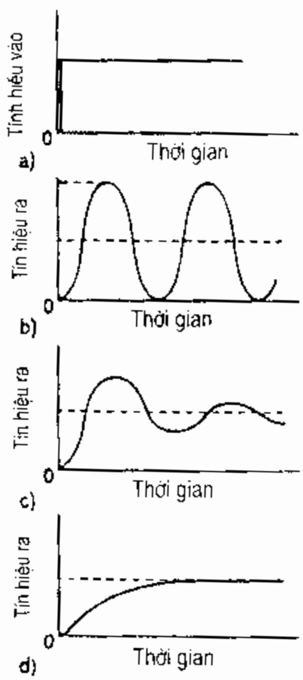
3.1.3. Hệ thống bậc 2

Nhiều hệ thống bậc 2 có thể xem thực chất như một lò xo bị kéo bởi một khối lượng và một số cơ cấu giảm chấn (damping). Hình 3.10 thể hiện đặc trưng của hệ thống này. Hệ thống đã được phân tích ở điểm 2.1.1.3. Phương trình miêu tả quan hệ đầu vào - lực F và đầu ra - khoảng dịch chuyển x là:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \qquad (3.40)$$

trong đó m là khối lượng, c là hằng số giảm chấn và k là hằng số lò xo

Đây là phương trình vi phân bậc 2 của một hệ thống có lực F bất ngờ tác dụng vào, tức là một đầu vào- bậc (hình 3.11a). Lượng dịch chuyển x thay đổi với thời gian phụ thuộc vào lượng giảm chấn trong hệ. Nếu không có giảm chấn, khối lượng sẽ dao động tự do trên lò xo, liên tục không ngừng (hình3.11b). Không có giảm chấn, có nghĩa $cdx/dt=0$. Tuy nhiên, giảm chấn sẽ làm cho các dao động tắt dần (hình 3.11 c) cho đến khi đạt được một dịch chuyển ổn định của khối lượng. Nếu giảm chấn đủ lớn sẽ không có dao



Hình3.11: Tín hiệu đầu ra đối với tín hiệu đầu vào bậc :

a) Không có giảm chấn
b) Với giảm chấn
c) Với giảm chấn mạnh
d) Với giảm chấn đủ lớn

độngvà dịch chuyển của khối lượng sẽ tăng dần theo thời gian, và dần tới vị trí chuyển vị ổn định của nó (hình 3.11d).

Phương trình vi phân bậc hai

Xét chuyển động của một khối lượng tại một mút lò xo, không có giảm chấn trong hệ, khối lượng dao động tự do, đầu ra của hệ thống bậc 2 là một dao động liên tục (dao động điều hoà đơn giản). Ta có thể miêu tả dao động này bằng phương trình:

$$x = ASin\omega_n t \tag{3.41}$$

Trong đó x là khoảng chuyển vị tại thời gian t, A –biên độ dao động, ω_n -tần số góc của dao động không bị cản (undamped oscilations), đạo hàm phương trình (3.41) , ta có:

$$\frac{dy}{dt} = \omega_n A\cos\omega_n t \tag{3.42}$$

Lấy đạo hàm bậc hai theo thời gian

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_n^2 ASin\omega_n t = -\omega_n^2 y \tag{3.43}$$

Rút gọn lại, ta có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_n^2 y = 0 \tag{3.44}$$

Đối với khối lượng m trên lò xo có độ cứng *k* ta có một lực hồi phục:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3.45}$$

Và:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

So sánh hai phương trình vi phân, ta phải có:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{3.47}$$

Và $x = Asin\omega_n t$ là nghiệm của phương trình vi phân 3.46.

Bây giờ, xét trường hợp có giảm chấn (tức có cản). Chuyển động của khối lượng trên lò xo (hình 3.10) khi chịu một đầu vào dạng bậc F được miêu tả bởi :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F \qquad (3.48)$$

Để giải phương trình bậc 2 này (3.48) ta có thể sử dụng phương pháp đã dùng giải phương trình vi phân bậc 1, coi kết quả được tạo bởi hai thành phần, một là đáp ứng tự nhiên và một là đáp ứng cưỡng bức, tức $x=x_n+x_f$. Thay vào x ở phương trình (3.48) , ta có

$$m\frac{d^2(x_n+x_f)}{dt^2}+c\frac{d(x_n+x_f)}{dt}+k(x_n+x_f)=F \qquad (3.49)$$

Nếu để :

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2}+c\frac{dx_n}{dt}+kx_n=0 \qquad (3.50)$$

Thì phải có:

$$m\frac{d^2x_f}{dt^2}+c\frac{dx_f}{dt}+kx_f=F \qquad (3.51)$$

Để giải phương trình trạng thái tự nhiên ta có thể thử nghiệm dạng $x_n=Ae^{st}$. Như vậy $dx_n/dt=Ase^{st}$ và $d^2x_n/dt^2=As^2e^{st}$. Thay các giá trị này vào phương trình vi phân (3.14), cho:

$$mAs^2e^{st}+cAse^{st}+kAe^{st}=0 \qquad (3.52)$$

$$ms^2+cs+k=0 \qquad (3.53)$$

Như vậy $x_n=Ae^{st}$ có thể chỉ là một nghiệm khi phương trình trên khi bằng 0. Phương trình này được gọi là *phương trình bổ trợ (auxiliary equation)*. Nghiệm của phương trình bậc 2 (s) thu được là:

$$s=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{(\frac{c}{2m})^2-\frac{k}{m}}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{k}{m}(\frac{c^2}{4mk})-\frac{k}{m}} \qquad (3.54)$$

đặt $\omega_n^2=k/m$, $\zeta^2=c^2/4km$ ta có thể viết nghiệm trên lại dưới dạng:

$$s=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad (3.55)$$

ζ là *hệ số cản hoặc hệ số giảm chấn (damping factor).*

Giá trị s thu được từ phương trình (3.550 phụ thuộc rất nhiều vào giá trị của thành phần căn bậc 2 . Khi $\zeta^2>1$ căn bậc hai cho bình phương của một số dương, khi $\zeta^2<1$ ta có căn bậc 2 một số âm. Hệ số giảm chấn quyết định thành phần của căn là số dương hoặc số âm, đó là một hệ số chủ yếu trong xác định dạng đầu ra khỏi hệ thống .

Với $\zeta > 1$ có hai nghiệm s_1 và s_2 với

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.56}$$

$$s = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.57}$$

và nghiệm chung , x_n là:

$$x_n = Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} \tag{3.58}$$

Đối với những tình trạng như thế, hệ thống được gọi là *bị cản mạnh (over-damped).*

Khi $\zeta = 1$, có 2 nghiệm bằng nhau, $s_1 = s_2 = -\omega_n$. Đối với điều kiện này, hệ thống được gọi là *bị cản tới hạn (critical damped)*:

$$x_n = (At + B)e^{-\omega_n t} \tag{3.59}$$

Cần phải xác định hai hằng số A,B. Nghiệm của trường hợp này có thể là $x_n = Ae^{st}$

Với $\zeta < 1$ ta có hai nghiệm ảo vì căn một số âm:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{-1}\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{3.60}$$

Thay $\quad j = \sqrt{-1}$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{3.61}$$

Đặt: $\qquad \omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

Có thể viết lại:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega \tag{3.62}$$

Và hai nghiệm là:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega \tag{3.63}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega \tag{3.64}$$

Trong đó ω là tần số góc của chuyển động khi hệ thống trong trạng thái bị cản, định bởi ζ. Nghiệm trong các điều kiện này là:

$$x_n = Ae^{(-\zeta\omega_n + j\omega)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - j\omega)t} = e^{-\zeta\omega_n t}(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}) \tag{3.65}$$

Nhưng $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ và $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$. Nên :

$$x_n = e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega t + jA\sin\omega + B\cos\omega t - jB\sin\omega t)$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}[(A+B)\cos\omega t + j(A-B)\sin\omega t]$$

Nếu thay thế các hằng số P bằng $(A+B)$, Q bằng $(A-B)$, thì:

$$x_n = e^{-\xi\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega) \qquad (3.66)$$

Trong các điều kiện này, ta nói hệ thống *bị cản nhẹ (under-damped.)*

Ở trên đã cho các nghiệm-phần tự nhiên của kết quả. Để giải phương trình cưỡng bức:

$$m\frac{d^2x_f}{dt^2} + c\frac{dx_f}{dt} + kx_f = F \qquad (3.67)$$

Ta cần xét một dạng riêng biệt cho tín đầu vào rồi thử nghiệm kết quả. Với một đầu vào bậc, độ lớn F tại thời gian t=0 ta có thể thử nghiệm xf= A với A là hằng số . Khi đó dxf / dt=0 và d2xf /dt2=0. Khi thay các giá trị này vào phương trình vi phân (3.51), ta có:

$$0+0+kA=F \qquad (3.68)$$

Tức $A=F/k$, như vậy $x_f=F/k$. Nghiệm đủ, là tổng của nghiệm tự nhiên và cưỡng bức . Như vậy đối với một hệ thống bị cản mạnh (over-damped):

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + \frac{F}{k} \qquad (3.69)$$

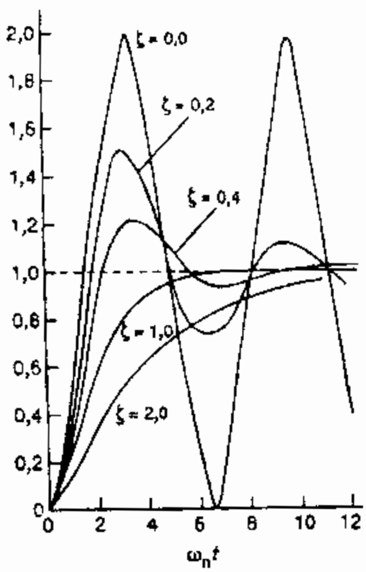
Đối với hệ bị cản tới hạn (critically-damped):

$$x = (At + B)e^{-\omega_n t} + \frac{F}{k} \qquad (3.70)$$

Và đối với hệ thống bị cản nhẹ (under-damped):

$$x = e^{-\xi\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + \frac{F}{k} \qquad (3.71)$$

Khi t→ ∞ cả 3 phương trình trên đều dẫn đến nghiệm $x=F/k$, trạng thái xác lập .



***Hình 3.12**:Phản ứng của hệ thống bậc 2 đối với tín hiệu đầu vào bậc*

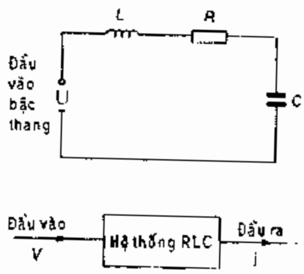
Hình 3.12 thể hiện đồ thị một đầu ra, là hàm thời gian của các độ giảm chấn khác nhau ζ. Trục thời gian là $\omega_n t$. Các đồ thị này thích hợp với hệ bậc 2, với mọi giá trị của ω_n. Hệ quả, x=0 ước tính dao động không bị cản (undamped oscillation) xảy ra đối với $\omega_n t$ =0, 2, 4 v...v.

Thường ta có thể viết một phương trình vi phân bậc 2 dưới dạng tổng quát:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_o x = b_0 y \qquad (3.72)$$

Với: $\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$

và: $\zeta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2a_0}$



Hình 3.13:Mạch RLC nối liên tiếp

Ví dụ 3.7: Xét một mạch RLC nối tiếp (hình 10.13) với $R=100\Omega$, $L=2$ H và $C=20\mu F$. Dòng điện i trong mạch được xác định:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{U}{LC} \qquad (3.73)$$

Khi có đầu vào bậc-U, nếu so phương trình (3.73) với phương trình vi phân bậc 2 tổng quát (2.72), tần số góc tự nhiên được xác định bởi:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2\times 20\times 10^{-6}} \qquad (3.74)$$

Như vậy ω_n=158Hz , so sánh với phương trình bậc 2 tổng quát , cho :

$$\zeta^2 = \frac{(R/L)^2}{4\times(1/LC)} = \frac{R^2C}{4L} = \frac{100^2\times 20\times 10^{-6}}{4\times 2} \qquad (3.75)$$

Tức ζ =0,16. Vì ζ<1 nên hệ thống bị cản nhẹ. Tần số dao động giảm chấn ω được cho bởi:

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 158\sqrt{1-0{,}16^2} = 156Hz \qquad (3.76)$$

Vì hệ thống là bị cản nhẹ nên nghiệm sẽ có dạng:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(PCos\omega t + QSin\omega t) + \frac{F}{k} \qquad (3.77)$$

Hay:

$$i = e^{-0,16\times158t}(PCos156t + QSin156t) + U \qquad (3.78)$$

Vì $i=0$ khi $t=0$ nên

$$0 = 1(P+0)+U \;\rightarrow\; P=-U \qquad (3.79)$$

Do $di/dt=0$ khi $t=0$, vi phân phương trình trên và đặt bằng 0, ta có:

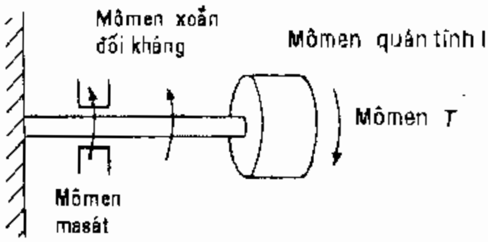
$$\frac{di}{dt} = e^{-\zeta\omega_n t}(\omega P\sin\omega t - \omega Q\cos\omega t) - \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\cos\omega t) \qquad (3.80)$$

$0 = 1(0-\omega Q) - \zeta\omega_n(P+0)$

$$Q = \frac{\zeta\omega_n P}{\omega} = -\frac{\zeta\omega_n U}{\omega} = \frac{0,16\times158U}{156} = -0,16U \qquad (3.81)$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$I = U - Ue^{-25,3t}(cos156t + 0,16sin156t) \qquad (3.82)$$



Hình 3.14 : Hệ thống chịu xoắn

Ví dụ 3.8: Xét hệ thống thể hiện ở hình 3.14, dưới điều kiện nào thì hệ thống chịu cản tới hạn?

Đầu vào là mômen xoắn T, tác dụng vào đĩa có mômen quán tính I so với tâm trục: Đầu trục có đĩa quay tự do, đầu kia ngàm chặt. Trục quay, ngược chiều với ..ới độ cứng xoắn của trục, mômen xoắn đối kháng $k\theta_0$ xuất hiện khi có đầu vào là góc quay θ_0 (k là hằng số) . Các lực ma sát cản sự quay của trục và tạo một mômen ngược chiều $cd\theta_0/dt$, với c là một hằng số.

Trước hết, ta tìm phương trình vi phân cho hệ thống :

$$Mômen\ hữu\ ích = T - c\frac{d\theta_0}{dt} = k\theta_0 \qquad (3.83)$$

Mômen hữu ích là $Id^2\theta_0/dt^2$ nên:

$$I\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = T - c\frac{d\theta_0}{dt} - k\theta_0 \qquad (3.84)$$

$$I\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + c\frac{d\theta_0}{dt} + k\theta_0 = T \qquad (3.85)$$

Điều kiện cản tới hạn được cho khi hệ số cản $\zeta=1$. So sánh phương trình vi phân trên với phương trình vi phân tổng quát bậc 2, ta có:

$$\zeta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2a_0} = \frac{c^2}{4Ik} \tag{3.86}$$

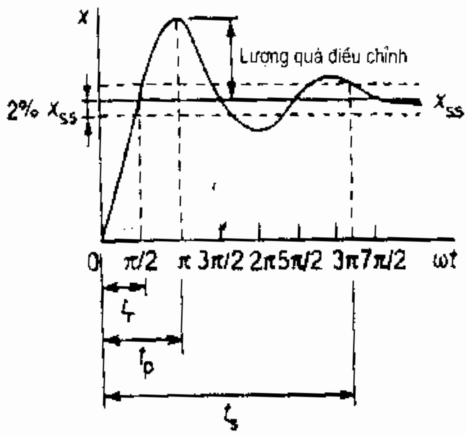
Để có trạng thái cản tới hạn ta phải có $c = \sqrt{Ik}$

3.1.4. Các tiêu chí để đánh giá đặc tính cho hệ thống bậc hai

Hình 3.15 thể hiện dạng đặc trưng đáp ứng của một hệ thống bậc 2 bị cản nhẹ đối với một đầu vào- bậc. Một số thuật ngữ được sử dụng để xác định sự thực hiện này là:

Thời gian tăng tốc (rise time) t_r: là khoảng thời gian để đáp ứng x tăng từ 0 đến giá trị trạng thái xác lập x_{SS}. là một đại lượng thể hiện hệ thống đáp ứng nhanh như thế nào đối với đầu vào. Đó là thời gian cho đáp ứng dao động để hoàn thiện một phần tư chu kỳ, tức 1/2 π, như vậy:

$$\omega t_r = \frac{1}{2}\pi \tag{3.87}$$



Hình 3.15: *Đáp ứng bậc của hệ bị cản nhẹ (under-damped system)*

Đôi khi thời gian tăng tốc được coi như thời gian để đáp ứng tăng từ một phần trăm cụ thể nào đó của giá trị trạng thái xác lập, ví dụ, 10% đến một phần trăm khác, ví dụ 90%.

Thời gian đỉnh (peak time): là thời gian để đáp ứng tăng từ 0 đến giá trị đỉnh đầu tiên. Đó là thời gian đáp ứng dao động để hoàn thiện một nửa chu kỳ, π, như vậy:

$$\omega t_r = \pi \tag{3.88}$$

Lượng quá điều chỉnh (overshoot) (xem hình 3.15): là lượng lớn nhất mà đáp ứng vượt quá giá trị ở trạng thái xác lập . Đó chính là biên độ của đỉnh đầu tiên. Lượng quá điều chỉnh thường được viết bằng phần trăm của giá trị trạng thái xác lập . Đối với dao động bị cản nhẹ của một hệ thống, ta có thể viết:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + \textit{giá trị trạng thái xác lập} \tag{3.89}$$

Vì x=0 khi t=0 nên:

$$0=I(P+0)+x_{SS} \quad \rightarrow P=-x_{SS} \tag{3.90}$$

Lượng quá điều chỉnh xảy ra tại ωt =π , như vậy:

$$x = e^{-\zeta\omega_n\pi/\omega}(P+0) + x_{SS} \tag{3.91}$$

Lượng quá điều chỉnh là chênh lệch đầu ra tại thời gian này và giá trị ở trạng thái xác lập , vậy:

$$\textit{Lượng quá điều chỉnh} = x_{SS}e^{-\zeta\omega_n\pi/\omega} \tag{3.92}$$

Do $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, ta có thể viết lại:

$$\textit{Lượng quá điều chỉnh} = x_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = x_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{3.93}$$

Thể hiện theo tỉ lệ phần trăm của x_{SS}:

$$\textit{Phần trăm lượng quá điều chỉnh} = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\times 100\% \tag{3.94}$$

Bảng 3.2 cho gía trị lượng quá điều chỉnh theo phần trăm đối với một số hệ số cản điển hình.

Bảng.3.2: phần trăm quá điều chỉnh

Hệ số cản	Phần trăm qúa điều chỉnh
0,2	52,7
0,4	25,4
0,6	9,5
0,8	1,5

Hệ số suy giảm (subsidence ratio): là đại lượng thể hiện mức nhanh tan rã của các dao động, là biên độ của lượng quá điều chỉnh thứ hai chia cho lượng quá điều chỉnh đầu tiên. Lượng quá điều chỉnh đầu tiên xẩy ra khi ωt=π, lượng quá điều chỉnh thứ hai khi ωt=2π, do vậy:

$$\textit{Lượng quá điều chỉnh đầu tiên} = x_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{3.95}$$

$$\textit{Lượng quá điều chỉnh thứ hai} = x_{SS}\exp\left(\frac{-2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{3.96}$$

$$\textit{Hệ số suy giảm} = \frac{\textit{Lượnt quá điều chỉnh đầu tiên}}{\textit{Lượng quá điều chỉnh thứ hai}}$$

$$= \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{3.97}$$

Thời gian xác lập (settling time), t_S: là khoảng thời gian cho đến khi dao động tắt. Đó là thời gian cho sự đáp ứng rơi vào và giữ trong phạm vi một số phần trăm nào đó của trạng thái xác lập , ví dụ 2% của giá trị trạng thái xác lập (xem hình 3.15). Điều này có nghĩa là biên độ của dao động sẽ nhỏ hơn 2%x_{SS}, ta có:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + \textit{Giá trị ở trạng thái xác lập} \qquad (3.98)$$

Như ở phương trình (3.90), $P=-x_{SS}$. Biên độ của dao động là $(x-x_{SS})$ khi x là giá trị max. Các giá trị max. xảy ra khi ωt nhân với π, khi đó cosωt =1 và sin ωt= 0. Thời gian xác lập là 2%, khi biên độ max. là 2%x_{SS}, tức 0.02x_{SS}. Như vậy:

$$0{,}02x_{SS} = e^{-\zeta\omega_n t}(x_{SS}.1 + 0) \qquad (3.99a)$$

$$0{,}02 = e^{-\zeta\omega_n t} \qquad (3.99b)$$

Lấy logarit:

ln0 ,02=-$\zeta\omega_n t_S$

ln0,02=-3,9 gần bằng 4, nên:

$$t_S = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad (3.100)$$

Đó là thời gian xác lập khi phần trăm xác định là 2%. Nếu là 5% thì phương trình sẽ là:

$$t_S = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad (3.101)$$

Vì thời gian để hoàn thiện một chu kì (tức thời gian chu kì) là 1/f, f là tần số và vì ω =2πf nên chu kì T được xác định là:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (3.102)$$

Như vậy, trong thời gian xác lập t_S, số dao động xẩy ra là:

$$\textit{Số lượng dao động} = \frac{\textit{Thời gian xác lập}}{T} \qquad (3.103)$$

Đối với thời gian xác lập được xác định bằng 2% giá trị trạng thái xác lập , thì:

$$\textit{Số dao động} = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega} \qquad (3.104)$$

vì $\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2}$, nên:

$$Số\ lượng\ dao\ động = \frac{2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta\omega_n} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1} \tag{3.105}$$

Ví dụ 3.9: để minh hoạ, ta xét một hệ thống bậc 2, có một tần số góc tự nhiên là 0.2Hz và tần số giảm chấn là 1,8Hz. Vì $\omega = \omega_n\sqrt{(1-\zeta^2}$, nên hệ số giảm chấn là:

$$1{,}8 = 2\sqrt{(1-\zeta^2} \tag{3.106}$$

Như vậy $\zeta=0{,}44$. Do $\omega t_r = 1/2\pi$, khi đó thời gian tăng tốc 100% được cho bởi:

$$t_r = \frac{\pi}{2\times 1{,}8} = 0{,}87s \tag{3.107}$$

Phần trăm lượng quá điều chỉnh được cho bởi:

$$Phần\ trăm\ lượng\ quá\ điều\ chỉnh = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\times 100\%$$

$$= \exp\left(\frac{-0{,}44\pi}{\sqrt{1-0{,}44^2}}\right)\times 100\% = 21\% \tag{3.108}$$

Thời gian xác lập 2%, được cho bởi:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}44\times 2} = 4{,}5s \tag{3.109}$$

Số lượng dao động xẩy ra trong thời gian xác lập 2% được cho bởi:

$$Số\ dao\ động = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}44^2}-1} = 1{,}3 \tag{3.110}$$

3.2. CÁC HÀM TRUYỀN HỆ THỐNG

3.2.1. Hàm truyền

Đối với một hệ thống khuếch đại, hệ số khuếch đại thể hiện tín hiệu ra sẽ lớn hơn bao nhiêu lần so với tín hiệu đầu vào, cho phép xác định tín hiệu đầu ra cho một tín hiệu đầu vào cụ thể. Ví dụ, một bộ khuếch đại có hệ số khuếch đại là 10, với một điện áp tín hiệu đầu vào là 2mV, tín hiệu đầu ra sẽ là 20mV, hoặc nếu tín hiệu đầu vào là 1V thì tín hiệu đầu ra là 10V. Hệ số khuếch đại thể hiện mối quan hệ toán học giữa tín hiệu đầu ra và tín hiệu đầu vào của một hệ thống.

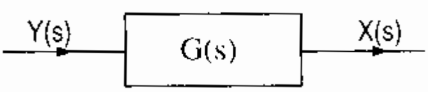
$$\text{Hệ số khuếch đại} = \frac{\text{Đầu ra}}{\text{Đầu vào}} \quad (3.111)$$

Nhưng ở nhiều hệ thống, mối quan hệ giữa tín hiệu đầu ra và tín hiệu đầu vào ở dạng phương trình vi phân, không thể đơn giản đặt hệ số khuếch đại là một con số. Ta không thể đơn giản chia tín hiệu đầu ra với tín hiệu đầu vào để thu được hệ số khuếch đại vì mối quan hệ vi phân chứ không phải là mối quan hệ đại số. Tuy nhiên ta có thể chuyển đổi phương trình vi phân thành phương trình đại số thông qua sử dụng phương pháp biến đổi Laplace. Phương trình vi phân miêu tả hoạt động của hệ thống theo thời gian, thông qua biến đổi Laplace được chuyển thành phương trình đại số đơn giản không liên quan đến thời gian, như vậy ta có thể thực hiện các phép đại số cho các đại lượng trong phương trình. Đó là kiểu hoạt động trong *miền thời gian (time domain)* được biến đổi đến *miền-s (s-domain)*. Khi đó ta có thể định nghĩa mối quan hệ giữa tín hiệu đầu ra và vào bởi *hàm truyền* (transfer function). Hàm truyền nêu mối quan hệ giữa biến đổi Laplace tín hiệu đầu ra và biến đổi Laplace tín hiệu đầu vào:

$$\text{Hàm truyền} = \frac{\text{Biến đổi Laplace tín hiệu đầu ra}}{\text{Biến đổi Laplace tín hiệu đầu vào}} \quad (3.112)$$

Ta có thể thể hiện khi tín hiệu ở miền thời gian (hàm thời gian), bằng viết f(t). Khi trong miền-s, hàm được viết F(s) (chữ hoa sử dụng cho biến đổi Laplace và chữ thường dùng cho hàm thời gian f(t)).

Giả sử tín hiệu đầu vào một hệ thống tuyến tính có biến đổi Laplace Y(s) và biến đổi Laplace cho tín hiệu đầu ra X(s). Khi đó, *hàm truyền G(s)* của hệ thống được xác định là:



Hình 3.16 Sơ đồ khối

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (3.113)$$

Hàm truyền luôn có các điều kiện ban đầu bằng 0 (tức tín hiệu đầu ra bằng 0 khi tín hiệu đầu vào bằng 0; tốc độ thay đổi của tín hiệu đầu ra với thời gian là 0 khi tốc độ thay đổi của tín hiệu đầu vào với thời gian bằng 0. Như vậy chuyển đổi đầu ra $X(s) = Y(s)G(s)$, tích của chuyển đổi đầu vào và hàm truyền đạt. Hình 3.16 thể hiện sơ đồ khối –một hệ thống có hàm truyền G(s), hàm lấy và chuyển đổi đầu vào Y(s) thành đầu ra X(s). Trong sơ đồ khối này ta giảm tập hợp phương trình của hệ thống thành một phương trình hệ thống nhập- xuất (input-output) duy nhất bằng đơn giản tất cả, ngoại trừ biến phụ thuộc của tập hợp. Hàm truyền kết hợp với biến phụ thuộc là một biểu diễn toán học chứa tất cả thông tin chủ yếu được nhúng trong phương trình vi phân của hệ thống.

Các biến đổi Laplace

Xét một đại lượng là hàm thời gian, ta gọi hàm này trong miền thời gian (time domain) và thể hiện là f(t). Nhiều vấn đề trong thực tế liên quan chỉ với các giá trị thời gian lớn hơn hoặc bằng 0, tức $t \geq 0$. Để có được biến đổi Laplace của hàm này, ta nhân nó với e^{-st} rồi tích phân theo t từ 0 đến vô cực , ở đây s là hằng số với đơn vị đo là 1/thời gian. Kết quả của tích phân này gọi là biến đổi Laplace (Laplace transform), và phương trình được gọi là trong miền s (s- domain). Như vậy biến đổi Laplace của một hàm thời gian f(t), được viết là $\mathbb{C}\{f(t)\}$, được cho bởi:

$$\mathbb{C}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (3.114)$$

Biến đổi này chỉ xem xét các giá trị trong miền $0 \div \infty$, chứ không phải trong toàn thang $-\infty \div \infty$.

Trong miền s, ta có thể thực hiện các phép đại số (cộng, trừ, nhân chia) , điều ta không thể thực hiện được đối với hàm gốc, phương trình vi phân trong miền thời gian. Bằng cách này ta có thể thu được biểu thức đơn giản hoá đáng kể trong miền s.

Nếu muốn xem, đại lượng thay đổi như thế nào với thời gian trong miền thời gian, ta phải thực hiện biến đổi ngược.

Trong miền s, hàm được viết là F(s) (là hàm của s, F thể hiện biến đổi Laplace, còn f thể hiện hàm phụ thuộc thời gian f(s)), như vậy:

$$\mathbb{C}\{f(t)\} = F(s) \qquad (3.115)$$

Đối với biến đổi ngược, một hàm thời gian thu được từ biến đổi Laplace có thể viết:

$$f(t) = \mathbb{C}^{-1}\{F(t)\} \qquad (3.116)$$

Biểu thức này được đọc là: f(t) là biến đổi ngược của biến đổi Laplace F(s).

Để có được biến đổi Laplace cho một số phương trình vi phân, những phương trình gồm các đại lượng là hàm thời gian, ta có thể sử dụng một số nguyên tắc cơ bản sau (xem bổ sung phụ lục)

1. Một tín hiệu xung đơn vị xẩy tại thời gian t=0 có biến đổi là 1.
2. Một tín hiệu bậc đơn vị (tín hiệu nhảy đến một giá trị cố định 1) tại thời gian t=0 có *biến đổi* là *1/s.*
3. Một tín hiệu bậc đơn vị bắt đầu tại thời gian t=0, được miêu tả bởi phương trình tín hiệu đầu vào =1t, có biến đổi là $1/s^2$.
4. Một tín hiệu hình sin đơn vị, được miêu tả bởi phương trình tín hiệu đầu vào =1sin ωt có biến đổi là $\omega/(s^2+\omega^2)$.
5. Một tín hiệu hình cos đơn vị, được miêu tả bởi phương trình tín hiệu đầu vào = 1cos ωt có biến đổi là $s/(s^2+\omega^2)$.

Các cặp biến đổi Laplace được thể hiện ở bảng 3.3

Sau đây là một số nguyên tắc cơ bản để thực hiện với các biến đổi Laplace:

1) Nếu một hàm thời gian nhân với một hằng, thì biến đổi Laplace được nhân với chính hằng đó. Ví dụ, biến đổi Laplace cho một tín hiệu đầu vào dạng bậc, 6V của một hệ thống điện, đó chính là 6 lần biến đổi cho một bậc đơn vị, là 6s.
2) Nếu một phương trình là tổng, ví dụ tổng của hai hàm thời gian, thì biến đổi của phương trình là tổng của hai biến đổi Laplace riêng lẻ.
3) Biến đổi Laplace của đạo hàm bậc nhất một hàm là:

$$\textit{Biến đổi của } \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

Trong đó, f(0) là giá trị của f(t) khi t=0 (hàm truyền có tất cả các điều kiện ban đầu là zero)

4) Biến đổi Laplace của đạo hàm bậc 2 một hàm là:

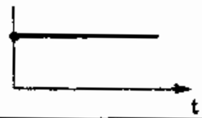
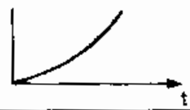
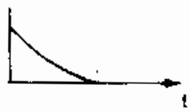
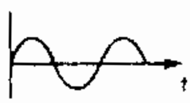
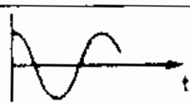
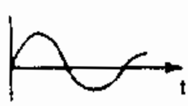
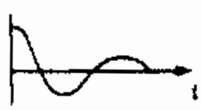
$$\text{Biến đổi của} \left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

Với *df(0)/dt* là giá trị đạo hàm bậc 1 của hàm f(t) khi t=0 (hàm truyền có tất cả các điều kiện ban đầu là zero)

5) Biến đổi Laplace của tích phân một hàm là:

Biến đổi của $\left\{\int_0^t f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

Bảng 3.3 các cặp biến đổi Laplace

F(t)=$\mathcal{L}^{-1}\lvert F(t)\rvert$,t≥0			$F(s)=\mathcal{L}\lvert f(t)\rvert$
1	Xung lực đơn vị		1
2	Bậc đơn vị		$\frac{1}{s}$
3	t^n với n=1,2,3...		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$e^{-\alpha t}$		$\frac{1}{s+\alpha}$
5	$t^n e^{-\alpha t}$ với n=1, 2, 3...		$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
6	$\sin(\omega_o t)$		$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$
7	$\cos(\omega_o t)$		$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$
8	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_o t)$		$\frac{\omega_o}{(s+\alpha)^2+\omega_o^2}$
9	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_o t)$		$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_o^2}$

Sau khi thực hiện đại số trong miền s, kết quả có thể được biến đổi trở lại miền thời gian bằng cách sử dụng bảng biến đổi ngược, tức tìm hàm thời gian, thích hợp với kết quả miền s. Thường, sự biến đổi được sắp xếp lại về một dạng có sẵn trong bảng. Những dạng dưới đây thường được sử dụng cho phép đảo ngược (tham khảo thêm phụ lục 1):

N1. $\dfrac{1}{s+a}$ cho e^{-at}

N2. $\dfrac{a}{s(s+a)}$ cho $(1-e^{-at})$

N3. $\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ cho $e^{-at}-e^{-bt}$

N4. $\dfrac{s}{(s+a)^2}$ cho $(1-at)e^{-at}$

N5. $\dfrac{a}{s^2(s+a)}$ cho $t-\dfrac{1-e^{-at}}{a}$

3.2.2. Các ứng dụng cho hệ thống bậc 1 và bậc 2

3.2.2.1. Các hệ thống bậc 1

Xem xét một hệ thống có mối quan hệ tín hiệu đầu vào và ra theo dạng phương trình vi phân bậc 1:

$$a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=b_0y \tag{3.114}$$

Với a_1, a_0, b_0 là hằng, y là tín hiệu đầu vào và x là tín hiệu đầu ra. Cả hai là hàm thời gian. Biến đổi Laplace cho phương trình này với các điều kiện ban đầu là 0:

$$a_1sX(s)+a_0X(s)=b_0Y(s) \tag{3.115}$$

ta có thể viết hàm truyền G(s):

$$G(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{b_0}{a_1s+a_0} \tag{3.116}$$

Sắp xếp lại:

$$G(s)=\frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)s+1}=\frac{G}{\tau s+1} \tag{3.117}$$

ở đây G là hệ số khuếch đại của hệ thống ở trạng thái xác lập , tức không có số hạng dx/dt, (a_1/a_0) là hằng thời gian τ của hệ thống (xem 3.1.2.3).

Khi một hệ thống bậc nhất có tín hiệu đầu vào bậc đơn vị thì Y(s)=1/s, biến đổi tín hiệu đầu ra X(s) là:

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{G}{s(\tau s+1)} = G\frac{(1/\tau)}{s(s+1/\tau)} \tag{3.118}$$

Vì ta có biến đổi dạng $a/s(s+a)$, sử dụng biến đổi ngược liệt kê ở điểm N2, ta có:

$$y = G(1 - e^{-t/\tau}) \tag{3.119}$$

Ví dụ 3.10: Xét hàm truyền của hệ bậc 1 và ứng xử của hệ thống khi chịu tín hiệu đầu vào bậc. Một mạch có trở R mắc nối tiếp với tụ C (hình 2.12). Đầu vào mạch là u và tín hiệu đầu ra là hiệu điện thế u_c qua tụ. Phương trình vi phân quan hệ tín hiệu đầu vào và đầu ra là:

$$u = RC\frac{du_C}{dt} + u_C \tag{3.120}$$

Biến đổi Laplace với tất cả các điều kiện ban đầu là zero

$$U(s) = RCsU_C(s) + U_C(s) \tag{3.121}$$

Như vậy hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs+1} \tag{3.122}$$

Ví dụ 3.11: Xét một cặp nhiệt ngẫu, có hàm truyền kết nối tín hiệu đầu ra -điện áp U và nhiệt độ- tín hiệu đầu vào là:

$$G(s) = \frac{30\times10^{-6}}{10s+1}(V/^0C) \tag{3.123}$$

Vì biến đổi tín hiệu đầu ra là tích của hàm truyền với biến đổi tín hiệu đầu vào, nên

$$U(s) = G(s)\times \textit{tín hiệu đầu vào (s)} \tag{3.124}$$

Giả sử, tín hiệu đầu vào dạng bậc- 100^{0}C, tức nhiệt độ của cặp nhiệt ngẫu tăng đột ngột lên 100^{0}C, biến đổi của nó là 100/s, như thế:

$$U(s) = \frac{30\times10^{-6}}{10s+1}\times\frac{100}{s} = \frac{30\times10^{-4}}{10s(s+0{,}1)} = 30\times10^{-4}\frac{0{,}1}{s(s+0{,}1)} \tag{3.125}$$

Phần tử phân số có dạng $a/s(s+a)$, nên biến đổi ngược là:

$$U=30\times 10\text{-}4(1-e^{-0,1t})\ (V) \qquad (3.126)$$

Giá trị cuối, tức giá trị ở trạng thái xác lập , khi $t\to\infty$ thì $e^{-0,1t}\to 0$, bằng $30\times 10\text{-}4V$, vì thế thời gian để đạt, giả sử 95% giá trị cuối được cho bởi:

$0,95\times 30\times 10^{-4}=30\times 10^{-4}(1-e^{-0,1t})$

Do đó $0,05=e^{-0,1t}$, $\ln 0,05=-0,1t$ nên thời gian là 30s

Ví dụ 3.12: Xét một ngẫu nhiệt có tín hiệu đầu vào dạng dốc $5t^0C/s$, tức nhiệt độ tăng cứ mỗi giây lên 5^0C; biến đổi của nó là $5/s^2$, nên:

$$U(s)=\frac{30\times 10^{-6}}{10s+1}\times\frac{5}{s^2}=150\times 10^{-6}\frac{0.1}{s^2(s+0,1)} \qquad (3.127)$$

Truyền ngược có thể thu được khi sử dụng điểm N5 :

$$U=150\times 10^{-6}(t-\frac{1-e^{-0,1t}}{0,1}) \qquad (3.128)$$

Sau một thời gian, ví dụ $t=12s$ điện áp của cặp nhiệt ngẫu $U=7,5\times 10^{-4}$ (V)

Ví dụ 3.13 : xét tín hiệu đầu vào dạng xung lực 100^0C, tức nhiệt ngẫu chịu một nhiệt độ tức thời tăng đến 100^0C, biến đổi của nó là 100, ta có:

$$U(s)=\frac{30\times 10^{-6}}{10s+1}\times 100=3\times 10^{-4}\frac{1}{(s+0.1)} \qquad (3.129)$$

Vì thế $U=3\times 10^{-4}e^{-0,1t}(V)$, như vậy, sau ví dụ, t=2s điện áp nhiệt ngẫu sẽ là $U=1,8\times 10^{-4}(V)$.

3.2.2.2. Hệ thống bậc 2

Đối với một hệ thống bậc 2, mối quan hệ giữa tín hiệu đầu vào y và tín hiệu đầu ra x được miêu tả bởi phương trình:

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=b_0y \qquad (3.130)$$

Với a_2, a_1, a_0, b_0 là hằng số, biến đổi Laplace cho phương trình với các điều kiện ban đầu là 0, ta có:

$$a_2s^2X(s)+a_1sX(s)+a_0X(s)=b_0Y(s) \qquad (3.131)$$

Nên $$G(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} \qquad (3.132)$$

Phương trình vi phân cho hệ thống bậc 2 còn có thể viết theo dưới dạng:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = b_0\omega_n^2 y \tag{3.133}$$

Trong đó ω_n là tần số góc tự nhiên mà hệ thống dao động với và ζ là hệ số giảm chấn. Biến đổi Laplace phương trình (3.133) cho:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.134}$$

(3.134) là dạng tổng quát của hàm truyền cho hệ thống bậc 2

Khi hệ thống bậc hai chịu một tín hiệu đầu vào bậc đơn vị, tức X(s)=1/s thì biến đổi tín hiệu đầu ra sẽ là :

$$X(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n)} \tag{3.135}$$

Có thể viết lại:

$$X(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s(s+p_1)(s+p_2)} \tag{3.136}$$

Với p_1 và p_2 là nghiệm của phương trình

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{3.137}$$

Giải phương trình, nghiệm của một phương trình bậc 2

$$p = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \tag{3.138}$$

Như vậy:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.139}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.140}$$

Với $\zeta > 1$ căn bậc 2 là một nghiệm thực, hệ thống bị cản mạnh (over-damped). Biến đổi ngược của phương trình (theo điểm 14 trong bảng phụ lục 1) là:

$$x = \frac{b_0\omega_n^2}{p_1 p_2}\left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1}e^{-p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1}e^{-p_2 t}\right] \tag{3.141}$$

Với $\zeta = 1$ nghiệm của phương trình bằng 0, tức $p_1 = p_2 = -\omega_n$. Hệ thống giảm chấn tới hạn (critically damped). Phương trình trở thành:

$$X(s) = \frac{b_0\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} \tag{3.142}$$

Phương trình này có thể khai triển (xem phụ lục 1) để cho:

$$X(s) = b_0\omega_n^2\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] \tag{3.143}$$

Vì thế:

$$x = b_0\omega_n^2\left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right] \tag{3.144}$$

Với $\zeta < 1$, chuyển đổi ngược khi sử dụng điểm 28 trong bảng ở phụ lục 1 là:

$$x = b_0\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}t + \Phi)\right] \tag{3.145}$$

Trong đó Cos $\Phi=\zeta$, đó là một dao động giảm chấn yếu

Ví dụ 3.14: Xét trạng thái giảm chấn của một hệ thống có hàm truyền chịu một tín hiệu đầu vào bậc đơn vị

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16} \tag{3.146}$$

Đối với tín hiệu đầu vào bậc đơn vị Y(s)=1/s, biến đổi tín hiệu đầu ra là:

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 16)} \tag{3.147}$$

Có thể viết dưới dạng

$$X(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+4)} \tag{3.148}$$

Nghiệm của phương trình $s^2+8s+16$ là $p_1=p_2=-4$. Cả hai nghiệm bằng nhau và là số thực nên hệ chịu giảm chấn tới hạn

Ví dụ 3.15: xét một hệ thống bậc 2 có tín hiệu đầu vào dốc. Đó là một tay máy chịu tín hiệu vào dạng dốc đơn vị và có hàm truyền :

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)^2} \tag{3.149}$$

Biến đổi tín hiệu đầu ra X(s) được cho bởi $X(s)=G(s)\times Y(s)$, vậy:

$$X(s) = \frac{K}{(s+3)^2}\times\frac{1}{s^2} \tag{3.150}$$

Ta có thể viết lại khi sử dụng các thành phần cục bộ (xem phụ lục 1):

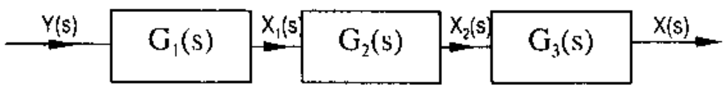
$$X(s) = \frac{K}{9s^2} - \frac{2K}{9(s+3)} - \frac{K}{9(s+3)^2} \tag{3.151}$$

Từ đây biến đổi ngược là:

$$x = \frac{1}{9}Kt + \frac{2}{9}Ke^{-3t} + \frac{1}{9}Kte^{-3t} \tag{3.152}$$

Phương trình (3.152) thể hiện tín hiệu đầu ra thay đổi theo thời gian trong hệ thống bậc 2.

3.2.2.3. Các hệ thống nối liên tiếp



***Hình 3.17**: hệ thống nối tiếp*

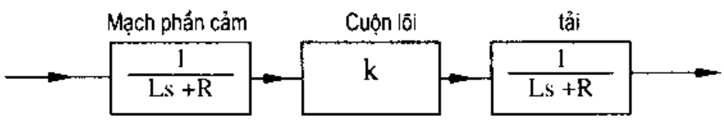
Một hệ thống gồm các hệ thống con nối liên tiếp như hình 3.17 thì hàm truyền của hệ thống sẽ là:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{X_1(s)}{Y(s)} \times \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \times \frac{X(s)}{X_2(s)} = G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s) \tag{3.153}$$

Hàm truyền của toàn hệ thống là tích hàm truyền của các hệ thống con nối tiếp trong hệ (hình 3.17), khi không có sự ảnh hưởng tương tác xẩy ra giữa các hệ. Sự tương tác có thể tạo thay đổi trong hàm truyền đạt. Ví dụ, nếu các hệ thống con là các mạch điện, có thể có vấn đề các mạch tương tác và chất tải lẫn nhau.

Ví dụ 3.16: Xét hàm truyền của hệ thống gồm 3 thành phần nối tiếp , có các hàm truyền thành phần là *10; 2/s và 4/(s+3).* Sử dụng phương trình triển khai ở (3.153), ta có:

$$G(s) = 10 \times \frac{2}{s} \times \frac{4}{s+3} = \frac{80}{s(s+3)} \tag{3.154}$$



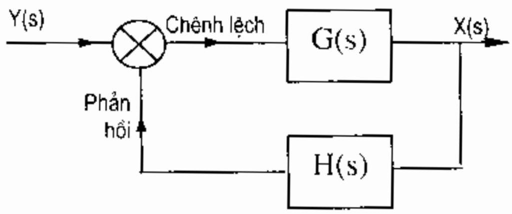
***Hình 3.18**: Hệ thống nối tiếp (động cơ DC)*

Ví dụ 3.16: Xét một động cơ DC điều khiển phần cảm, gồm 3 thành phần nối tiếp: mạch phần cảm, cuộn lõi và tải. Hình 3.18 thể hiện sự sắp xếp và các hàm truyền của các hệ thống con. Hàm truyền của toàn hệ thống là tích của các hàm truyền các thành phần trong nối tiếp:

$$G(s) = \frac{1}{Ls + R} \times k \times \frac{1}{Is + c} = \frac{k}{(Ls + R)(Is + c)} \qquad (3.155)$$

3.2.2.4. Hệ thống với vòng phản hồi

Hình 3.19 thể hiện một hệ thống đơn giản có phản hồi. Nếu phản hồi âm, các tín hiệu đầu vào hệ thống sẽ trừ tín hiệu phản hồi tại bộ cộng. Thuật ngữ *đường tiến (forward path)* được sử dụng cho đường truyền có hàm truyền G(s), đường hồi (feedback path) là đường có hàm truyền H(s). Hệ thống toàn bộ được gọi là hệ thống vòng kín (closed loop system).



Hình 3.19. Hệ thống phản hồi âm

Đối với hệ thống phản hồi âm, tín hiệu đầu vào hệ thống con có hàm truyền *G(s)* là *Y(s)* trừ tín hiệu phản hồi. Vòng phản hồi với hàm truyền H(s), có tín hiệu đầu vào là *X(s)*, nên tín hiệu phản hồi là *H(s)X(s)*. Do đó thành phần *G(s)* có một tín hiệu đầu vào là *Y(s)-H(s)X(s)* và tín hiệu đầu ra là *X(s)*, vì vậy:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s) - H(s)X(s)} \qquad (3.156)$$

Quy đồng, chuyển vế, nhóm lại, ta có

$$[1+G(s)H(s)]X(s)=G(s)Y(s) \qquad (3.157)$$

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad (3.158)$$

Như vậy hàm truyền T(s) cho toàn hệ thống có phản hồi âm là:

$$T(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (3.159)$$

Ví dụ 3.17: Để minh hoạ, xét hàm truyền cho một hệ thống vòng đóng có hàm truyền đường tiến là *2/(s+1)* và hàm truyền đường phản hồi âm là *5s*. Sử dụng phương trình đã triển khai ở trên, có:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{2/(s+1)}{1+[2/(s+1)]5s} = \frac{2}{11s+1} \qquad (3.160)$$

Ví dụ 3.18: Xét một động cơ d.c điều khiển lõi, đường tiến gồm 3 thành phần: mạch lõi với hàm truyền *1/(Ls+R)*, cuộn lõi với hàm truyền *k* và tải với hàm truyền $1/(Is+c)$, có đường phản hồi với hàm truyền K. Hàm truyền đường tiến cho các thành phần nối tiếp là:

$$G(s) = \frac{1}{Ls+R} \times k \times \frac{1}{Is+c} = \frac{k}{(Ls+R)(Is+c)} \qquad (3.161)$$

Đường phản hồi có hàm truyền K, vậy hàm truyền toàn bộ là:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{k}{(Ls+R)(Is+c)}}{1+\dfrac{kK}{(Ls+R)(Is+c)}} = \frac{k}{(Ls+R)(Is+c)+kK} \qquad (3.162)$$

Ví dụ 3.19: Xét một bộ điều khiển vị trí với đường phản hồi âm có hàm truyền là 1 và hai hệ thống con trên đường tiến của hệ: một bộ điều khiển với hàm truyền K và một hệ thống truyền động có hàm truyền là $\frac{1}{s(s+1)}$ Tìm giá trị K để hệ chịu giảm chấn tới hạn.

Đường tiến có hàm truyền $K/s(s+1)$ và đường phản hồi có hàm truyền 1. Hàm truyền tổng của hệ thống là:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{k}{s(s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(s+1)}} = \frac{k}{s(s+1)+K} \qquad (3.163)$$

Mẫu số: s^2+s+K có nghiệm là:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2} \qquad (3.164)$$

Để có giảm chấn tới hạn ta phải có: 1-4K=0, tức K=1/4.

CHƯƠNG 4. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ

Phân tích và thiết kế các hệ thống điều khiển công nghiệp thường được thực hiện khi sử dụng các phương pháp đáp ứng tần số. Thuật ngữ đáp ứng tần số thể hiện mối quan hệ giữa đầu ra và đầu vào của một hệ thống tuyến tính với hệ số hằng ở trạng thái xác lập khi đầu vào biên đổi theo quy luật hình SIN.

Sau đây ta xét đáp ứng của hệ thống khi có tín hiệu đầu vào dạng sin.

4.1. ĐẦU VÀO DẠNG SIN:

Đối với nhiều hệ thống điều khiển, tín hiệu đầu vào hình sin có thể không bình thường. Các tín hiệu dạng này cần được kiểm thử, vì các hệ thống đáp ứng tín hiệu đầu vào hình sin là nguồn hữu hiệu trợ giúp công tác thiết kế và phân tích hệ thống.

Xét một hệ thống bậc 1 được thể hiện bởi phương trình vi phân :

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \tag{4.1}$$

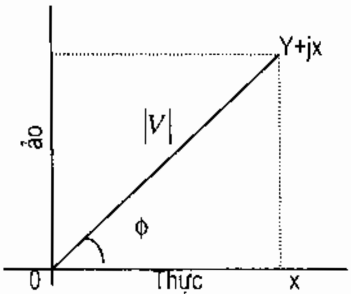
với y là tín hiệu đầu vào, x là tín hiệu đầu ra. Giả sử ta có một tín hiệu đầu vào dạng sin: y=sinωt, nếu thay vào phương trình vi phân trên, tín hiệu sau đạo hàm cũng mang tính chất sin có cùng tần số (cosωt = sin (ωt+90^0). Ta có thể thực hiện đạo hàm nhiều lần, chắc chắn đáp ứng ở trạng thái xác lập , x cũng sẽ là hình sin cùng tần số. Tuy nhiên tín hiệu đầu ra sẽ có biên độ và pha khác với tín hiệu đầu vào.

4.2. VECTƠ PHA (VECTƠ PHA)

Để thuận tiện khi phân tích tín hiệu sin ta dùng thuật ngữ vectơ pha (vectơ pha). Xét một đường sin miêu tả bởi v=V sin (ωt+Φ) với V là biên độ, ω tần số góc và ϕ là góc pha. Vectơ pha thể hiện một đường thẳng có chiều dài $|V|$ tạo một góc ϕ với trục tham chiếu pha. Kí hiệu$|\ |$ được sử dụng để chỉ độ lớn của đại lượng chiều dài của vectơ pha được quan tâm. Vectơ pha được xác định khi chiều dài và góc ω được xác định. Để thuận tiện ta có thể đặt kí hiệu vectơ pha với kí tự đậm ví dụ **V**. Kí hiệu này hàm ý là đại lượng có một kích thước (độ lớn) và một góc.

4.2.1. Khái niệm

Một vectơ pha có thể miêu tả dưới dạng số phức, thể hiện bởi ($x+jy$), với x là phần thực và y là phần ảo. Trên đồ thị thành phần ảo được thể hiện trên trục y và thực trên trục x và x và y là tọa độ Decac của một điểm thể hiện số phức (hình 4.1). Đường nối điểm này tới gốc đồ thị thể hiện một vectơ pha. Góc pha ϕ của vectơ pha, được thể hiện bởi:



Hình 4.1 Thể hiện dạng phức của phasor

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{4.2}$$

Chiều dài của vectơ pha:

$$|V| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.3}$$

Với $x = |V|\cos\phi$ (4.4)

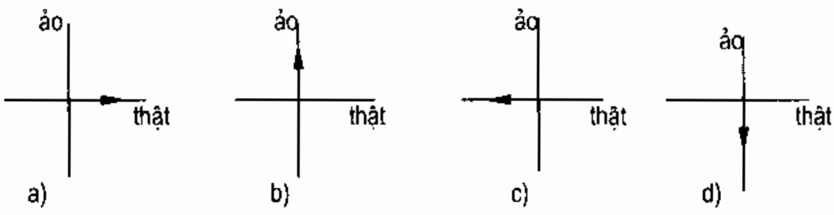
$y = |V|\sin\phi$ (4.5)

Ta có thể viết:

$$\mathbf{V} = x + jy = |V|(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{4.6}$$

Công thức (4.6) miêu tả phần số thực và số ảo của một số phức, xác định một vectơ pha

Xét một vectơ pha có chiều dài đơn vị và góc pha 0^0C (hình 4.2a), thể hiện dưới dạng số phức (1+j0). Ta lại xét một vectơ pha có cùng chiều dài nhưng góc pha là 90^0C (hình 4.2b), thể hiện dưới dạng 0+j1. Đó là vectơ pha (4.2a) quay ngược chiều kim đồng hồ 90^0C, tương ứng với việc nhân vectơ pha đó với j. Nếu quay tiếp một góc 90^0C (hình 4.2c), thực hiện cùng quy luật nhân, ta có vectơ pha gốc (4.2a) nhân với j^2. Đó là vectơ pha bằng vectơ pha gốc có hướng ngược lại, (tức nhân với (-1), j^2=-1, j=$\sqrt{(-1)}$. Quay vectơ pha gốc đi 270^0C, tức 3x 90^0C, tương đương với việc nhân vectơ pha góc với j^3=j $(j)^2$=-j, v…v.



Hình 4.2 Quay vectơ pha (a) 0^0, (b) 90^0, (c)180^0, (d) 270^0

Ví dụ 4.1: Để minh hoạ ta xét một điện áp u thay đổi với thời gian theo hình sin, có phương trình:

$$u = 10\ sin\ (\omega t + 30^0)U \tag{4.7}$$

Vectơ pha thể hiện ở phương trình này có:

- Chiều dài theo tỉ lệ, thể hiện biên độ của đường sin là 10V.
- Góc so với trục tham chiếu bằng với góc pha, là 30^0.
- Phần thực cho bởi phương trình là x=10 $\cos 30^0$ =8,7V; phần ảo là y=10 $\sin 30^0$ =5,0V. Vậy vectơ pha được thể hiện bởi 8,7 + *j*5.0 V.

4.2.2. Các phương trình của vectơ pha

Xét một vectơ pha thể hiện đường hình sin có biên độ bằng 1:

$$x = sin\ \omega t. \tag{4.8}$$

$$dx/dt = \omega cos\omega t,$$

Có thể viết lại :

$dx/dt = \omega\ sin\ (\omega t + 90^0)$.→ đạo hàm là một vectơ pha có chiều dài tăng bởi hệ số ω và quay 90^0 so với vectơ pha gốc. Theo kí hiệu số phức, ta phải nhân vectơ pha gốc với jω, vì nhân với j tương đương với quay 90^0. Như vậy phương trình vi phân:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y \tag{4.9}$$

Có thể viết theo kí hiệu số phức, phương trình của *một vectơ pha*

$$j\omega a_1 \mathbf{X} + a_0 \mathbf{X} = b_0 \mathbf{Y} \tag{4.10}$$

Ở đây các kí tự đậm thể hiện dữ liệu tham chiếu tới vectơ pha. Ta có thể nói rằng, phương trình vi phân, theo miền thời gian, đã được biến đổi thành một phương trình theo *miền tần số (frecquency domain)*. Phương trình miền tần số có thể viết lại là:

$$(j\omega a_1 + a_0)\mathbf{X} = b_0 \mathbf{Y} \tag{4.11}$$

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0} \tag{4.12}$$

Trong mục 3.2.2.1 cũng phương trình này nhưng viết trong miền s ta có:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{4.13}$$

Nếu thay s bằng $j\omega$, ta có cùng phương trình. Có nghĩa, ta luôn có thể chuyển đổi từ miền s sang miền tần số. Như vậy ta có thể đưa ra một định nghĩa về *hàm đáp ứng tần số* (frequency response function) hoặc *hàm truyền tần số* (frequency transfer function) G(ω) đối với trạng thái xác lập như :

$$G(j\omega) = \frac{\text{vectơ pha tín hiệu đầu ra}}{\text{vectơ pha tín hiệu đầu vào}} \tag{4.14}$$

Ví dụ 4.2: Xác định hàm đáp ứng tần số cho hệ thống có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{4.15}$$

Hàm đáp ứng tần số thu được bằng thay s bởi jω, là:

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \tag{4.16}$$

4.3. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ

4.3.1. Đáp ứng tần số cho các hàm bậc 1

Hệ thống bậc 1 có hàm truyền, được viết là:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \tag{4.17}$$

Với τ là hằng thời gian của hệ thống (xem 3.2.2.1). Hàm đáp ứng tần số G(ω) có thể thu được khi thay s bằng jω, như vậy:

$$G(\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega} \tag{4.18}$$

Nếu nhân cả tử lẫn mẫu với (1- jωτ) ta có:

$$G(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \times \frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau} = \frac{1-j\omega\tau}{1-j^2\omega^2\tau^2} \tag{4.19}$$

mà $j^2=-1$, nên

$$G(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \tag{4.20}$$

Đó là phương trình có dạng $x+jy$, vì G(jω) là tỉ số giữa vectơ pha tín hiệu đầu ra và vectơ pha tín hiệu đầu vào. Ta có kích thước vectơ pha tín hiệu đầu ra lớn hơn vectơ pha tín hiệu đầu vào, bằng hệ số $|G(j\omega)|$ với:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \tag{4.21}$$

$|G(j\omega)|$ cho biết, biên độ của tín hiệu đầu ra lớn hơn tín hiệu đầu vào là bao nhiêu, đại lượng này được gọi là độ lớn (magnitude) hoặc hệ số khuếch đại (gain). Chênh lệch pha φ giữa vectơ pha tín hiệu đầu ra và vectơ pha tín hiệu đầu vào được cho bởi công thức:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\omega t \tag{4.22}$$

Dấu âm thể hiện vectơ pha tín hiệu đầu ra trễ so với vectơ pha tín hiệu đầu vào một góc φ

Ví dụ 4.3: Để minh hoạ, xét một hệ thống (mạch điện có một điện trở nối tiếp với tụ, tín hiệu đầu ra được lấy sau tụ, hình 2.12), có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{1}{RCs+1} \tag{4.23}$$

Hệ thống là bậc 1, có hằng thời gian τ của RC. Hàm đáp ứng tần số thu được khi thay s bằng $j\omega$ là:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1} \tag{4.24}$$

Nhân tử và mẫu với ($1 - j\omega RC$) và sắp xếp, viết lại phương trình:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2(RC)^2} - j\frac{\omega(RC)}{1+\omega^2(RC)^2} \tag{4.25}$$

Như vậy, tương tự như phương trình (4.21):

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2(RC)^2}} \tag{4.26}$$

Và:

$$\tan\phi = -\omega RC \tag{4.27}$$

Ví dụ 4.4: Xét vấn đề liên quan đến xác định độ lớn và pha trạng thái xác lập của tín hiệu đầu ra một hệ thống khi chịu một tín hiệu đầu vào là *2sin (3t+60⁰)* nếu nó có hàm truyền :

$$G(s) = \frac{4}{s+1} \tag{4.28}$$

Ta có hàm đáp ứng tần số khi thay s bằng jω:

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega+1} \tag{4.29}$$

Nhân mẫu và tử phương trình (4.29) với (- jω+1), ta có:

$$G(j\omega)=\frac{-4j\omega+4}{\omega^2+1}=\frac{4}{\omega^2+1}-j\frac{4\omega}{\omega^2+1} \tag{4.30}$$

Độ lớn của một số phức $x+jy$ được cho bởi $\sqrt{x^2+y^2}$, như vậy:

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\frac{4^2}{(\omega^2+1)^2}+\frac{4^2\omega^2}{(\omega^2+1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{\omega^2+1}} \tag{4.31}$$

Góc pha được cho bởi $tan\phi=y/x$ nên :

$$tan\phi=-\omega \tag{4.32}$$

Đối với một tín hiệu đầu vào có ω=3rad/s. Độ lớn sẽ là :

$$|G(j\omega)|=\frac{4}{\sqrt{3^2+1}}=1,3 \tag{4.33}$$

và pha là : $tan\phi=-3$

Như vậy $\phi=-72^0C$, đó là góc pha giữa tín hiệu đầu vào và đầu ra. Tín hiệu đầu ra là $2,6sin(3t-12^0)$.

4.3.2. Đáp ứng tần số cho các hệ thống bậc 2

Xét một hệ thống bậc hai với hàm truyền (xem 3.2.2.2):

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{4.34}$$

Trong đó ω_n là tần số góc tự nhiên và ζ là tỉ số giảm chấn. Hàm đáp ứng tần số thu được khi thay s bởi jω, là:

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+2j\zeta\omega\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)+2j\zeta\omega\omega_n}$$

$$=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]+2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \tag{4.35}$$

Nhân tử và mẫu với biểu thức: $\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]-2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

Cho: $$G(j\omega)=\frac{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]-2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \tag{4.36}$$

Phương trình trên có dạng $x+jy$, do G(jω) là vectơ pha tín hiệu đầu ra chia vectơ pha tín hiệu đầu vào, ta có kích thước độ lớn của vectơ pha đầu ra lớn hơn vectơ pha đầu bởi hệ số $\sqrt{(x^2+y^2}$, là:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \tag{4.37}$$

Chênh lệch pha ϕ giữa tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra được cho bởi tanϕ=x/y và như vậy

$$\tan\phi = -\frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \tag{4.38}$$

Dấu trừ thể hiện pha tín hiệu đầu trễ sau tín hiệu đầu vào

4.4. ĐỒ THỊ BODE (BODE PLOTS)

Đáp ứng tần số của một hệ thống là tập hợp các giá trị về độ lớn (magniture) $|G(j\omega)|$ và góc pha ϕ xẩy ra khi một tín hiệu đầu vào dạng sin thay đổi trong một phạm vi tần số. Nó có thể thể hiện theo 2 đồ thị, một là đồ thị theo độ lớn $|G(j\omega)|$ - tần số góc ω và một là đồ thị pha ϕ- tần số góc ω, được sử dụng để thể hiện đặc tính tần số biên-pha. Đồ thị độ lớn $|G(j\omega)|$ - tần số góc ω thường sử dụng thang lôgarit, được sử dụng thể hiện đặc tính tần số lôgarit. Cặp đồ thị này được gọi là đồ thị Bode (Bode plot). Như vậy có thể coi đồ thị Bode là công cụ hiển thị đáp ứng tần số của hệ thống.

Ở đặc tính tần số lôgarit, độ lớn được thể hiện theo đơn vị dêxiben (dB).

$$|G(j\omega)| \text{ theo dB} = 20\lg_{10}|G(j\omega)| \tag{4.39}$$

Ví dụ một độ lớn 20dB có nghĩa:

$$20 = 20\lg_{10}|G(j\omega)| \tag{4.40}$$

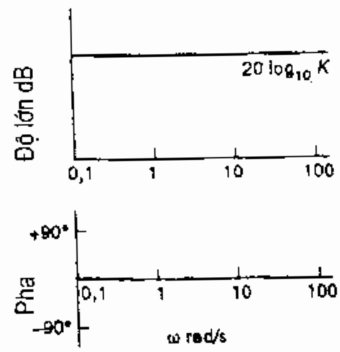
$$1 = \lg_{10}|G(j\omega)|$$

Và $$10 = |G(j\omega)| \tag{4.41}$$

Như thế một độ lớn 20dB có nghĩa độ lớn là 10, cho nên biên độ của đầu ra là 10 lần biên độ đầu vào. Một độ lớn 40dB có độ lớn 100 và như vậy biên độ đầu ra là 100 lần biên độ đầu vào.

4.4.1. Các ví dụ về đồ thị Bode

Xét *đồ thị Bode* cho một hệ thống ở hình 4.3, có *hàm truyền G(s)=K*, với *K* là hằng số. Hàm đáp ứng tần số $G(j\omega)$=K, độ kớn$|G(j\omega)|$=K và theo decibel, $|G(j\omega)|$=20lgK. Đồ thị của độ lớn trong trường hợp này một đường thẳng độ lớn cố định, thay đổi K đơn thuần là dịch chỉnh đường độ lớn lên hoặc xuống bằng một số decibel cụ thể. Phase bằng 0.

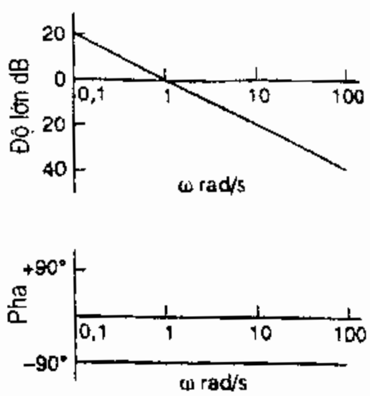


Hình 4.3: Đồ thị Bode G(s)=K

Xét *đồ thị Bode* cho hệ thống có *hàm truyền G(s)=1/s*. Hàm đáp ứng tần số sẽ là: *G(jω)=1/jω*, nhân với j/j cho G(jω)=-j/ω. Như vậy độ lớn $|G(j\omega)|$ = 1/ω. Theo decibel *20lg(1/ω)= - 20logω*. Khi *ω=1 rad/s* độ lớn bằng *0*. Khi *ω=10rad/s*, $|G(j\omega)|$ = *-20dB*. Khi *ω=100rad/s*, $|G(j\omega)|$ =- *40dB*. Như vậy khi tần số góc, ω tăng 10 lần thì độ lớn, $|G(j\omega)|$ giảm đi lượng *-20dB*. Đồ thị độ lớn là đường thẳng có độ dốc *-20dB* /dêcat (dêcat là đơn vị đo của tần số ω, tức lôgarit của độ tăng tần số 10 lần), đi qua *0dB* tại*ω=1rad/s*. Pha của hệ thống như thế được cho bằng:

$$\text{tang}\,\phi = \frac{-\frac{1}{\omega}}{0} = -\infty \tag{4.42}$$

Do vậy φ=-90⁰ cho tất cả các tần số (hình 4.4).



Hình 4.4: Đồ thị Bode G(s)=1/s

Ví dụ 4.5: Xét đồ thị Bode cho một hệ thống bậc nhất, có hàm truyền cho bởi :

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{4.43}$$

Khi đó hàm đáp ứng tần số là:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \tag{4.44}$$

Độ lớn (xem 4.2.2) sẽ là:

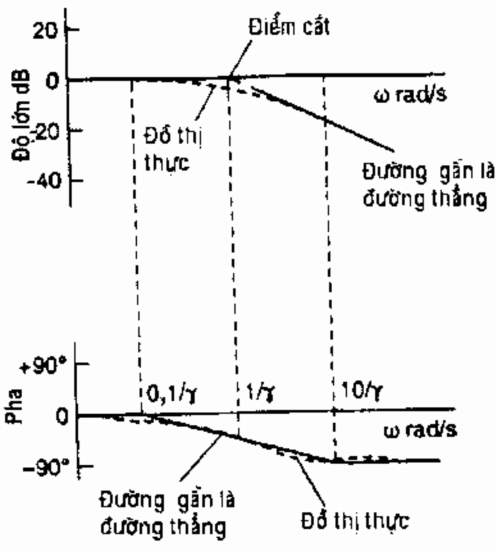
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \tag{4.45}$$

Theo decibel là:

$$20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right) \tag{4.46}$$

Khi $\omega<<1/\tau$ thì $\omega^2\tau^2$ được bỏ qua so với 1, độ lớn 20lg1=0dB. Như vậy tại các tần số thấp, đồ thị độ lớn là đường thẳng có giá trị không đổi, là 0dB. Đối với các tần số cao, khi $\omega>>1/\tau$ thì $\omega^2\tau^2$ lớn hơn nhiều so với 1 nên 1 có thể bỏ qua. Khi đó độ lớn là $20\lg(1/\omega t)$, tức $-20\lg\omega t$. Đó là một đường thẳng có độ dốc -20dB /dêcat, cắt đường 0dB khi $\omega\tau=1$, tức $\omega=1/\tau$. Hình 4.5 thể hiện các đường này đối với tần số thấp và tần số cao với điểm giao nhau của chúng, gọi là *điểm cắt (break point)* hoặc *tần số góc (corner frequency)* tại $\omega=1/\tau$. Hai đường thẳng này được gọi là tiệm cận xấp xỉ đồ thị thực (true plot). Chênh lệch giữa đồ thị thực và đường xấp xỉ lớn nhất là 3 dB, tại điểm cắt.

Pha của hệ bậc 1 (xem mục 4.2.2), được cho bởi $\tan g\phi = -\omega t$



Hình 4.5 : Đồ thị Bode cho G(s)=1/(τs+1)

Tại các tần số thấp, khi ω nhỏ hơn 0,1/τ, pha gần như bằng 0. Tại các tần số cao, khi ω lớn hơn 10/τ, pha gần như bằng -90^0. Giữa hai cực trị này, có thể xét góc pha để tìm ra một đường thẳng hợp lí trên đồ thị Bode (hình 4.5). Sai lệch max. được cho là xẩy ra trong trường hợp đường thẳng $51/_2{}^0$.

Xét một hệ thống bậc 2, có hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.47}$$

Hàm đáp ứng tần số thu được

khi thay s bằng jω:

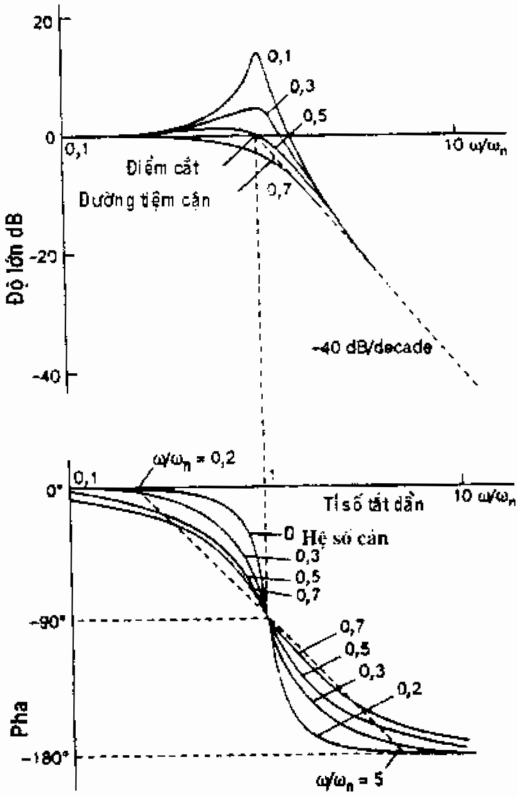
$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \tag{4.48}$$

Khi đó độ lớn sẽ là (xem phần 3.3.2.2):

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + \left[2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})\right]^2}} \tag{4.49}$$

Theo decibel, độ lớn sẽ là:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20\lg\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + \left[2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})\right]^2}} \\ &= -20\lg\sqrt{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + \left[2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})\right]^2} \end{aligned} \tag{4.50}$$



Hình4.6:Đồ thị Bode cho hệ thống bậc 2

Đối với $(\omega/\omega_n)<<1$, độ lớn gần bằng -20lg1 hoặc 0 dB. Vvới $(\omega/\omega_n)>>1$, độ lớn xấp xỉ bằng $-20\lg(\omega/\omega_n)^2$. Như vậy, khi ω tăng bởi hệ số 10, độ lớn tăng bởi hệ số -20log100 hoặc -40dB. Tại các tần số thấp, đồ thị độ lớn là một đường thẳng tại 0dB, trong khi tại các tần số cao, đó là một đường thẳng tần số -40dB/dêcat. Giao điểm của hai đường thẳng này, điểm cắt, là tại $\omega=\omega_n$. Đồ thị độ lớn là đường xấp xỉ được cho bởi hai đường tiệm cận này. Tuy nhiên, giá trị thực phụ thuộc vào hệ số cản ζ. Hình 4.6 thể hiện hai đường tiệm cận và các đồ thị thực (true plot) cho một số hệ số cản (hệ số giảm chấn).

Pha được cho bởi:

$$\tan g\phi = -\frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (4.51)$$

Đối với $(\omega/\omega_n)<<1$, tức$(\omega/\omega_n)=0{,}2$, tangϕ xấp xỉ bằng 0 $\rightarrow$vậy $\phi=0^0$. Đối với $(\omega/\omega_n)>>1$, tức $(\omega/\omega_n)=5$, tangϕ xấp xỉ $-(-\infty)$, $\rightarrow\phi=-180^0$. Khi $\omega=\omega_n$, có $\tan\phi=-\infty \rightarrow \phi=-90^0$. Đường xấp xỉ hợp lí là đường thẳng qua -90^0 tại $\omega=\omega_n$, điểm 0^0 tại $(\omega/\omega_n)=0{,}2$ và -180^0 tại $(\omega/\omega_n)=5$ (xem hình 4.6).

4.4.2. Xây dựng đồ thị Bode (Bode plot)

Xét một hệ thống gồm các thành phần nối tiếp. Hàm truyền của cả hệ thống (xem phần 3.2.2.3)được cho bởi:

$$G(s)=G_1(s)\,G_2(s)\,G_3(s)....v...v. \quad (4.52)$$

Hàm đáp ứng tần số cho một hệ thống có 2 thành phần khi thay s bởi $j\omega$ là:

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)\,G_2(j\omega) \quad (4.53)$$

Ta có thể viết hàm truyền $G(j\omega)$ dưới dạng số phức (xem phần 3.3.2), tức:

$$x+jy=|G_1(j\omega)|(\cos\phi_1+j\sin\phi_1) \quad (4.54)$$

Trong đó $|G(j\omega)|$ là độ lớn và ϕ là pha của hàm đáp ứng tần số. Tương tự ta có thể viết $G2(j\omega)$ là:

$$|G_2(j\omega)|(\cos\phi_2+j\sin\phi_2) \quad (4.55)$$

Như vậy:

$$G(j\omega)=|G_1(j\omega)|(\cos\phi_1+j\sin\phi_1)\times|G_2(j\omega)|(\cos\phi_2+j\sin\phi_2) \quad (4.56)$$

$$=|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|(\cos\phi_1\cos\phi_2+j(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2)+j^2\sin\phi_1\sin\phi_2)$$

Nhưng $j^2=-1$ và do : $\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2=\cos(\phi_1+\phi_2)$

$$\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2=\sin(\phi_1+\phi_2)$$

Nên:

$$G(j\omega)=|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|[\cos(\phi_1+\phi_2)+j(\sin(\phi_1+\phi_2)] \quad (4.57)$$

Hàm đáp ứng tần số của một hệ thống có độ lớn là tích các độ lớn của các thành phần và pha là tổng pha của các thành phần, tức:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|.....v...v. \tag{4.58}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + ...v...v. \tag{4.59}$$

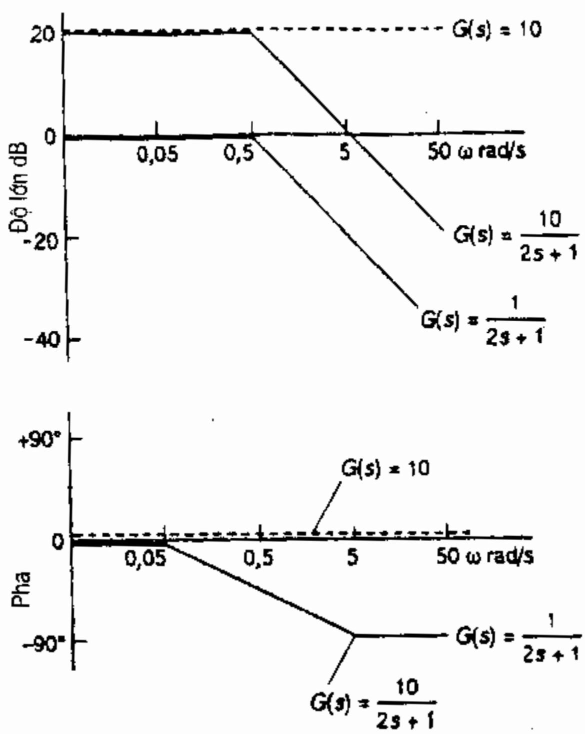
Bây giờ xét đồ thị Bode theo lôgarit của độ lớn:

$$\lg|G(j\omega)| = \lg|G_1(j\omega)| + \lg|G_2(j\omega)| + \lg|G_3(j\omega)|.....v...v \tag{4.60}$$

Như vậy ta có thể có đồ thị Bode của một hệ thống bằng cộng các đồ thị Bode độ lớn của các thành phần cấu thành. Tương tự, đồ thị pha (phase plot) thu được khi cộng pha của các thành phần cấu thành với nhau.

Bằng việc sử dụng một lượng các thành phần cơ bản, ta có thể thu được đồ thị Bode cho một hệ thống lớn. Các thành phần cơ bản được sử dụng là:

1. G(s)=K, cho đồ thị Bode như thể hiện trong hình 4.3.
2. G(s)=1/s , cho đồ thị Bode như thể hiện trong hình 4.4.
3. G(s)=s cho đồ thị Bode , đối xứng giương với loại được thể hiện trong hình 4.4. $|G(j\omega)| = 20dB$ /dêcat, đi qua 0dB tại ω=1 rad/ . φ là một hằng tại 90^0.
4. G(s)=1/(τs +1) cho đồ thị Bode như thể hiện trong hình 4.5.
5. G(s)=τs +1, cho đồ thị Bode, đối xứng giương với loại được thể hiện trong 4.5. ở đồ thị độ lớn, điểm cắt là tại 1/τ với đường trước điểm này thuộc đường 0dB và sau nó là đường dốc 20dB/dêcat. Pha bằng 0 tại 0.1/τ và tăng lên + 90^0 tại 10/τ.



Hình 4.7: Ví dụ

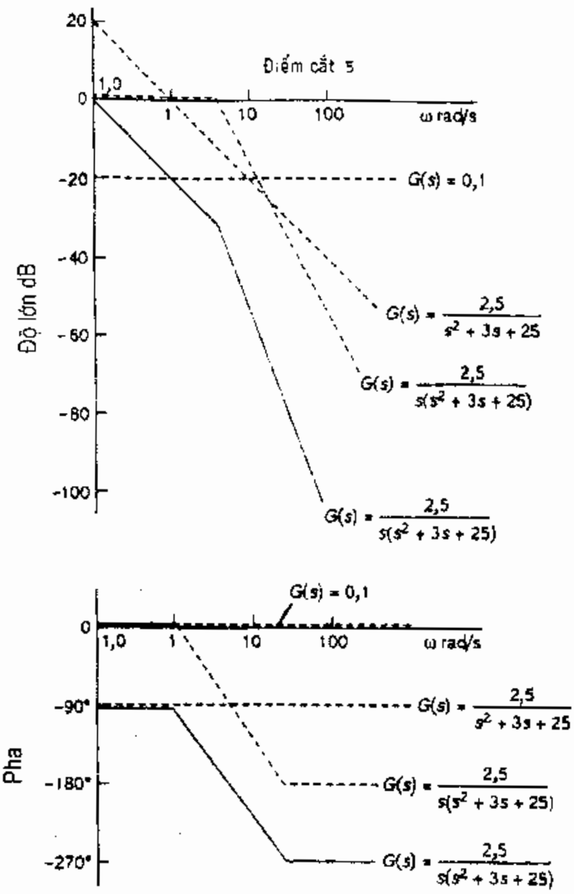
6. G(s)=$\omega_n^2/(s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2)$. Hàm này cho đồ thị Bode như thể hiện trong hình 4.6.

7. G(s)=$(s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2)/\omega_n^2$. Hàm này cho đồ thị Bode, đối xứng gương với loại thể hiện trong hình 4.6

Ví dụ 4.6: Để minh hoạ vấn đề nêu trên, ta xét hình vẽ các đường tiện cận của đồ thị Bode cho một hệ thống có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{10}{2s+1} \tag{4.61}$$

Hàm truyền (4.61) được cấu thành bởi 2 thành phần, một là hàm truyền của 10 và một là hàm truyền 1/(2s+1). Có thể vẽ đồ thị Bode cho từng thành phần rồi cộng với nhau để tạo thành đồ thị yêu cầu. Đồ thị Bode cho hàm truyền 10 có dạng cho trong hình 4.3 với K=10, còn đồ thị Bode cho 1/(2s+1) thì tựa như loại cho trong hình 4.5 với τ=2. Kết quả được thể hiện trong hình 4.7



Hình 4.8: *Đồ thị Bode cho hệ thống bậc 2*

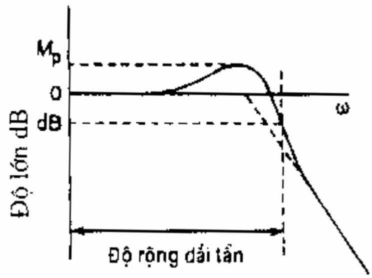
Ví dụ 4.7: Xét hình vẽ các đường tiện cận của đồ thị Bode cho một hệ thống có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{2.5}{s(s^2+3s+25)} \tag{4.62}$$

Hàm truyền trên được cấu thành từ 3 thành phần, một với hàm truyền 0,1, một với hàm truyền 1/s và 1 với hàm truyền 25/(s2+3s+25). Hàm truyền 0,1 sẽ cho 1 đồ thị Bode tựa như trong hình 4.3 với K=0,1. Hàm truyền 1/s sẽ cho đồ thị Bode tựa như trong hình 4.4. Hàm truyền

25/(s2+3s+25) có thể được thể hiện theo $\omega_n^2/(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2)$ với ω_n=5 rad/s và ζ=0,3, có điểm cắt khi $\omega=\omega_n$=5 rad/s. Tiệm cận đối với pha qua -90^0 tại điểm cắt là 0^0 khi ta có (ω/ω_n) =0,2 và là -180^0 khi (ω/ω_n)=5. Hình 4.8 thể hiện đồ thị Bode tổng hợp.

4.5. ĐẶC ĐIỂM KỸ THUẬT



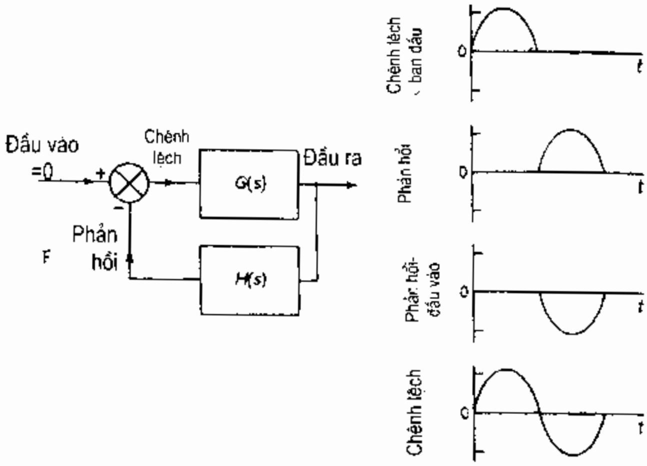
Hình 4.9: Đặc tính thực hiện

Các thuật ngữ sử dụng để miêu tả đặc điểm của một hệ thống, khi chịu tín hiệu đầu vào hình sin là *cộng hưởng cực đại* (peak resonance)và *độ rộng dải tần* (bandwidth). *Cộng hưởng cực đại* (peak resonance) M_p được định nghĩa là giá trị max. của độ lớn (hình 4.9). Cộng hưởng cực đại tương ứng với giá trị sự vượt quá max. của một hệ thống. Đối với một hệ thống bậc 2 , sự cộng hưởng có quan hệ trực tiếp với hệ số cản (damping ratio) khi so sánh đáp ứng với đồ thị Bode ở hình 4.6. Ta nhận thấy một hệ số cản thấp tương ứng với một cộng hưởng đỉnh cao. *Độ rộng dải tần* được định nghĩa là băng tần số trong khoảng đó độ lớn không thấp dưới -3dB. Đối với hệ thống cho đồ thị Bode ở hình 4.9, độ rộng dải tần là khoảng mở giữa tần số 0 và tần số tại đó độ lớn tụt xuống -3dB.

4.6. ĐỘ ỔN ĐỊNH

Khi có một tín hiệu hình sin ở đầu vào một hệ thống, đầu ra hệ thống có thể là tín hiệu sin cùng tần số góc, nhưng cũng có thể với biên độ và pha khác với tín hiệu đầu vào. Xét một hệ thống vòng lặp kín có phản hồi âm (hình 4.10), không có tín hiệu vào. Giả sử, vì một lí do, ta có xung sin chỉnh lưu một nửa là tín hiệu sai lệch trong hệ thống. Tín hiệu này qua đầu ra và hồi hoàn, tới thành phần so sánh (comparator element) với biên độ không đổi nhưng pha thay đổi -180^0 (như thể hiện ở hình 4.10). Khi tín hiệu này được trừ khỏi tín hiệu đầu vào, ta có một sai lệch tổng, tiếp tục xung chỉnh lưu một nửa ban đầu. Rồi xung này quay lại vòng phản hồi, lại tiếp tục tín hiệu theo thời gian. Như vậy ta có một dao động tự duy trì (self-sustaining oscilation).

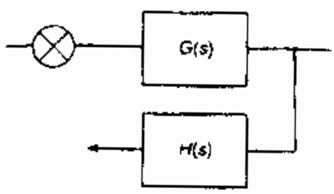
Để có dao động tự duy trì, hệ thống phải có hàm đáp ứng tần số với độ



Hình 4.10: Dao động tự duy trì

lớn bằng 1và pha -180^0 (như thể hiện ở hình 4.10). Hệ thống tín hiệu qua là: G(s) nối tiếp với H(s). Nếu độ lớn nhỏ hơn 1 thì từng xung sóng một nửa tiếp theo sau sẽ có kích thước nhỏ hơn, như vậy dao động sẽ tắt dần. Nếu như độ lớn lớn hơn 1, sóng xung tiếp theo sẽ lớn hơn sóng trước đó, có hiện tượng tích sóng, như vậy hệ thống không ổn định. Có thể rút ra một số kết luận sau:

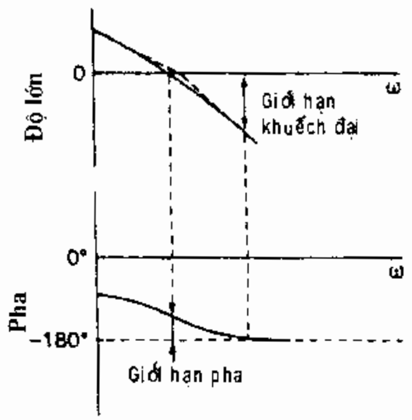
1. Một hệ thống điều khiển sẽ dao động với một biên độ không đổi nếu như độ lớn tổng hợp từ hệ thống G(s) nối tiếp với H(s) là 1 và pha là-180^0.
2. Một hệ thống điều khiển sẽ dao động với một biên độ giảm dần nếu độ lớn tổng hợp từ hệ thống G(s) nối tiếp với H(s) là nhỏ hơn 1 và pha là-180^0.
3. Một hệ thống điều khiển sẽ dao động với một biên độ tăng dần, như vậy là không ổn định, nếu độ lớn tổng hợp từ hệ thống G(s) nối tiếp với H(s) lớn hơn 1 và phase là-180^0.



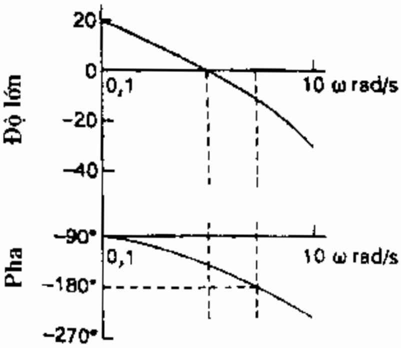
Hình4.11: Hàm truyền đạt vòng mở

Hàm truyền cho hệ G(s) nối tiếp H(s) được gọi là *hàm truyền vòng mở* (open –loop transfer function), giống trường hợp vòng kín thể hiện trong hình 4.10 với sự ngắt tại bộ so sánh (comparator), như thể hiện ở hình 4.11. *Hàm truyền của vòng mở là tích hàm truyền G(s)H(s).*

Một hệ thống *điều khiển vòng mở* tốt, *ổn định* thường yêu cầu độ lớn của hàm truyền vòng mở, *tức* $|G(s)H(s)|$ *phải nhỏ hơn 1 (giá trị thường dùng là từ*



Hình 4.12:các giới hạn khếch đại và pha



Hình 4.13: Ví dụ

0,4 đến 0,5). Hơn nữa, *góc pha phải trong khoảng* $-115^0 \div -125^0$. Những giá trị này tạo nên một hệ thống điều khiển bị cản nhẹ (under-damped control system), loại với đầu vào dạng bậc, đem lại khoảng 20% đến 30% lượng quá điều chỉnh, hệ số suy giảm khoảng từ 3 đến 1 (xem phần 3.1.4).

Đồ thị Bode cho hàm truyền vòng mở có thể được sử dụng để thể hiện độ ổn định của hệ thống. Thuật ngữ *giao pha* (phase crossover) được dùng cho tần số trong đồ thị phase (đồ thị phase) tại đó góc pha đầu tiên đạt -180^0. Thuật ngữ *biên khuếch đại* (gain margin) được sử dụng cho hệ số mà độ lớn nhân với tại giao pha cho giá trị 1 (hình 4.12). Thuật ngữ *giao khuếch đại* (gain crossover) được sử dụng cho tần số trong đồ thị độ lớn, tại đó độ lớn đầu tiên của vòng mở đạt giá trị 1. Thuật ngữ *biên pha (phase margin)* được sử dụng cho một số mức, ở đó góc pha nhỏ hơn -180^0 tại giao khuếch đại (hình 4.12) . Những nguyên tắc trên được xem xét cho hệ thống điều khiển, gọi là hệ thống ổn định tốt nếu có biên khuếch đại trong khoảng 2 và 2,5 và biên pha trong khoảng 45^0 và 65^0))

Ví dụ 4.8 :Để minh hoạt, xét một đồ thị Bode trong hình 4.13 cho một hàm truyền vòng mở của một hệ thống điều khiển. Biên khuếch đại là giá trị độ lớn khi pha -180^0 là khoảng 8dB, có nghĩa: *8=20lg (độ lớn).* Như vậy độ lớn là $10^{8/20}=2,5$, biên pha là chênh lệch pha so với -180^0 khi độ lớn bằng 0, là khoảng 40^0. Hệ thống này được cho là hệ thống ổn định.

Ví dụ 4.9: Xác định giá trị K cho hệ thống với hàm truyền vòng mở $\frac{K}{s(2s+1)(s+1)}$, cho biên khuếch đại 3dB (≈ 2). Hàm đáp ứng tần số của vòng mở là:

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j2\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)} \tag{4.63}$$

Nhân tử và mẫu với $(-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2))$, cho:

$$G_0(j\omega) = \frac{-3K\omega^2 + jK\omega(1-2\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2} \tag{4.64}$$

Độ lớn của hàm đáp ứng tần số –vòng mở là:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}} \tag{4.65}$$

Pha là:

$$\tan g\phi = \frac{1-2\omega^2}{3\omega} \tag{4.66}$$

Đối với hệ thống có biên khuếch đại 3dB, thì đó phải là giá trị độ lớn tại ϕ=-180^0. Tại góc này, phương trình trên cho $1\text{-}2\omega^2=0$ và như vậy $\omega = 1/\sqrt{2}$. Tại góc này:

$$\textit{Biên khuếch đại} = -20lg\ |G_0(j\omega)| \tag{4.67}$$

nên:

$$3 = -20\lg\left[\frac{K}{\sqrt{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}}\right] \tag{4.68}$$

$$3 = -20\lg\left[\frac{K}{\sqrt{9/4+0}}\right] \quad \text{Do đó } K/(3/2)=10\text{-}3/20 \rightarrow K=1{,}06 \tag{4.69}$$