

CHƯƠNG 5. PHÂN TÍCH TRẠNG THÁI VÀ ĐẶC TÍNH CỦA HỆ THỐNG

5.1. TRẠNG THÁI CỦA MỘT HỆ THỐNG

Trạng thái $x(t_0)$ của một hệ thống động tại thời gian t_0 là tập hợp các biến, cùng đầu vào $u(t)$ với $t \geq t_0$ định hoạt động của hệ thống đối với mọi tất cả $t \geq t_0$.

Cơ sở của định nghĩa này là ghi nhận trạng thái về cấu hình hiện thời của một hệ thống. Vì thế bộ nhớ của hệ thống động học được dành riêng lưu giữ các biến trạng thái tại thời điểm hiện thời t_0 (gọi là điều kiện ban đầu). Các phương cách hoạt động trong tương lai của hệ thống được quyết định bởi điều kiện ban đầu $x(t_0)$ và đầu vào $u(t)$ đối với $t \geq t_0$. Trạng thái hệ thống có thể viết là một tập hợp:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Trong đó n là số lượng các trạng thái. Một tập hợp biến bất kì, thoả mãn định nghĩa trên là một trạng thái hợp lệ, cho dù trạng thái có thể không là duy nhất.

Những đề cập trong phần này là các vấn đề trạng thái của các hệ thống động lực. Các hệ thống động lực là các hệ thống mà các biến số của hệ thống liên quan lẫn nhau, không những theo phương diện đại số mà cả sự can thiệp các tác động tích lũy và tốc độ thay đổi chúng. Các mô hình hệ thống động lực có thể được xây dựng trong miền thời gian liên tục, gián đoạn hoặc trong miền thời gian liên tục- gián đoạn (những hệ thống lai, hệ thống lấy mẫu). Sau đây ta xem xét các trường hợp này.

5.1.1. Biến trạng thái

Một trong những phân loại thường được sử dụng nhất cho mô hình là theo các hệ phương trình đã được xác định về tập hợp các nội biến (inner variable) của hệ thống. Các nội biến được gọi là các *biến trạng thái* (state variable). Khi giá trị biến hệ thống có tại một thời điểm tức thời xác định, hình thành *trạng thái hệ thống* (system state). Nhiều nghiên cứu coi biến trạng thái và trạng thái hệ thống là đồng nghĩa.

Tập hợp các biến trạng thái của một hệ thống cho trước là tập hợp nội biến, như vậy mọi biến hệ thống có thể được tính toán (computed) như là một hàm của trạng thái hiện tại và là các đầu vào hệ thống hiện tại và tương lai. Định nghĩa này hàm ý nếu biết trạng thái ở một thời gian t ta có thể tính được năng lượng tích trong hệ thống tại thời điểm ấy. Năng lượng tích phụ thuộc vào một số biến hệ thống (tốc độ, điện áp, vị trí, nhiệt độ, áp suất, v...v) và theo định nghĩa có thể tính được từ trạng thái hệ thống.

Theo định nghĩa này, tổng quát hơn có thể hiểu trạng thái, các biến trạng thái có thể chọn như là hàm của các thay đổi bên trong hệ thống. Điều này tạo khoảng cách giữa trạng thái và thể hiện vật lý của nó và cũng tạo nên một đặc điểm thú vị, rằng khả năng chọn lựa các biến trạng thái không là duy nhất.

Một nhận xét quan trọng nữa là, sự phát triển của trạng thái với thời gian có thể tính từ giá trị hiện tại của trạng thái và các đầu vào hiện tại và tương lai. Vì vậy các mô hình liên quan là các phương trình vi phân bậc 1 cho thời gian liên tục hoặc đệ quy nhảy một nhịp cho thời gian gián đoạn (one-step recursive).

5.1.2. Các mô hình không gian trạng thái cơ bản

Nếu biểu thị x là vectơ tương ứng sự lựa chọn các biến trạng thái đặc thù, dạng tổng quát của mô hình biến trạng thái là:

Đối với các hệ thống thời gian liên tục (continuous-time systems):

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t), t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = G(x(t), u(t), t) \quad (5.2)$$

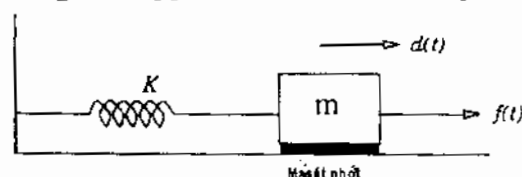
Trong đó $u(t)$ là vectơ đầu vào và $y(t)$ là vectơ đầu ra hệ thống.

Đối với các hệ thống thời gian gián đoạn (discrete-time systems):

$$x[t+1] = F_d(x[t], u[t], t) \quad (5.3)$$

$$y[t] = G_d(x[t], u[t], t) \quad (5.4)$$

Trong đó $u[t]$ là vectơ đầu vào (input vector) và $y[t]$ là vectơ đầu ra (output vector) hệ thống



Hình 5.1: Mô hình hệ thống cơ khí

Ví dụ 5.1: Một ngoại lực $f(t)$ tác dụng vào một hệ thống khối lượng-lò xo. Vị trí $d(t)$

được đo tương ứng với vị trí khối lượng khi lò xo được nhả và không chịu ngoại lực. Chuyển động của khối lượng chậm dần do lực ma sát nhớt, ma sát này tỉ lệ thuận với tốc độ $v(t)$ của khối lượng.

Từ nguyên lý hệ thống thời gian liên tục ta có thể tính vị trí khối lượng và tốc độ của khối lượng nếu biết tốc độ ban đầu của khối lượng và lượng giãn dài lò xo ban đầu. Như vậy vectơ trạng thái phải có hai thành phần, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, chọn trạng thái tự nhiên là:

$$x_1(t) = d(t) \quad (5.5)$$

$$x_2(t) = v(t) = \dot{x}_1(t) \quad (5.6)$$

Với sự lựa chọn này, ta có thể áp dụng định luật Newton để có:

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} + Kd(t) + Dv(t) = m\dot{x}_2(t) + Kx_1(t) + Dx_2(t) \quad (5.7)$$

Trong đó m là khối lượng, D là hằng số, tỉ lệ thuận với ma sát nhớt. Phương trình trạng thái có thể viết lại là:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{m}x_1(t) - \frac{D}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}f(t) \quad (5.9)$$

Nhận xét, năng lượng $w(t)$ tích trong hệ thống được cho bởi:

$$w(t) = \frac{1}{2} Kd^2(t) + \frac{1}{2} mv^2(t) = x(t)^T \Lambda x(t) \quad (5.10)$$

với Λ là ma trận chéo: $\Lambda = \text{diag} \left\{ \frac{K}{2}, \frac{m}{2} \right\}$

Tính không độc nhất của vectơ trạng thái: đánh giá tính không độc nhất của vectơ trạng thái được thực hiện, thay vì sự lựa chọn được thực hiện ở (5.8), ta có thể chọn một trạng thái mới $\bar{x}(t)$ liên quan với $x(t)$ bởi một ma trận không suy biến $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tức:

$$\bar{x}(t) = Tx(t) \quad (5.11)$$

(xem tiếp ở phần biến đổi đồng dạng trạng thái).

Tín hiệu và mô tả không gian trạng thái

Không gian trạng thái cũng có thể được sử dụng để mô tả các trạng thái đa dạng của tín hiệu khi sử dụng mô hình, dạng:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad ; \quad \dot{y}(t) = Cx(t) \quad \text{cho các tín hiệu thời gian- liên tục} \quad (5.12)$$

$$x[t+1] = A_q x[t], \quad y[t] = C_q x[t] \quad \text{cho các tín hiệu thời gian- rời rạc} \quad (5.13)$$

Ví dụ 5.2: Để minh hoạ, xét một tín hiệu thời gian- liên tục cho bởi:

$$f(t) = 2 + 4\cos(5t) - \sin(5t) \quad (5.14)$$

Tín hiệu này được hiểu là nghiệm phương trình vi phân đồng nhất:

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} + 25 \frac{df(t)}{dt} = 0 \quad \text{có } f(0) = 6, \quad \dot{f}(0) = -5 \quad \text{và} \quad \ddot{f}(0) = -100 \quad (5.15)$$

Nếu chọn các biến trạng thái $x_1(t) = f(t)$, $x_2(t) = \dot{f}(t)$ và $x_3(t) = \ddot{f}(t)$, thì mô hình trạng thái cho tín hiệu này là:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] x(t) \quad (5.16)$$

Trong việc sử dụng mô hình không gian trạng thái này, các biến trạng thái không có nghĩa vật lý đặc biệt. Tuy nhiên việc mô tả này đặc biệt hữu ích trong lý thuyết xây dựng lại tín hiệu và giải quyết nhiều trong việc tổng hợp hệ thống điều khiển.

5.2. MÔ TẢ KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI CHO HỆ THỐNG THỜI GIAN-LIÊN TỤC

Những phân tích sau tập trung vào loại các hệ thống bất biến thời gian và tuyến tính. Để thực hiện điều này ta xem xét việc xây dựng một mô hình tuyến tính từ các phương trình không tuyến tính (5.1) và 5.(2).

Một hạn chế nữa trong phần này là hệ thống nghiên cứu có trễ thời gian không thuần khiết. Đặc điểm này tạo nên một vectơ trạng thái có thứ nguyên không xác định. Hệ thống như vậy sẽ được bàn đến ở 5.1.4.

5.2.1. Tuyến tính hoá

Vì bàn đến các hệ thống không thay đổi với thời gian, phương trình (5.1) và (5.2) có thể viết lại là:

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \quad (5.17)$$

$$y(t) = G(x(t), u(t)) \quad (5.18)$$

Giả thiết, mô hình (5.17) và (5.18) có ít nhất một *điểm cân bằng* (equilibrium point) cho bởi $\{x_Q, u_Q, y_Q\}$, 3 tọa độ chiếu theo 3 vectơ bất biến thoả mãn:

$$0 = F(x_Q, u_Q) \quad (5.19)$$

$$y_Q = G(x_Q, u_Q) \quad (5.20)$$

Ghi chú: điểm cân bằng được xác định bởi đạo hàm trạng thái bằng 0.

Nếu xét vùng quanh điểm cân bằng, ta có thể xấp xỉ mô hình (5.17), (5.18) bởi dãy Talor rút gọn, có dạng:

$$\dot{x}(t) \approx F(x_Q, u_Q) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (x(t) - x_Q) + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (u(t) - u_Q) \quad (5.21)$$

$$y(t) = G(x_Q, u_Q) + \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (x(t) - x_Q) + \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (u(t) - u_Q) \quad (5.22)$$

Khi đó, phương trình (5.21) và (5.22) có thể viết lại là:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \quad (5.23)$$

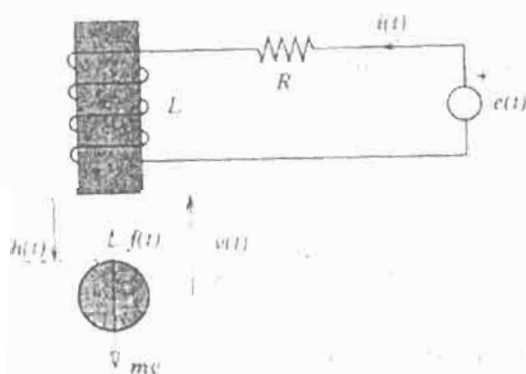
$$\Delta y(t) = C\Delta x(t) + D\Delta u(t) \quad (5.24)$$

Trong đó:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_Q \quad \Delta u(t) = u(t) - u_Q \quad \Delta y(t) = y(t) - y_Q \quad (5.25)$$

và:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} \quad C = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} \quad D = \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} \quad (5.26)$$



Hình 5.2 Hệ thống nâng từ tính

Các ý tưởng về tuyến tính hoá sẽ được minh hoạ bởi các ví dụ sau:

Ví dụ 5.3: Xét hệ thống nâng có từ tính được thể hiện trong hình 5.2, trong đó quả cầu kim loại chịu hai lực: trọng lực mg và lực hút sinh ra bởi nam châm điện $f(t)$. Nam châm điện được điều khiển qua nguồn điện

áp $e(t) > 0 \forall t$. Lực hút trên quả cầu $f(t)$ phụ thuộc vào khoảng cách $h(t)$ và dòng $i(t)$. Mỗi quan hệ này có thể miêu tả xấp xỉ bởi:

$$f(t) = \frac{K_1}{h(t) + K_2} i(t) \quad (5.27)$$

với K_1 và K_2 là các hằng số dương.

Sử dụng các nguyên lí thứ nhất, ta có thể viết:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.28)$$

$$v(t) = -\frac{dh(t)}{dt} \quad (5.29)$$

$$f(t) = \frac{K_1}{h(t) + K_2} i(t) = mg + m \frac{dv(t)}{dt} \quad (5.30)$$

Chọn các biến trạng thái là: dòng $i(t)$, vị trí quả cầu $h(t)$ và tốc độ của quả cầu $v(t)$, ta có:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T = [i(t) \ h(t) \ v(t)]^T \quad (5.31)$$

Từ (5.28÷5.30) ta có thể đặt sự diễn tả hệ thống theo (5.1) như sau:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} e(t) \quad (5.32)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_3(t) \quad (5.33)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{K_1}{m(x_2(t) + K_2)} x_1(t) - g \quad (5.34)$$

Trước khi xây dựng mô hình tuyến tính hoá, phải tính điểm cân bằng. Đầu vào truyền điện trong hệ thống này là điện áp nguồn $e(t)$, điểm cân bằng thu được với $e(t) = E_Q$. Vì vậy, có thể tính trạng thái cân bằng với các công thức từ (5.32)÷(5.34), khi đặt tất cả các đạo hàm bằng 0, tức :

$$-\frac{R}{L} x_{1Q} + \frac{1}{L} E_Q = 0 \Rightarrow x_{1Q} = \frac{E_Q}{R} \quad (5.35)$$

$$-x_{3Q} = 0 \Rightarrow x_{3Q} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{K_1}{m(x_{2Q} + K_2)} x_{1Q} - g = 0 \Rightarrow x_{2Q} = \frac{K_1}{mg} x_{1Q} - K_2 = \frac{K_1 E_Q}{mgR} - K_2 \quad (5.37)$$

Sự thiết lập trên là đủ để dựng một mô hình tuyến tính hoá ở đầu vào gia

số (incremental input) $\Delta e(t)$ và trạng thái gia số (incremental state) $\Delta x(t) = [\Delta x_1(t) \quad \Delta x_2(t) \quad \Delta x_3(t)]^T$, kết quả là:

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L}\Delta x_1(t) + \frac{1}{L}\Delta e(t) \quad (5.38)$$

$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = -\Delta x_3(t) \quad (5.39)$$

$$\frac{d\Delta x_3(t)}{dt} = \frac{Rg}{E_Q}\Delta x_1(t) - \frac{Rmg^2}{K_1 E_Q}\Delta x_2(t) \quad (5.40)$$

Nếu coi $h(t)$ - vị trí của quả cầu là đầu ra, ta có thể so sánh các phương trình trên với (5.23) và (5.24) để thu được:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{Rg}{E_Q} & -\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D=0 \quad (5.41)$$

Trong những phần tiếp, ta bỏ kí tự Δ ra ngoài nhưng xin lưu ý, mô hình ở trên là tuyến tính trong các thành phần gia số (Δ) của trạng thái, các đầu ra và đầu vào ở quanh điểm cân bằng được chọn.

5.2.2. Mô hình không gian trạng thái tuyến tính

Trước tiên, ta xét mô hình không gian trạng thái bất biến thời gian tuyến tính:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.42)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (5.43)$$

Nghiệm của phương trình (5.42), theo ràng buộc $x(t_0)=x_0$, được cho bởi:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.44)$$

Với ma trận chuyển tiếp e^{At} thỏa mãn:

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \quad (5.45)$$

Với kết quả này, giải phương trình (5.43) cho:

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (5.46)$$

Động lực học hệ thống

Trạng thái của một hệ thống có hai thành phần, thành phần tự nhiên $x_n(t)$ (tức thành phần không cưỡng bức) và thành phần cưỡng bức x_f , với:

$$x_n(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad (5.47)$$

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (5.48)$$

Để thấu hiểu mô hình không gian trạng thái và cách giải chúng, ta xét trường hợp khi $t_0=0$ và $u(t)=0 \forall t \geq 0$, tức trạng thái chỉ có thành phần tự nhiên (không cưỡng bức), khi ấy:

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (5.49)$$

Tiếp theo, giả thiết là $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và để đơn giản, chúng có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ với n (độc lập tuyến tính) vectơ riêng $v_1, v_2, \dots, v_n$. Khi đó luôn tồn tại một tập hợp các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, mà:

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (5.50)$$

Kết quả từ đại số tuyến tính cho biết, các giá trị riêng của A^k là $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ với các vectơ riêng tương ứng $v_1, v_2, \dots, v_n$. Việc áp dụng kết quả này cho:

$$x(t) = e^{At} x_0 = I + \sum_{l=1}^n \alpha_l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{A^k v_l t^k}_{\lambda_l^k v_l} = \sum_{l=1}^n \alpha_l e^{\lambda_l t} v_l \quad (5.51)$$

Phương trình này thể hiện, thành phần không cưỡng bức của trạng thái là một kết hợp tuyến tính các dao động tự nhiên (natural mode) $\{e^{\lambda_l t}\}$, mỗi một dao động kết hợp với một giá trị riêng A . Do vậy, ma trận A quyết định:

- Cấu trúc của đáp ứng không cưỡng bức.
- Tính ổn định của hệ thống.
- Tốc độ đáp ứng.

5.2.3. Cấu trúc của đáp ứng không cưỡng bức (unforced response)

Khi không có đầu vào, trạng thái tiến triển như một tổ hợp các dao động tự nhiên, thuộc loại đã được định nghĩa về hàm: là các hàm mũ với số mũ là số thực hoặc là số phức. Các dao động này gồm cả các sóng sin không đổi, sóng sin hàm mũ số thực, sóng thuần SIN, các sóng sin điều biến số mũ và một số hàm đặc biệt khác nảy sinh từ các giá trị đặc trưng được lặp lại.

5.2.4. Cấu trúc của đáp ứng cưỡng bức (forced response):

Khi trạng thái ban đầu là 0, trạng thái sẽ thể hiện chỉ mỗi thành phần cưỡng bức. Thành phần cưỡng bức của trạng thái sẽ gồm cả các dao động tự nhiên và một số dao động cưỡng bức bổ sung hoặc dao động đặc thù, phụ thuộc vào bản chất đầu vào $u(t)$ của hệ thống. Thường, các dao động cưỡng bức trong đầu vào sẽ cũng xuất hiện trong trạng thái. Tuy nhiên có một số trường hợp đặc biệt phát sinh khi một số dao động cưỡng bức trong $u(t)$ trùng với một số dao động tự nhiên của hệ thống.

Tính ổn định của hệ thống

Ổn định trong các hệ thống bất biến theo thời gian và tuyến tính có thể phân tích được khi sử dụng ma trận trạng thái A.

Tất cả các biến hệ thống có thể biểu diễn là các hàm tuyến tính của trạng thái và đầu vào hệ thống. Khi đầu vào hệ thống $u(t)$ là vectơ của các hàm giới hạn thời gian (bounded time functions), khi đó biên của các biến phụ thuộc vào trạng thái bị giới hạn.

Định lý 1: Xét một hệ thống được mô tả trạng thái bởi phương trình (5.42) và (5.43), trong đó A, B, C, và D có các phần tử bị giới hạn. Khi ấy trạng thái hệ thống (và vì thế đầu ra hệ thống) bị ràng buộc cho tất cả các đầu vào giới hạn nếu và chỉ nếu các giá trị riêng của A có các phần thực âm.

Ví dụ 5.4: Để minh họa định lý 1, ta xét lại ví dụ ở hình 5.2. Đối với hệ thống này ma trận A (ở mô hình tuyến tính hoá) được cho bởi:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{Rg}{E_Q} & -\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Các giá trị riêng của ma trận này là nghiệm của $\det(\lambda I - A) = 0$, ở đây:

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda + \frac{R}{L} \right) \left(\lambda - \sqrt{\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q}} \right) \left(\lambda + \sqrt{\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q}} \right) \quad (5.53)$$

Khi trong các giá trị riêng của ma trận có một giá trị thực và lớn hơn 0, hệ quả là hệ thống không ổn định (unstable). Điều này phù hợp với lý luận vật lý. Thực vậy, theo lý thuyết, ít nhất ta có thể định vị quả cầu cân bằng (được mô tả bởi phương trình (5.27)). Tuy nhiên đó là một điểm cân bằng không ổn định, vì ngay khi ta có tác động (nhiều) nhẹ lên quả cầu, nó sẽ tăng tốc hoặc xuống nền hoặc về thanh nam châm điện.

Tốc độ đáp ứng và cộng hưởng

Ngay cả khi hệ thống là ổn định thì vẫn còn nhiều câu hỏi liên quan đến những tính chất cơ bản khác.

Trong một hệ thống ổn định, phần thực của giá trị riêng quyết định tốc độ hội tụ về 0 của các dao động liên quan. Các dao động chậm nhất là các dao động có ảnh hưởng (dominant modes), quyết định tốc độ tại đó đầu ra hệ thống xác lập giá trị trạng thái không thay đổi, tức quyết định tốc độ đáp ứng của hệ thống. Ví dụ nếu các giá trị riêng có ảnh hưởng quyết định của hệ thống là:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_0, \sigma > 0 \quad (5.54)$$

Các dao động tự nhiên liên quan sinh một sóng sin chậm dần số mũ:

$$y(t) = Ae^{-\sigma t} \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.55)$$

Ta nhận thấy tín hiệu ở (5.55) phân rã nhanh hơn đối với một α lớn hơn.

Một vấn đề đặc biệt quan trọng đối với các cấu trúc đàn hồi là sự hiện diện của cộng hưởng. Trong các hệ thống vật lý, sự tồn tại các giá trị riêng phức hợp có quan hệ mật thiết đến sự hiện diện 2 dạng năng lượng. Sự cộng hưởng mô tả sự dao động (ít cản) giữa hai loại năng lượng này. Trong mạch điện, các năng lượng này là năng lượng tĩnh điện trong các tụ và năng lượng động từ trong các phần cảm điện. Trong hệ thống cơ thì đó là năng lượng động để chuyển dịch khối lượng và thế năng trong các lò xo. Các kết cấu đàn hồi có thể có một số dao động cộng hưởng. Một trong những vấn đề chính để xảy ra cộng hưởng là khi đầu vào chứa năng lượng tại một tần số, gần với tần số cộng hưởng. Ví dụ nếu một hệ thống có giá trị riêng:

$$\lambda_{1,2} = -0,05 \pm j \quad (5.56)$$

tức tần số cộng hưởng là 1rad/s và một trong các thành phần đầu vào là sóng

sin, tần số 0,9 rad/s, khi đó đầu ra hệ thống biểu lộ một dao động (cường bức) rất lớn với các biên độ đầu tiên phát triển gần như tuyến tính, sau đó ổn định ở một giá trị không đổi. Trong thực tế, hiện tượng này có thể phá hủy hệ thống.

5.2.5. Sự biến đổi đồng dạng trạng thái

Như đã nói điểm 5.1.1., sự chọn lựa các biến trạng thái không phải là duy nhất. Giả sử ta có một hệ thống, đầu vào là $u(t)$, đầu ra $y(t)$ và 2 sự lựa chọn khác nhau của vectơ trạng thái: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ với 4 đại lượng liên quan (A, B, C, D) và $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ với các đại lượng liên quan $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ khi đó tồn tại một ma trận không suy biến (nonsingular) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, như:

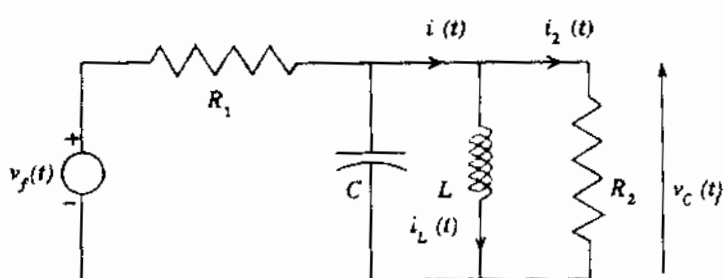
$$\bar{x}(t) = Tx(t) \Leftrightarrow x(t) = T^{-1}\bar{x}(t) \quad (5.57)$$

Phương trình này dẫn đến sự tương đương;

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1} \quad (5.58)$$

Sự lựa chọn khác nhau các biến trạng thái có thể hoặc cũng có thể không đáp ứng được các tiếp cận hiện tượng học khác nhau đối với phân tích hệ thống. Đôi khi đó chỉ là vấn đề về đơn giản toán học hoặc là sự quyết định về các phương tiện liên quan để đo các biến hệ thống. Nhưng quan trọng là dù cách mô tả trạng thái nào được chọn thì những đặc tính cơ bản của hệ thống cụ thể sẽ không thay đổi vì thực tế, các giá trị riêng của hệ thống là bất biến đối với các biến đổi đồng dạng, do:

$$\det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda ITT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T) \det(\lambda I - A) \det(T^{-1}) = \det(\lambda I - A) \quad (5.59)$$



Hình 5.3: Mạch điện

Như vậy độ ổn định, bản chất của đáp ứng không cường bức và tốc độ đáp ứng là không đổi đối với các biến đổi đồng dạng.

Ví dụ 5.3: Xét mạch điện (hình 5.3). Chọn vectơ trạng thái:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [i_L(t) \ v_c(t)]^T \text{ và } u(t) = v_f(t).$$

Sử dụng các nguyên lý thứ nhất, ta có:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.60)$$

Có thể lựa chọn vector trạng thái $\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t) \quad \bar{x}_2(t)]^T = [i(t) \quad i_2(t)]^T$. Trường hợp này ta có trạng thái:

$$\bar{x}(t) = \underbrace{\frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} R_2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_T x(t) \quad (5.61)$$

5.2.6. Môi quan hệ không gian trạng thái và các hàm truyền đạt

Không gian trạng thái hướng đến hàm truyền

Mối quan hệ đầu ra và đầu vào của một hệ thống động trong miền tần số được mô tả bởi một hàm truyền đạt, thu được khi sử dụng biến đổi Laplace với các điều kiện ban đầu là 0 (như đã đề cập ở mục 3.2.1). Đối với một hàm bất biến thời gian tuyến tính với đầu vào $u(t) \in {}^m$ và đầu ra $y(t) \in {}^p$, hàm truyền $H(s) \in {}^{p \times m}$ được xác định bởi phương trình:

$$Y(s) = H(s)U(s) \text{ trong đó } [H(s)]_{ij} = \frac{Y_j(s)}{U_i(s)} \quad (5.62)$$

Tức thành phần (i, j) trong ma trận $H(s)$ là biến đổi Laplace của đáp ứng trong đầu ra i^{th} khi một xung lực đơn vị đặt ở đầu vào j^{th} , với các điều kiện ban đầu bằng 0 và với các đầu vào còn lại bằng 0 cho tất cả $t \geq 0$.

Mặt khác nếu biến đổi Laplace (5.42), (5.43) với các điều kiện ban đầu bằng 0, ta có:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) \quad (5.63)$$

$$Y(s) = C X(s) + D U(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D)}_{H(s)} U(s) \quad (5.64)$$

Để đơn giản và có thể phân tích sâu hơn, ta xét các hệ thống vô hướng (scalar system), tức hệ thống chỉ có một đầu vào và một đầu ra. Tức $m=p=1$, B trở thành vector cột, C vector hàng và $D=H(\infty)$ (trong các hệ thống thực, thường $D=H(\infty)=0$). Đối với các hệ thống vô hướng, $H(s)$ là thương của các đa thức theo s , tức:

$$H(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A) B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (5.65)$$

ở đây, $Adj(o)$ biểu hiện ma trận liên hợp (o).

Vấn đề cơ bản rằng các cực của hàm truyền là các giá trị riêng của ma trận A . Tuy nhiên nhìn chung điều đó không đúng, có thể tập hợp các cực của hàm truyền trùng với tập hợp các giá trị riêng của ma trận A , nhưng cũng có thể khác, điều này có thể được làm rõ qua ví dụ 5.4:

Ví dụ 5.4: Cho:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 1]; \quad D = 0$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.5(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{0.5}{(s+3)} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Như vậy, hàm truyền chỉ có một cực, mặc dù ma trận A có hai giá trị riêng. Ta nhận thấy có một sự huỷ cực zero trong $H(s)$. Hiện tượng này có mối quan hệ chặt chẽ với vấn đề đặc tính của hệ thống (xem thêm phần 5.4).

Xét lại ví dụ 5.2, nếu ta định nghĩa dòng $i(t)$ là đầu ra hệ thống, ta có thể nhận xét, từ đầu vào $e(t)$ đến đầu ra này chỉ có một cực. Điều này ngược với thực tế là kích thước của trạng thái bằng 3. Điều này có thể giải thích là trong mô hình vật lý giản đơn của chúng ta, dòng $i(t)$ không có ảnh hưởng tới vị trí và tốc độ của quả cầu kim loại (chấp nhận có thể bỏ qua sự thay đổi trong độ tự cảm do sự thay đổi vị trí của quả cầu).

Kết luận là hàm truyền có thể cấp không cùng lượng thông tin như mô hình không gian trạng thái cho cùng hệ thống. Vì mô hình không gian trạng thái kết quả không bộc lộ các cực zero huỷ nên mô tả một không gian trạng thái từ một hàm truyền cho trước, còn coi là thực hiện tối thiểu (minimal realization).

Hàm truyền hướng đến không gian trạng thái

Có một số phương pháp để thu được mô hình không gian trạng thái từ hàm truyền cho trước. Sau đây ta xem xét một trong số các phương pháp đó.

Xét một hàm truyền cho bởi:

$$H_T(s) = \frac{B_o(s)}{A_o(s)} + H_T(\infty) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + H_T(\infty) \quad (5.67)$$

Nhắc lại $D = H_T(\infty)$, như vậy hàm truyền: $H(s) = H_T(s) - H_T(\infty)$ là một hàm truyền hợp lệ.

Tiếp theo, xét biến $v_l(t) \in \mathbb{R}$, biến đổi Laplace của nó, $V_l(s)$ thỏa mãn:

$$V_l(s) = \frac{s^{l-1}}{A_o(s)} U(s) \quad l \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.68)$$

(5.68) bao hàm:

$$v_l(t) = \frac{dv_{l-1}(t)}{dt} \quad l \in \{2, \dots, n\} \quad (5.69)$$

$$Y(s) = \sum_{l=1}^n b_{l-1} V_l(s) \quad (5.70)$$

$$U(s) = \frac{A_o(s)}{A_o(s)} U(s) = \underbrace{\frac{s^n}{A_o(s)} U(s)}_{sV_0(s)} + \sum_{l=1}^n a_l \underbrace{\frac{s^{l-1}}{A_o(s)} U(s)}_{V_l(s)} \quad (5.71)$$

Chọn biến trạng thái: $x_l(t) = v_l(t)$

Các phương trình trên có:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}] \quad D = H_T(\infty)$$

Ví dụ 5.5: Hàm truyền của một hệ thống được cho bởi:

$$H(s) = \frac{4s-10}{(s+2)^2(s-1)} = \frac{4s-10}{s^3+3s^2-4} \quad (5.73)$$

Thực hiện tối thiểu cho hệ thống này là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-10 \quad 4 \quad 0] \quad D = 0 \quad (5.74)$$

Kết luận: Một hàm truyền hệ thống là bất biến đối với các phép biến đổi

đồng dạng trạng thái.

5.3. KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI CÁC HỆ THỐNG LẤY MẪU VÀ THỜI GIAN RỜI RẠC (DISCRETE-TIME AND SAMPLED DATA SYSTEM)

Mô tả không gian trạng thái cho các hệ thống lấy mẫu và thời gian rời rạc dựa chính trên kết quả thu được từ trường hợp thời gian liên tục. Mô hình thời gian rời rạc có thể do bởi 2 nguồn khác nhau:

- Từ một hệ thống thời gian rời rạc thuần, thường không tuyến tính, các biến của nó chỉ có thể xác định được tại những thời điểm tức thời t_k . Những hệ thống như vậy có thể tìm thấy trong các hệ thống kinh tế, lý thuyết quá trình thống kê ngẫu nhiên (stochastic).
- Từ việc rời rạc hoá một hệ thống thời gian liên tục. Trong trường hợp này ta chỉ quan tâm đến giá trị các biến hệ thống tại các thời điểm tức thời xác định. Các mô hình này rất hữu ích khi các hệ thống số (digital system) như các vi điều khiển (microcontroller), máy tính (computer), PLCs và những hệ thống khác, tương tác với các hệ thống thời gian thực liên tục (continuous-time real systems) như các cơ cấu cơ khí, van, thùng chứa, các mạch tương tự hoặc các quá trình công nghiệp toàn bộ (qua các bộ chuyển đổi tương tự-số và số-tương tự).

Phân tích của chúng ta cho cả hai trường hợp trên sẽ được chú trọng vào loại mô hình bất biến thời gian và tuyến tính.

5.3.1. Tuyến tính hoá các hệ thống thời gian rời rạc

Thời gian rời rạc tương ứng với (5.3) (5.4) được cho bởi các phương trình không tuyến tính:

$$x[t+1] = F_d(x[t], u[t]) \quad (5.75)$$

$$y[t] = G_d(x[t], u[t]) \quad (5.76)$$

Tuyến tính hoá các mô hình cho hệ thống thời gian rời rạc theo dọc các đường cũng như cho thời gian liên tục. Trước hết xét điểm cân bằng cho bởi $\{x_Q, u_Q, y_Q\}$:

$$x_Q = F_d(x_Q, u_Q) \quad (5.77)$$

$$y_Q = G_d(x_Q, u_Q) \quad (5.78)$$

Chú ý: điểm cân bằng được xác định bởi một tập hợp các giá trị cố định

của trạng thái và các giá trị **cố định** của đầu vào, thoả mãn (5.75) (5.76). Như vậy ta có đầu ra hệ thống không đổi. Khi ấy mô hình rời rạc có thể tuyến tính hoá quanh điểm cân bằng này.

Định nghĩa:

$$\Delta x[t] = x[t] - x_Q \quad \Delta u[t] = u[t] - u_Q \quad \Delta y[t] = y[t] - y_Q \quad (5.79)$$

Ta có mô hình không gian trạng thái

$$\Delta x[t+1] = A_d \Delta x[t] + B_d \Delta u[t] \quad (5.80)$$

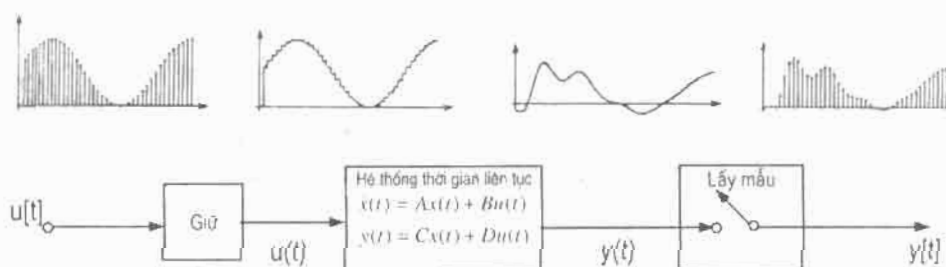
$$\Delta y[t] = C_d \Delta x[t] + D_d \Delta u[t] \quad (5.81)$$

Trong đó:

$$A_d = \left. \frac{\partial F_d}{\partial x} \right|_{x=x_Q, u=u_Q} \quad B_d = \left. \frac{\partial F_d}{\partial u} \right|_{x=x_Q, u=u_Q} \quad C_d = \left. \frac{\partial G_d}{\partial x} \right|_{x=x_Q, u=u_Q} \quad D_d = \left. \frac{\partial G_d}{\partial u} \right|_{x=x_Q, u=u_Q} \quad (5.82)$$

5.3.2. Các hệ thống lấy mẫu dữ liệu (Sampled Data System)

Như đã nói, có thể có được mô hình thời gian rời rạc bằng lấy mẫu đầu vào và đầu ra trong các hệ thống thời gian liên tục (continuous-time systems). Khi sử dụng một thiết bị số (digital device) để tác động lên một hệ thống thời gian liên tục, các tín hiệu điều khiển chỉ cần được xác định tại thời điểm tức thì ấy, chứ không phải ở tất cả các thời gian. Tuy nhiên, để tác động lên hệ thống thời gian liên tục, ta phải có một tín hiệu thời gian liên tục. Việc này thường được thực hiện bởi *mạch giữ bậc 0* (zero order hold), thành phần sinh ra một tín hiệu bậc thang (staircase signal). Ngoài ra khi đo số một biến hệ thống, việc này sẽ được thực hiện tại một số thời điểm tức thời nào đó. Điều này có nghĩa ta phải *lấy mẫu* (sample) các tín hiệu đầu ra.



Hình 5.4: Sơ đồ thể hiện hệ thống lấy mẫu dữ liệu

Hình 5.4 minh hoạ khái niệm này. Giả thiết ta lấy mẫu tuần hoàn, với chu kỳ Δ , ta chỉ quan tâm đến các tín hiệu trong thời gian $k\Delta$. Trong phần

tiếp theo, ta bỏ Δ khỏi argumen, sử dụng $u(k\Delta) = u[t]$ cho đầu vào, $y(k\Delta) = y[t]$ cho đầu ra và $x(k\Delta) = x[t]$ cho trạng thái hệ thống.

Nếu xét mô hình trạng thái tuyến tính và bất biến trong thời gian liên tục, được xác định bởi công thức (5.42) và (5.43) với trạng thái ban đầu $x(k_0\Delta) = x_0$, ta có thể sử dụng phương trình (5.44) để tính giá trị tiếp theo của trạng thái:

$$x(k_0\Delta + \Delta) = e^{A(k_0\Delta + \Delta - k_0\Delta)} x(k_0\Delta) + \int_{k_0\Delta}^{k_0\Delta + \Delta} e^{A(k_0\Delta + \Delta - \tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (5.83)$$

Tiếp theo nếu sử dụng mạch giữ mức 0, tức: $u(\tau) = u(k_0\Delta)$ cho $k_0\Delta \leq \tau \leq k_0\Delta + \Delta$ ta có:

$$x(k_0\Delta + \Delta) = e^{A\Delta} x(k_0\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\eta} d\eta Bu(k_0\Delta) \quad (5.84)$$

Nếu biết trạng thái và đầu vào tại thời gian $k_0\Delta$, đầu ra sẽ được xác định bởi phương trình (5.43):

$$y(k_0\Delta) = Cx(k_0\Delta) + Du(k_0\Delta) \quad (8.85)$$

Có thể kết luận: đối với một mô hình thời gian liên tục cho trước với các ma trận không gian trạng thái $\{A, B, C, D\}$ và được lấy mẫu cứ mỗi Δ giây, thì hệ thống lấy mẫu dữ liệu tương đương sẽ được mô tả bằng mô hình không gian trạng thái thời gian gián đoạn:

$$x(k\Delta + \Delta) = A_d x(k\Delta) + B_d u(k\Delta) \quad (5.86)$$

$$y(k\Delta) = C_d x(k\Delta) + D_d u(k\Delta) \quad (5.87)$$

Trong đó:

$$A_d = e^{A\Delta}; \quad B_d = \int_0^\Delta e^{A\eta} d\eta B; \quad C_d = C; \quad D_d = D \quad (5.88)$$

Có một số phương pháp khác nhau để xác định A_d định nghĩa trong (5.88), nhưng cách đơn giản nhất để tính ma trận này là sử dụng biến đổi Laplace, ta có:

$$A_d = e^{A\Delta} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}_{t=\Delta} \quad (5.89)$$

Ví dụ 5.6: Xét hệ thống cơ cho ở hình 5.1, mô hình không gian trạng thái được mô tả bởi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t) \quad (5.90)$$

Trong đó $f(t)$ là ngoại lực và ta có thể chọn hoặc vị trí khối lượng, $x_1(t)$ hoặc tốc độ khối lượng, $x_2(t)$ là đầu ra hệ thống.

Để minh họa số, ta đặt $m=1\text{kg}$, $D=1,2\text{Ns/m}$ và $K=0,32\text{ N/m}$.

Ma trận A_d thu được từ (5.89) khi áp dụng biến đổi ngược Laplace:

$$A_d = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0,32 & s+1,2 \end{bmatrix}^{-1} \right\} \Big|_{t=\Delta} = \begin{bmatrix} 2e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta} & 2,5(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) \\ 0,8(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) & -e^{-0,4\Delta} + 2e^{-0,8\Delta} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

B_d tghu được từ (5.88):

$$B_d = \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 2e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta} & 2,5(e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta}) \\ 0,8(e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta}) & -e^{-0,4\eta} + 2e^{-0,8\eta} \end{bmatrix} d\eta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

$$\Rightarrow B_d = \begin{bmatrix} -6,25e^{-0,4\Delta} + 3,125e^{-0,8\Delta} + 3,125 \\ 2,5(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) \end{bmatrix}$$

Chú ý: cả A_d và B_d là hàm của Δ . Như vậy, chu kỳ lấy mẫu Δ thể hiện ảnh hưởng trong hoạt động động lực của hệ thống lấy mẫu, như nhận xét ở những phần tiếp theo.

5.3.3. Mô hình không gian trạng thái tuyến tính

Mô hình không gian trạng thái bất biến thời gian tuyến tính được cho bởi:

$$x[t+1] = A_d x[t] + B_d u[t] \quad (5.93)$$

$$y[t] = C_d x[t] + D_d u[t] \quad (5.94)$$

Đó có thể là một mô hình thời gian rời rạc được tuyến tính hoá như (5.80) và (5.81) hoặc một hệ thống lấy mẫu dữ liệu như (5.86), (5.86), trong đó Δ được bỏ ra khỏi argumen thời gian.

Giải phương trình (5.93) và (5.94), có $x[t_0] = x_0$, cho :

$$x[t] = A_d^{(t-t_0)} x_0 + \sum_{i=0}^{(t-t_0)-1} A_d^{(t-t_0)-i-1} B_d u[i+t_0] \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.95)$$

Trong đó $A_d^{t-t_0}$ là ma trận quá độ (transition matrix). Phương trình (5.95) thoả mãn (5.93). Với kết quả trên, khi giải (5.94) ta có:

$$y[t] = C_d A_d^{(t-t_o)} x_o + C_d \sum_{i=0}^{(t-t_o)-1} A_d^{(t-t_o)-i-1} B_d u[i+t_o] + D_d u[t] \quad (5.96)$$

Động học hệ thống

Trạng thái của hệ thống có hai thành phần: không cưỡng bức $x_n[t]$ và cưỡng bức $x_f[t]$, trong đó :

$$x_n[t] = A_d^{(t-t_o)} x_o \quad (5.97)$$

$$x_f(t) = \sum_{i=0}^{(t-t_o)-1} A_d^{(t-t_o)-i-1} B_d u[i+t_o] \quad (5.98)$$

Để thấu hiểu mô hình không gian trạng thái và cách giải chúng, ta xét trường hợp khi $t_o=0$ và $u(t)=0 \forall t \geq 0$, tức trạng thái chỉ có thành phần không cưỡng bức, khi ấy:

$$x[t] = A_d^t x_o \quad (5.99)$$

Tiếp theo, giả thiết là $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, có n giá trị riêng λ_i riêng biệt với n vectơ riêng v_i độc lập tuyến tính. Khi ấy luôn tồn tại một tập hợp n hằng số α_i , như vậy:

$$x_o = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (5.100)$$

Một kết quả quen thuộc từ đại số tuyến tính cho ta biết rằng các giá trị riêng của A_d^k là η_i^k khi $k \in \mathbb{Z}$ với các vectơ riêng tương ứng v_i . Ứng dụng kết quả này cho:

$$x[t] = A_d^t x_o = A_d^t \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{A_d^t v_i}_{\eta_i^t v_i} \quad (5.101)$$

$$x[t] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i^t v_i \quad (5.102)$$

Phương trình này thể hiện thành phần không cưỡng bức của trạng thái, là một tổ hợp của các dao động tự nhiên (natural modes) $\{\eta_i^t\}$ và mỗi một dao động được kết hợp với một giá trị riêng A_d , loại được biết như là các tần số tự nhiên (natural frequencies) của mô hình. Như vậy, ma trận A_d quyết định:

- Cấu trúc của đáp ứng không bị cưỡng bức

- Tính ổn định của hệ thống
- Tốc độ phản ứng.

Cấu trúc của đáp ứng không cưỡng bức (unforced response)

Khi không có đầu vào, trạng thái khai triển là một tổ hợp các dao động tự nhiên, loại phụ thuộc vào lớp định nghĩa các hàm: lũy thừa của các giá trị riêng của mô hình là số thực hoặc số phức. Các dao động này là các hàm rời rạc liên quan đến sóng SIN bất biến, hàm SIN số mũ thực, các sóng thuần SIN, các sóng sin điều biến số mũ và một số hàm đặc biệt khác nảy sinh từ sự lặp lại của các giá trị riêng.

Ví dụ 5.7: Để minh họa, xem xét diễn giải vật lý của cấu trúc đáp ứng không cưỡng bức, ta xét hệ thống lấy mẫu trong ví dụ 5.6. Nếu $\Delta=1$, các ma trận không gian trạng thái là:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,8913 & 0,5525 \\ -0,1768 & 0,2283 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0,3397 \\ 0,5525 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Vì thế các giá trị riêng của hệ thống là nghiệm của phương trình:

$$\det(\eta I - A_d) = \det \left(\begin{bmatrix} \eta - 0,8913 & -0,5525 \\ 0,1768 & \eta - 0,2283 \end{bmatrix} \right) = (\eta - 0,6703)(\eta - 0,4493) = 0 \quad (5.104)$$

Có nghĩa $\eta_1 = 0,6703$, $\eta_2 = 0,4493$, và đáp ứng không cưỡng bức là:

$$x_u[t] = C_1 (0,6702)^t + C_2 (0,4493)^t \quad (5.105)$$

Trong đó C_1 và C_2 chỉ phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu. Có thể nhận xét, khi t tiến đến vô cực, $x_u[t]$ phân rã về 0, do $|\eta_{1,2}| < 1$. Như vậy các giá trị riêng này là số thực dương, không có dao động trong các phương thức tự nhiên.

Cấu trúc của đáp ứng cưỡng bức (forced response):

Xét phương trình (5.95). Khi trạng thái ban đầu là 0, trạng thái sẽ thể hiện chỉ mỗi thành phần cưỡng bức. Tuy nhiên, thành phần cưỡng bức của trạng thái sẽ vẫn gồm cả dao động tự nhiên và một số *dao động cưỡng bức* (forced modes) bổ sung hoặc *dao động đặc thù* (particular modes) tùy vào bản chất đầu vào $u(t)$ của hệ thống. Thường, các dao động cưỡng bức trong đầu vào sẽ cũng xuất hiện trong trạng thái. Tuy nhiên sẽ phát sinh một số trường hợp đặc biệt khi một số dao động cưỡng bức trong $u(t)$ trùng với một số dao động tự nhiên của hệ thống.

Tính ổn định hệ thống

Có thể phân tích tính ổn định trong các hệ thống bất biến thời gian tuyến tính khi sử dụng ma trận trạng thái A_d . Như đã nói, tất cả các biến hệ thống có thể biểu diễn như là các hàm tuyến tính của trạng thái và đầu vào hệ thống. Khi đầu vào hệ thống $u(t)$ là vectơ của các hàm giới hạn thời gian, khi đó biên của các biến hệ thống phụ thuộc vào trạng thái bị giới hạn. Ta có kết quả sau:

Định lý 2: Xét một hệ thống được mô tả bởi phương trình (5.93) và (5.94), trong đó B_d , C_d , và D_d có các phần tử bị giới hạn. Khi ấy trạng thái hệ thống bị giới hạn cho tất cả các đầu vào giới hạn nếu và chỉ nếu các giá trị riêng của A_d nằm bên trong đĩa đơn vị, tức $|\eta_i| < 1, \forall i$.

Tốc độ đáp ứng và cộng hưởng

Dao động tự nhiên của các hệ thống thời gian rời rạc là lũy thừa của các giá trị riêng. Do các giá trị riêng này luôn được mô tả dưới dạng đại lượng phức, ta có thể viết dao động tự nhiên như:

$$(\eta_i)' = (|\eta_i| e^{j\theta_i})' = |\eta_i|' e^{j\theta_i} \text{ trong đó } \theta_i = \angle \eta_i \quad (5.106)$$

Như vậy ta có:

- $0 < |\eta_i| < \infty$ quyết định tốc độ dao động phân rã về 0 cho các hệ thống ổn định ($|\eta_i| < 1$), hoặc phát triển tới vô cực cho các hệ thống không ổn định ($|\eta_i| > 1$).
- $-\pi < \theta_i \leq \pi$ quyết định tần số dao động tự nhiên, đo theo radian.

Mặc dù các dao động tự nhiên của các hệ thống ổn định phân rã về 0, bản chất của chúng quyết định tính đáp ứng quá độ của hệ thống.

Để minh họa các vấn đề trên, người ta thường sử dụng các đáp ứng bậc, với các điều kiện ban đầu bằng 0.

Ví dụ 5.8: Xét một hệ thống thời gian rời rạc được miêu tả bởi mô hình không gian trạng thái:

$$x[t+1] = \begin{bmatrix} 1.2796 & -0.81873 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x[t] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[t] \quad (5.107)$$

$$y[t] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5391 \end{bmatrix} x[t] \quad (5.108)$$

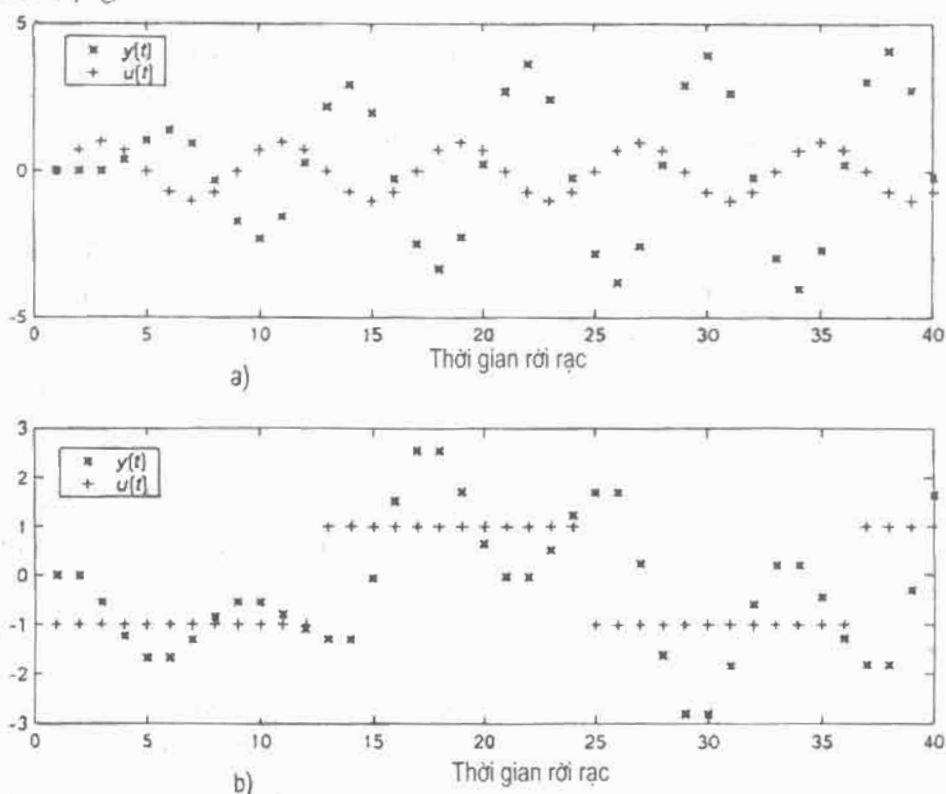
Giá trị riêng của hệ thống thu được từ A_d :

$$\eta_{1,2} = 0,6398 \pm j0,6398 = 0,9048e^{j\pi/4} \quad (5.109)$$

Và các dao động tự nhiên kết hợp, hiện diện trong đáp ứng quá độ là:

$$\eta_{1,2} = 0,9248' e^{j\frac{\pi}{4}t} = 0,9048' \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \pm j \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right] \quad (5.110)$$

Các dao động tự nhiên bị cản nhẹ vì $|\eta_{1,2}|$ gần bằng 1 và chúng thể hiện là dao động với tần số $\pi/4$.



Hình 5.5: Tác động cộng hưởng trong đầu ra hệ thống

Các đồ thị ở hình 5.5 thể hiện một đầu ra cộng hưởng mạnh, Hình 5.5 a, tương ứng với một đầu vào $u[t] = \sin\left[\frac{\pi}{4}t\right]$, tức tần số đầu vào trùng với tần số của các dao động tự nhiên. Ở hình 5.5b đầu vào là một sóng vuông, tín hiệu tần số $\pi/12$. Trong trường hợp này, hàm điều hoà thứ ba của đầu vào có tần số bằng tần số của dao động tự nhiên.

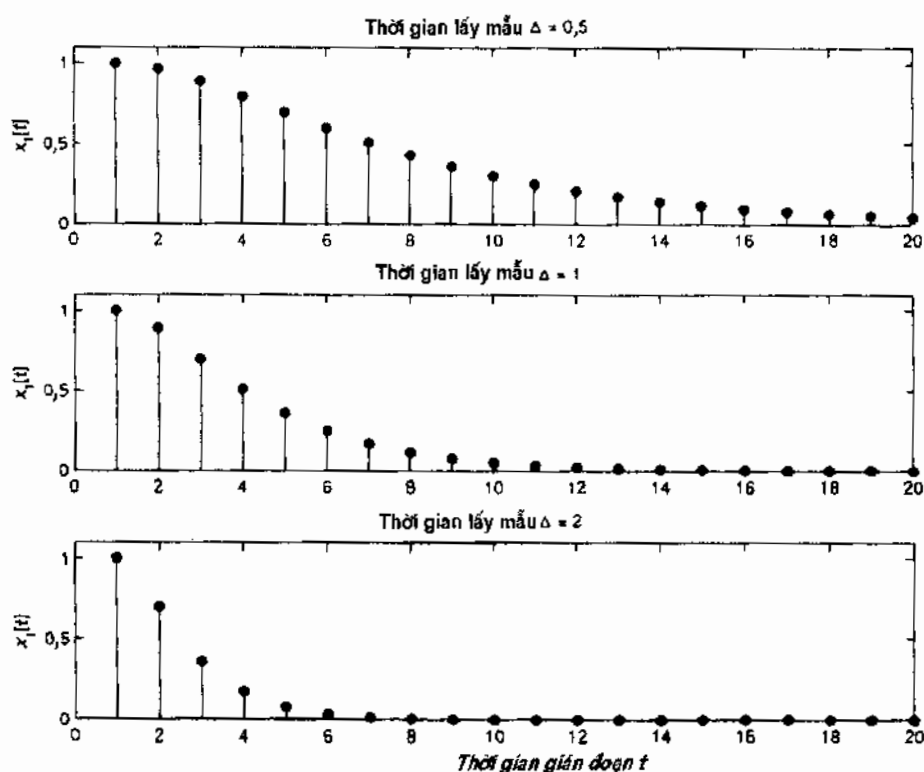
Tác động của các khoảng thời gian lấy mẫu

Ta nhận thấy, trong phương trình (5.87) A_d và B_d phụ thuộc vào sự chọn khoảng thời gian lấy mẫu Δ . Sự lựa chọn này cũng quyết định vị trí của các giá trị riêng của hệ thống. Xem lại phương trình (5.88), giả thiết A đã được chéo hoá. Ta có;

$$A_d = e^{diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\Delta} = diag\{e^{\lambda_1\Delta}, \dots, e^{\lambda_n\Delta}\} \quad (5.111)$$

Trong đó $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ là giá trị riêng của các hệ thống thời gian liên tục cơ sở. Khi đó các giá trị riêng này được sắp đặt thành các giá trị riêng của hệ thống lấy mẫu bởi phương trình:

$$\eta_i = e^{\lambda_i\Delta} \quad (5.112)$$



Hình 5.6: Tác động lấy mẫu trong các dao động tự nhiên

Trong hình 5.6 ta có thể nhận xét các đáp ứng của hệ thống lấy mẫu theo ví dụ 5.6 trong hình 5.6, chọn $x_1[t]$ là đầu ra hệ thống, khi điều kiện ban đầu là $x_0 = [1 \ 0]^T$ đối với các giá trị khác nhau của Δ . Ta nhận thấy, trực ngang

tương ứng với t , như vậy các khoảng khắc thời gian thực (real instants times) là $t\Delta$.

Một vấn đề quan trọng liên quan đến lấy mẫu các tín hiệu thời gian liên tục là chu kỳ lấy mẫu phải được chọn đủ nhỏ để nắm bắt được bản chất cốt yếu của tín hiệu được lấy mẫu. Ví dụ về một chọn lựa Δ tối, giả thiết tín hiệu $f(t) = A \sin(\omega_0 t)$ được lấy mẫu trong từng Δ giây, với $\Delta = 2\pi/\omega_0, l \in \mathbb{Z}$. Khi ấy tín hiệu thời gian rời rạc kết quả là $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

5.3.4. Sự biến đổi đồng dạng trạng thái

Ý tưởng chuyển đổi trạng thái thông qua biến đổi đồng dạng gần tương tự như áp dụng đối với hệ thống thời gian liên tục. Sự biến đổi này không gây nên sự thay đổi tính chất của hệ thống.

Không gian trạng thái và các hàm truyền

Mối quan hệ giữa không gian trạng thái và các mô hình hàm truyền cho các hệ thống thời gian rời rạc về cơ bản giống trường hợp thời gian liên tục. (xem mục 5.2). Có thể nói, mô tả không gian trạng thái của các hệ thống bất biến thời gian tuyến tính và hàm truyền là các cách mô tả hệ thống, mặc dù trong một số trường hợp, không gian trạng thái cung cấp thông tin trong hệ thống nhiều hơn.

Đối với một hàm bất biến thời gian tuyến tính với đầu vào $u(t) \in \mathbb{R}^m$ và đầu ra $y(t) \in \mathbb{R}^p$, hàm truyền $H(z) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ được xác định bởi phương trình:

$$Y(z) = H(z)U(z) \text{ trong đó } [H(z)]_{ij} = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)} \quad (5.113)$$

tức thành phần (i, j) trong ma trận $H(z)$ là biến đổi Zeta của đáp ứng đầu ra thứ i (i^{th}) khi một Đơn vị Kronecker đơn vị (unit Kronecker's delta) đặt ở đầu vào thứ j (j^{th}), với các điều kiện ban đầu bằng 0 và với các đầu vào còn lại bằng 0 cho tất cả $t \geq 0$.

Mặt khác nếu áp dụng biến đổi Zeta vào mô hình không gian trạng thái thời gian rời rạc (5.93) và (5.94) với các điều kiện ban đầu bằng 0, ta có:

$$X(z) = (zI - A_d)^{-1} B_d U(z) \quad (5.114)$$

$$Y(z) = C_d X(z) + D_d U(z) \quad (5.115)$$

$$\text{Dẫn đến: } C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d = H[z] \quad (5.116)$$

Trong phân tích sau, ta trọng tâm vào các hệ thống vô hướng, tức $m=p=1$, B_d, C_d^T là các vectơ cột và $D_d=H(\infty)$. Có thể thấy, $H(z)$ là thương của các đa thức theo z , tức:

$$H(z) = \frac{C_d \text{Adj}(zI - A_d) B_d + D_d \det(zI - A_d)}{\det(zI - A_d)} \quad (5.117)$$

ở đây $\text{Adj}(o)$ biểu hiện ma trận liên hợp của (o) .

Như vậy, tương tự trường hợp thời gian liên tục, các cực hàm truyền là các giá trị riêng của ma trận A_d . Tuy nhiên, điều đó nhìn chung không đúng trong trường hợp tập hợp các điểm cực của hàm truyền trùng với tập hợp các giá trị riêng của ma trận. Cần biết rằng các mô hình hàm truyền có thể dấu sự huỷ giữa các cực và các zero, với các hệ quả được mô tả trong phần “Tính điều khiển được, tính đạt được và tính ổn định được” và “Tính quan sát được, và tái lập được”.

Một kết luận quan trọng cho hệ thống thời gian rời rạc là như cho các hệ thống thời gian liên tục. *Hàm truyền có thể cung cấp không cùng lượng thông tin như mô hình không gian trạng thái* cho cùng hệ thống.

Để thu được mô hình không gian trạng thái ta có thể sử dụng phương pháp đã được đề nghị ở trong phần 5.2 “không gian trạng thái và các hàm truyền” áp dụng biến đổi Zeta thay vì biến đổi Laplace và sử dụng sự kiện là:

$$F(z) = Z\{f[t]\} \Leftrightarrow zF[z] = Z\{f[t+1]\} \quad (5.118)$$

Ví dụ 5.9: Hàm truyền của một hệ thống được cho bởi

$$H[z] = \frac{2z^2 - z + 1}{(z - 0.8)(z - 0.6)} = \frac{1.8z + 0.04}{z^2 - 1.4z + 0.48} + 2 \quad (5.119)$$

Thực hiện tối thiểu cho hệ thống này là:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.48 & -1.4 \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_d = [0.04 \quad 1.8]; \quad D_d = 2 \quad (5.120)$$

Trong mô hình thời gian rời rạc cũng sẽ xảy ra: *hàm truyền hệ thống là bất biến đối với các biến đổi đồng dạng trạng thái*.

5.4. MÔ HÌNH KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI CHO CÁC HỆ THỐNG CÓ NỐI KẾT.

Để xây dựng các mô hình không gian trạng thái cho những hệ thống phức, đôi khi cần mô tả chúng như các kết nối của các hệ thống đơn giản

hơn. Kết nối này thường là một tổ hợp của 3 cấu trúc kết nối cơ sở: liên tục, song song và phản hồi. Sau đây ta xét mô hình không gian trạng thái cho các hệ thống kết hợp này.

Trong các phân tích sau, ta sử dụng hai hệ thống, được định nghĩa bởi

$$\text{Hệ thống 1: } \frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \quad (5.121)$$

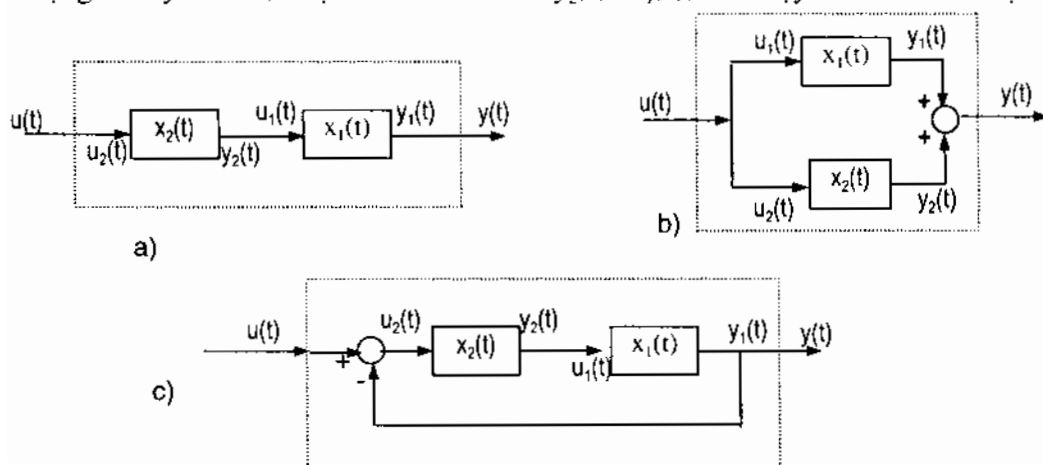
$$y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t) \quad (5.122)$$

$$\text{Hệ thống 2: } \frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \quad (5.123)$$

$$y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \quad (5.124)$$

Kết nối liên tiếp

Kết nối hệ thống được thể hiện như ở hình 5.7a được biết đến như là hệ thống nối liên tiếp hoặc nối ghép tầng. Để xây dựng mô hình không gian trạng thái yêu cầu, nhận xét đầu tiên là $y_2(t) = u_1(t)$, như vậy đầu vào của hệ



Hình 5.7 Mô hình không gian trạng thái cho các hệ thống kết nối
a) liên tục b) song song c) có phản hồi.

thống ghép lại là $u(t) = u_2(t)$ và đầu ra của hệ thống ghép là $y(t) = y_1(t)$, như vậy ta thu được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.125)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 D_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.126)$$

Kết nối song song

Kết nối hệ thống được thể hiện như ở hình 5.7b gọi là một hệ thống song song. Để xây dựng mô hình không gian trạng thái yêu cầu, nhận xét đầu vào của hệ thống là $u(t)=u_1(t)=u_2(t)$ và đầu ra của hệ thống toàn bộ $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$, ta có:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.127)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u(t) \quad (5.128)$$

Kết nối có phản hồi

Kết nối hệ thống được thể hiện như ở hình 5.7c được gọi là hệ thống có phản hồi (với phản hồi âm), tương ứng với cấu trúc cơ sở của một vòng điều khiển, trong đó S_1 là thiết bị và S_2 là bộ điều khiển. Để xây dựng mô hình không gian trạng thái ghép nối, ta nhận xét đầu vào của hệ thống toàn bộ thỏa mãn $u(t)=u_2(t)+y_1(t)$ và đầu ra của hệ thống toàn bộ $y(t)=y_1(t)$. Tiếp theo giả thiết rằng hệ thống S_1 (thiết bị) là phù hợp tuyệt đối, tức $D_1=0$, khi đó ta thu được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 C_1 & B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.129)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

Những kết quả tương tự được áp dụng với những sửa đổi thích đáng về chi tiết cho các hệ thống kết nối thời gian rời rạc. Chi tiết hơn có thể tìm đọc ở [9].

5.5. TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG

5.5.1. Tính điều khiển được (controllability), tính đạt được (reachability) và tính ổn định được (stabilizability)

Một câu hỏi rất quan trọng cần quan tâm về các hệ thống điều khiển sử dụng mô hình trạng thái là liệu có thể thay đổi trạng thái thông qua đầu vào, điều khiển tới những vị trí nào đó trong không gian trạng thái. Biết rằng các trạng thái của một hệ thống thường là các nội biến như nhiệt độ, áp lực, mực

chất lỏng, v...v. Đôi khi đó là những giá trị tối hạn mà ta muốn giữ trong khoảng các giá trị định trước.

Tính điều khiển được (controllability)

Tính điều khiển được liên quan đến việc, liệu một trạng thái ban đầu x_0 cho trước có thể được dẫn về gốc (origin) trong một thời gian nhất định khi sử dụng đầu vào $u(t)$.

Ví dụ 5.10: Nếu ta phân tích mô hình, định nghĩa ở (5.131), ở đó đầu vào không có ảnh hưởng lên trạng thái $x_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.131)$$

Cho trạng thái ban đầu $[x_1(0), x_2(0)]^T$, đầu vào $u(t)$ có thể được chọn để dẫn $x_1(t)$ về 0 trong khi $x_2(t)$ vẫn giữ không thay đổi.

Chính thức, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1: Một trạng thái x_0 nói là có thể điều khiển được, nếu tồn tại một khoảng thời gian có hạn $[0, T]$ và một đầu vào $u(t), t \in [0, T]$, như vậy $x(T) = 0$. Nếu tất cả các trạng thái là có thể điều khiển, thì hệ thống này được nói là có thể điều khiển hoàn toàn.

Tính đạt được (Reachability)

Khái niệm liên quan đến tính đạt được, đôi khi được sử dụng trong các hệ thống thời gian gián đoạn, được phát biểu như sau:

Định nghĩa 2: Một trạng thái $\bar{x} \neq 0$ được gọi là “đạt được” (reachable), xuất phát từ gốc, nếu cho $x(0)=0$, tồn tại một khoảng thời gian hữu hạn $[0, T]$ và một đầu vào $\{u(t), t \in [0, T]\}$, như vậy thì $x(T) = \bar{x}$. Nếu tất cả các trạng thái là “đạt được”, hệ thống được xem là “đạt được” toàn toàn.

Đối với các hệ thống tuyến tính, bất biến và liên tục với thời gian, không có sự khác nhau giữa tính điều khiển được hoàn toàn và tính đạt được hoàn toàn. Tuy nhiên trong trường hợp thời gian rời rạc cũng có một chút sự khác nhau tế nhị. Sau đây là ví dụ minh họa.

Ví dụ 5.11: Xét hệ thống có đầu ra:

$$x[t+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix}}_{A_t} x(t) \Rightarrow x[t] = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix}^T x[0] \quad (5.132)$$

Có thể nhận thấy hệ thống này có tính điều khiển được hoàn toàn vì $x[l]=0, \forall l \geq 2$ và với $\forall x[0] \in \mathbb{R}^2$. Điều này hàm ý rằng mọi trạng thái ban đầu là có thể kiểm soát được. Tuy nhiên không thể đạt được trạng thái không về 0 (nonzero state).

Trong hệ thống thời gian rời rạc, không có sự khác biệt lớn giữa tính điều khiển được và tính đạt được nên người ta thường dùng từ *tính điều khiển được* cho cả hai nghĩa. Còn trong một hệ thống bất biến thời gian tuyến tính, tính điều khiển được và đạt được thường được sử dụng lẫn.

Phân ly chuẩn và tính ổn định được (canonical decomposition and stabilizability)

Nếu ta có một hệ thống không có tính điều khiển được toàn bộ, hệ thống này có thể phân thành một hệ thống con có tính điều khiển được toàn bộ và một hệ thống con không điều khiển được, theo cách sau:

Bổ đề 1: Xét một hệ thống có bậc $\{\Gamma_c[A, B]\} = k < n$, khi ấy tồn tại một biến đổi tương tự T , như vậy $\bar{x} = T^{-1}x$,

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad \bar{B} = T^{-1}B \quad (5.133)$$

và $\bar{A}, \bar{B}$ có dạng

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{nc} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Trong đó $\bar{A}_c$ có kích thước k và $(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$ là có khả năng điều khiển toàn bộ.

Kết quả trên cho biết, kết quả nào có thể và kết quả nào không có thể lái được về 0. Để đánh giá điều này, ta có thể biểu diễn trạng thái và các phương trình đầu ra ở dạng:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.135)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{nc} \end{bmatrix} + Du \quad (5.136)$$

Phần không gian có thể điều khiển được (controllable substate) của một mô hình hệ thống bao gồm tất cả các trạng thái được sinh ra qua từng kết hợp tuyến tính khả dĩ của các trạng thái trong $\bar{x}_c$. **Độ ổn định (stability)** của

phần không gian này được quyết định bởi vị trí của các giá trị riêng của $\bar{A}_c$.

Mặt khác, *phần không gian không thể điều khiển được* (uncontrollable substate) gồm tất cả các trạng thái được sinh ra qua từng kết hợp tuyến tính khả dĩ của các trạng thái trong $\bar{x}_{nc}$. Độ ổn định của phần không gian này được quyết định bởi vị trí của các giá trị riêng $\bar{\lambda}_{nc}$.

Vì lý do này, đầu vào sẽ không có ảnh hưởng đến phần không gian không điều khiển được. Như vậy ta chỉ có thể hy vọng là phần này cũng ổn định, rồi trạng thái trong phần không gian này sẽ đến điểm gốc. Trong trường hợp này mô hình không gian trạng thái được nói là có khả năng ổn định (stabilizable).

Đặc điểm chủ yếu của mô tả (5.135) và (5.136) nảy sinh từ sự việc hàm truyền được cho bởi:

$$H(s) = C_c (sI - \bar{A}_c)^{-1} \bar{B}_c + D \quad (5.137)$$

Phương trình (5.137) phát biểu rằng các giá trị riêng của phần không gian không thể điều khiển không thuộc vào tập hợp các cực của hàm truyền. Điều này có nghĩa có sự huỷ tất cả các cực tương ứng với nghiệm của $(sI - \bar{\lambda}_{nc})$.

Dạng thức hợp chuẩn điều khiển được

Bổ đề 2: Xét một mô hình không gian trạng thái có khả năng đạt đến (reachable) toàn bộ cho một hệ thống SISO. Khi đó tồn tại một phép biến đổi tương tự chuyển đổi mô hình không gian trạng thái thành dạng thức hợp chuẩn điều khiển được (controllability canonical form) sau:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_n \end{bmatrix}; \quad B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

Ở đây $\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \det(\lambda I - A)$ là đa thức đặc tính của A.

Bổ đề 3: Xét một mô hình không gian trạng thái có khả năng điều khiển (controllable) toàn bộ cho một hệ thống SISO. Khi đó tồn tại một phép biến đổi tương tự, chuyển đổi mô hình không gian trạng thái thành dạng thức hợp chuẩn điều khiển được (controller canonical form) sau:

$$A'' = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

Trong đó $\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \det(\lambda I - A)$ là đa thức đặc tính của A

5.5.2. Tính quan sát được & tái lập được (Observability & Reconstructibility)

Nếu xét một mô hình không gian trạng thái của một hệ thống, khi có thể dự đoán theo sự quan sát đầu ra hệ thống qua một khoảng thời gian mà biết được một số thông tin về trạng thái thì ta nói hệ thống đó có khả năng quan sát được (hoặc tái lập được).

Tính quan sát được (observability)

Khả năng quan sát được liên quan đến những vấn đề có thể nói về trạng thái nếu ta đo đầu ra của thiết bị.

Ví dụ 5.11: Nếu nhìn vào hệ thống được định nghĩa bởi mô hình không gian trạng thái:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

Ta có thể nhận thấy đầu ra $y(t)$ được quyết định chỉ bởi $x_1(t)$, biến trạng thái khác $x_2(t)$ không có ảnh hưởng lên đầu ra. Hệ thống như vậy không có tính quan sát được hoàn toàn.

Định nghĩa 3: Trạng thái $x_0 \neq 0$ được nói là không thể quan sát được nếu $x(0) = x_0$ và $u(t) = 0$ đối với $t \geq 0$ thì $y(t) = 0$ đối với $t \geq 0$, tức ta không thể thấy bất kì ảnh hưởng nào của x_0 lên đầu ra hệ thống.

Hệ thống được gọi là có thể quan sát được hoàn toàn nếu ở đó không tồn tại trạng không về 0 (nonzero) ban đầu (trạng thái này là không quan sát được).

Tính tái lập được (reconstructibility)

Một khái niệm liên quan mật thiết với khả năng quan sát gọi là khả năng tái lập. Khả năng tái lập liên quan với những gì có thể nói về $x(T)$, khi có các giá trị quá khứ của đầu ra y đối với $0 \leq t \leq T$. Đối với các hệ thống tuyến tính bất biến thời gian liên tục, không cần thiết có sự phân biệt giữa

tính quan sát được và tái lập được. Tuy nhiên đối với hệ thống thời gian rời rạc thì có sự khác nhau giữa chúng. Sau đây là ví dụ minh họa.

Ví dụ 5.12: Xét

$$x[t+1]=0 \quad x[0]=x_0 \quad y[t]=0 \quad (5.141)$$

Hệ thống này rõ ràng là có tính tái lập được cho tất cả $T \geq 1$, vì chắc chắn rằng $x[T]=0$ với $T \geq 1$. Tuy nhiên nó không thể quan sát toàn bộ được do $y[t]=0, \forall k$ bất luận x_0 thế nào.

Sự khác nhau giữa 2 khái niệm trên không nhiều vì vậy người ta thường dùng khái niệm *tính quan sát được* cho cả hai khái niệm.

CHƯƠNG 6. PHÂN TÍCH HỆ THỐNG- MÁY CÔNG CỤ CNC

6.1. BIẾN DẠNG TĨNH VÀ BIẾN DẠNG ĐỘNG TRONG GIA CÔNG

6.1.1. Giới thiệu

Máy công cụ là máy để chế tạo các máy khác. Để có được dung sai theo yêu cầu, máy công cụ phải có độ chính xác cao hơn dung sai của chi tiết được gia công trên nó. Độ chính xác của máy công cụ, tác động vào độ chính xác định vị dụng cụ cắt tương quan với phôi gia công và biến dạng cấu trúc tương đối giữa chúng. Sau đây ta xem xét phân tích kỹ thuật và mô hình biến dạng tĩnh và biến dạng động dụng cụ cắt và phôi.

Kết cấu của máy công cụ

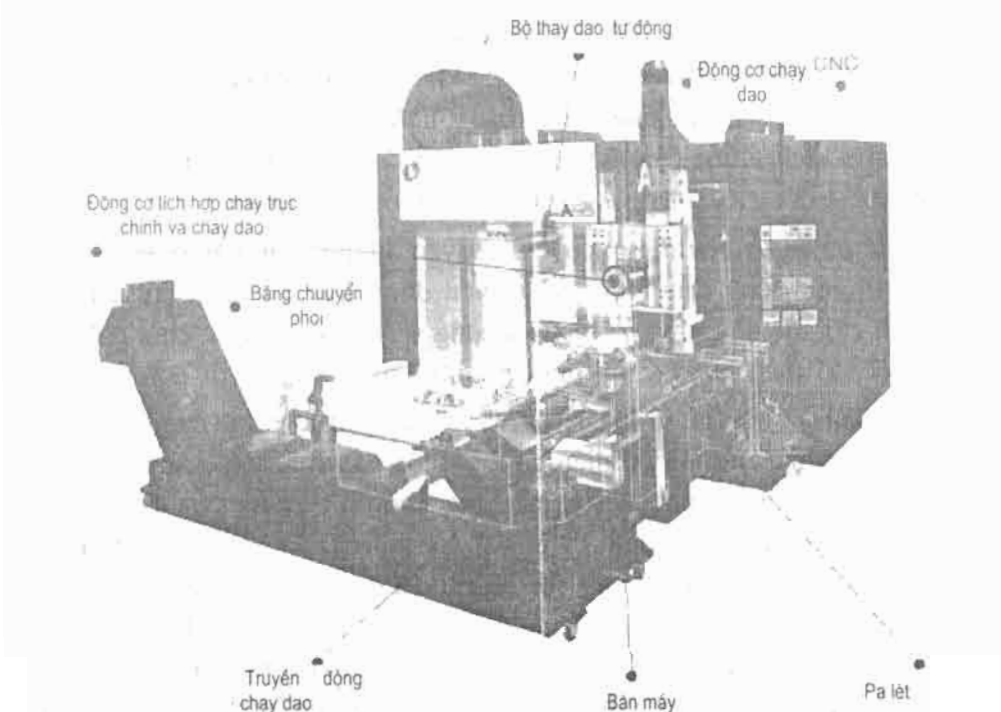
Một máy công cụ điều khiển số là một hệ thống bao gồm 3 nhóm chính: các kết cấu cơ, các thành phần truyền động và điều khiển, như thể hiện ở hình 6.1.

Kết cấu cơ khí: bao gồm các thân tĩnh và động. Các thân tĩnh gồm bệ (beds), cột (column), dầm máy (bridge), hộp giảm tốc, bộ đỡ các bộ phận dịch chuyển. Các bộ phận dịch chuyển gồm: bàn, thân trượt, trục chính, các bánh răng, vòng bi và các chi tiết di động khác... Thiết kế kết cấu các chi tiết máy công cụ yêu cầu tính cứng vững cao, ổn định nhiệt và giảm rung động. Nhìn chung, kích thước của máy công cụ được đánh giá cao trong việc hạn chế biến dạng động và tĩnh trong gia công đến mức tối thiểu.

Thành phần truyền động: cơ cấu chuyển động trong máy công cụ được phân ra: truyền động trục chính và truyền động trục ăn dao. Truyền động trục chính cấp tốc độ quay, mômen và công suất để quay trục chính. Những trục có tốc độ thấp hoặc trung bình có thể được kết nối với động cơ điện thông qua đai V, hộp giảm tốc 1 cấp và li hợp. Ở trục chính với tốc độ cao ($n > 15000$ vòng/phút) động cơ điện có thể được gắn trực tiếp vào trục chính để giảm quán tính và ma sát (tạo nên bởi khớp nối động cơ- trục chính). Trong một trung tâm gia công, thường trong thời gian ngắn trục chính phải có thể thay đổi từ tốc độ thấp lên tốc độ cao và ngược lại, do vậy cần có kết cấu phù hợp với đặc tính công tác này. Hệ truyền động chạy dao mang bàn máy hoặc bàn chạy dao. Thường đai ốc được lắp vào bàn máy, trục vít me thì kết nối trực tiếp với động cơ, hoặc thông qua hệ thống bánh răng tùy thuộc vào tốc độ ăn dao, quán tính và yêu cầu giảm mômen. Trong máy công cụ

truyền thống, đó là các hộp giảm tốc theo bậc để đạt được tốc độ tiến dao mong muốn. Trong máy công cụ CNC, mỗi trục vít me chạy dao kết nối với riêng một động cơ. Với máy công cụ có tốc độ rất cao, động cơ trực ăn dao có thể là các động cơ tuyến tính, chạy dao trực tiếp (không qua trục vít me-đai ốc) để tránh quán tính thừa và các thành phần tiếp xúc ma sát.

Điều khiển: Các thành phần điều khiển gồm: động cơ, các bộ khuếch đại, công tắc và các máy tính- các thành phần được sử dụng để tiếp năng lượng cho các chi tiết điện theo tuần tự điều khiển và thời gian. Trong máy công cụ truyền thống đó thường là các role, công tắc hành trình, các chiết áp điều khiển bàn máy và các chuyển mạch điều khiển hướng. Ở các Máy CNC, đó là bộ khuếch đại công suất servo, các thiết bị đóng/mở cách quang (opto - isolated ON/OFF), các công tắc hành trình và một hệ máy tính được trang bị với điều khiển khẩn và các hệ giao diện người vận hành. Tốc độ chạy dao và độ chính xác định vị của truyền động chạy dao phụ thuộc vào công suất và mômen cấp của động cơ servo và thuật toán điều khiển servo truyền động chạy dao, được thực hiện ở bộ điều khiển số (CNC).



Hình6.1: Trung tâm gia công CNC

6.1.2. Nguyên lí cơ sở trong gia công

Trong gia công, vật liệu có thể được bóc tách bởi dụng cụ truyền thống (dao phay, bào, tiện, ...) hoặc các chùm năng lượng tại vị trí giao diện của dụng cụ và phôi. Với dụng cụ truyền thống, giao diện này dễ xác định, còn đối với các tia năng lượng thì khó xác định hơn nhiều do việc phân chia năng lượng không đồng dạng- trong không gian 3 chiều.

Máy công cụ có thể coi là một robot (cơ cấu vận hành) với một số bậc tự do khác nhau, mang trên thân cả dụng cụ và vật gia công. Trên quan điểm động học, chức năng "điều khiển chính xác" và "khả năng lặp lại điểm tiếp xúc" giữa dụng cụ cắt và phôi được gọi là *giao diện gia công* (machining interface) và được quan tâm. Giao diện này xác định dễ hơn đối với dụng cụ truyền thống, nhưng cũng không đơn giản do có sự thay đổi của các tham số trong quá trình gia công. Những chức năng khác và kết cấu của máy công cụ đều phục vụ cho mục đích duy trì giao diện này.

Chuỗi kết cấu máy gồm : lưỡi cắt của dao, đầu giữ dao, các đường và bề trượt để dịch chuyển dụng cụ/phôi, các trục giữ dụng cụ hoặc phôi, châu cặp, các ổ gá và các rung động bên trong, lệch tâm và những tác động động lực học khác. Thường, những thay đổi không thể kiểm soát hoặc không biết trong chuỗi kết cấu là những nguồn chính gây lỗi động học trong gia công. Các tác động bên ngoài chuỗi kết cấu gây ảnh hưởng và tạo lỗi gia công có thể là các dao động, sự thay đổi nhiệt, v...v.

Có nhiều nguồn gây sai số trong gia công. Sai số được coi là toàn bộ các ảnh hưởng tới việc gia công chi tiết "hoàn hảo". Một chi tiết hoàn hảo là chi tiết có kích thước chính xác, bề mặt gia công nhám tốt, hình dạng hình học và vật liệu thoả mãn mọi điều kiện theo yêu cầu thiết kế. Thực tế không có sự chính xác tuyệt đối. Ta hài lòng với chi tiết "chấp nhận được", loại có dung sai không vượt khỏi giới hạn cho phép, độ nhám cũng như hình dạng hình học không vượt giới hạn sử dụng và vật liệu với các tính chất đã được dự đoán cho những phạm vi ứng dụng. Sai số gia công tạo nên tất cả các thuộc tính không lý tưởng của một chi tiết.

6.1.3. Sai số hình dạng kích thước trong gia công

Các nguyên nhân gây biến dạng tương đối giữa dụng cụ cắt và phôi gia công tại điểm tiếp xúc có thể do nhiệt, khối lượng và các lực cắt. Máy công cụ có các thành phần chuyển động và quay, chúng bị làm nóng do ma sát.

Nhiệt độ không đều giữa các chi tiết máy do các hệ số và nguồn nhiệt không như nhau. Đầu trục chính (nằm trên cổng hoặc cột khung đứng) thay đổi vị trí cùng tọa độ của điểm cắt trên phôi. Khối lượng di chuyển sẽ làm thay đổi độ cứng hoặc độ dịch chuyển tương đối giữa dụng cụ và phôi tại điểm cắt. Biến dạng do nhiệt/khối lượng có thể đo được tại các vị trí khác nhau của bàn máy hoặc đầu trục chính, lưu vào bảng ghi bù của CNC. Khi dụng cụ chạy, sai số được đọc từ bảng ghi và bổ sung vào chuyển động, theo lệnh của CNC để bù các sai lệch biến dạng trong khi gia công.

Sai số kích thước bởi lực cắt

Sau đây ta bàn đến sai số gây nên bởi lực cắt. Khi dụng cụ dịch chuyển theo dọc đường chạy dao, có thể có sự thay đổi về đại lượng và hướng của các lực cắt cũng như độ cứng tương đối giữa dụng cụ cắt và phôi. Chuyển vị tương đối gây nên độ sai lệch so với kích thước yêu cầu của chi tiết, tạo *sai số kích thước và sai số hình dạng hình học*.

Ví dụ: Sai lệch hình dạng trong phay mặt đầu

Thành của các chi tiết được gia công bởi phần trụ của dao phay ngón có bề mặt gia công vuông góc với hướng tiến của dụng cụ. Nếu hướng tiến và hướng trục giao đặt vào hệ tọa độ Decac x,y tương ứng, bất cứ sự lệch theo hướng y nào đều có thể tạo *sai số tĩnh về hình dạng (static form error)*. Các dao phay ngón có thể xem như là một thanh trụ đàn hồi được ngàm vào trục chính thông qua ống kẹp. Chúng là phần nhạy cảm nhất trong hệ thống máy công cụ do tỉ lệ đường kính dụng cụ-chiều dài ngàm khá nhỏ.

Sai số hình dạng tạo nên bởi phay mặt đầu xoắn ốc khá phức tạp. Các lực cắt không cố định mà thay đổi với sự quay của dao. Hơn nữa góc xoắn của đường rãnh tạo thêm những thay đổi về phân bố lực cắt dọc theo đường trục z của lưỡi cắt.

Để đơn giản trong việc giải thích cơ chế tạo bề mặt gia công, trước hết, ta xét trường hợp dao phay ngón với đường rãnh thẳng (tức góc xoắn 0). Ở đây, độ võng vuông góc với bề mặt gia công (theo hướng y) là quan trọng. Độ võng tĩnh, gây nên bởi lực vuông góc F_x tại phía đầu tự do của dao phay là: $\delta_y = F_y / k$; trong đó $k = (3EI)/l^3$ và $I = (\pi d^4)/64$, d- đường kính tác dụng của lưỡi cắt, lấy bằng $0,8 + 0,85$ đường kính ngoài (tùy theo dạng rãnh máng) và l- khoảng cách từ điểm cắt đến điểm kẹp. Lực cắt tỉ lệ thuận với

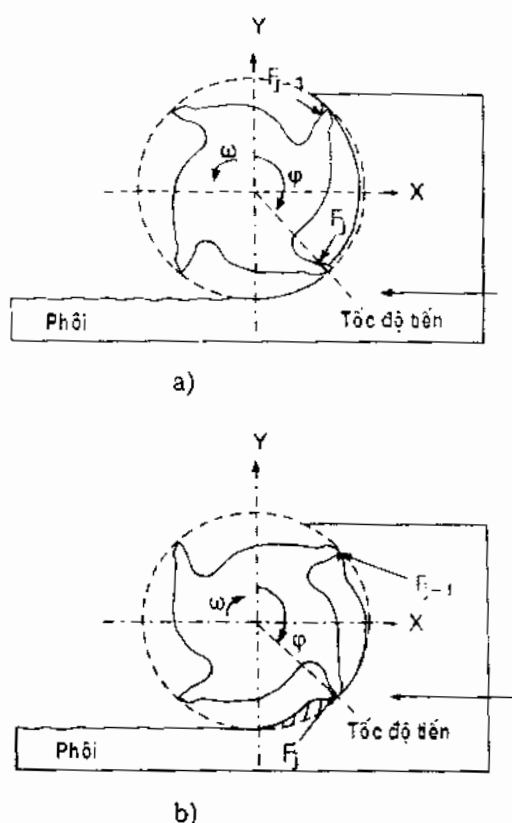
chiều dày phôi h và bằng:

$$F_y(\phi) = K_f \alpha h(\phi) \times [\cos(\phi) + K_f \sin(\phi)] \quad (6.1)$$

Với ϕ là góc chìm đo từ trục y đến điểm cắt, chiều dày của phôi là $h(\phi) = c \sin(\phi)$, với c là lượng tiến dao trên răng. Răng tạo bề mặt khi tiếp xúc với nó hoặc khi ở nằm trên trục y pháp tuyến. Khi dao nằm trên trục y , chiều dày phôi luôn bằng 0. Trường hợp này xảy ra tại vị trí vào phôi khi phay nghịch ($\phi = 0$) hoặc vị trí ra ở phay thuận ($\phi = \pi$), hình 6.2 Như vậy nếu chỉ có một răng trong vùng cắt, với mọi độ đàn hồi của dao phay ngón và độ lớn của lực cắt, sai số hình dạng bề mặt sẽ là 0 (dao phay ngón răng thẳng). Trường hợp này được sử dụng cắt tinh, khi dao có góc chìm hướng kính nhỏ hơn nhiều so với góc bước lưỡi cắt. Tuy nhiên nếu có hơn 1 răng tham gia

cắt cùng lúc, lực cắt sẽ không còn bằng 0 khi một răng nằm thẳng hướng trục y , vì tại các răng khác đã có phôi cắt trong vùng nhúng. Trong trường hợp này dụng cụ hoặc võng xuống bề mặt khi phay nghịch, gây sai số hình dạng cắt quá, hoặc lồi lên so với bề mặt trong phay thuận, gây sai số hình dạng cắt nông.

Tạo hình bề mặt trở nên phức tạp khi dùng dao phay ngón răng xoắn (helical). Kể cả trường hợp dao chỉ với một răng cắt cũng luôn để lại sai số hình dạng bề mặt. Xét một cạnh răng tại phần dưới cùng của lưỡi cắt được sắp thẳng hàng với trục y , vì vậy có góc chìm 0 (tức $\phi(z=0)=0$). Khi dao phay ngón quay, đỉnh của răng di

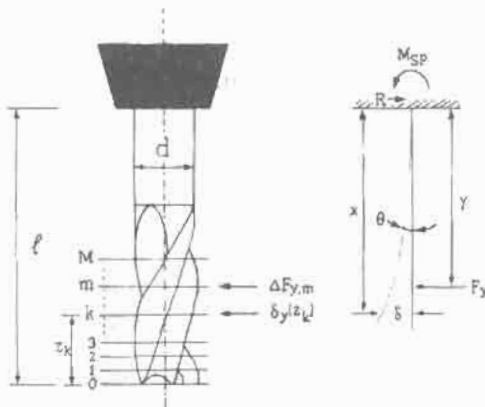


Hình 6.2: Ảnh hưởng của chiều rộng cắt và phương thức cắt lên sai số hình dạng bề mặt
a) Phay thuận b) Phay nghịch

chuyển đến góc chìm ϕ , trong lúc một điểm phía trên rãnh, có tọa độ z đo từ đỉnh, sẽ ở phía bên phải trục y , từ đó tạo bề mặt gia công. Vì lực pháp tuyến khác 0 tại thời điểm ấy, độ dịch chuyển đàn hồi của dao phay ngón sẽ tạo nên một sai số hình dạng trên bề mặt. Khi lưỡi cắt quay, điểm tạo bề mặt gia công sẽ chuyển động hướng lên dọc máng rãnh nhờ góc xoắn. Phụ thuộc vào số rãnh và chiều rộng lớp cắt có thể có nhiều hơn một điểm cắt được sắp thẳng theo trục y hoặc tiếp xúc với bề mặt gia công. Các điểm tiếp xúc có thể tính được khi cân bằng góc chìm tức thời ($\phi_j(z) = \phi + (j-1)\phi_p - k_\beta z$ với $k_\beta = (2 \tan \beta)/d$) tiến đến 0 khi phay nghịch, π khi phay thuận:

$$z = \frac{\phi + (j-1)\phi_p}{k_\beta} \quad (\text{Phay nghịch}) \quad (6.2)$$

$$z = \frac{\pi - \phi + (j-1)\phi_p}{k_\beta} \quad (\text{Phay thuận}) \quad (6.3)$$



Trong đó β là góc xoắn, $j=1,2,\dots,N-1$ là chỉ số rãnh và $\phi_p = (2\pi)/N$ là góc bước mũi cắt. Như vậy ta có thể lập ra thuật toán dự đoán sai số hình dạng gia công. Lưỡi cắt có thể chia thành M thành phần hình đĩa theo chiều sâu dọc trục của lớp cắt a (xem hình 6.3), nó có thể quay một góc gia số $\Delta\phi$ (ví dụ $\phi = 0, \Delta\phi, 2\Delta\phi, \dots, \phi_p$).

Mỗi một phần tử vi phân có chiều sâu cắt dọc trục $\Delta z = a/M$ và khi chọn các phần tử nhỏ, ảnh hưởng của góc xoắn có thể bỏ qua. Lực cắt vi phân (xem hình 6.3) sinh bởi thành phần m là:

$$\Delta F_{y,m}(\phi) = K_r c \Delta z \sum_{j=0}^{N-1} [\sin \phi_j(z) - K_r \cos \phi_j(z)] \sin \phi_j \quad (6.4)$$

Trong đó K_r, K_c là các hằng số cắt và c là lượng ăn dao trên răng.

Góc chìm cho thành phần m là $\phi_j(m) = \phi + (j-1)\phi_p - k_\beta m \Delta z$. Các lực cắt thành phần có thể chống nhau tại các biên trên của các đĩa. Vòng theo hướng

y tại điểm tiếp xúc z_k do lực đặt vào thành phần m gây nên, tính cho thanh công xôn là:

$$\delta_v(z_k, m) = \begin{cases} \frac{\Delta F_{v,m} v_m^2}{6EI} (3v_m - v_k) & 0 < v_k < v_m \\ \frac{\Delta F_{v,m} v_m^2}{6EI} (3v_k - v_m) & v_m < v_k \end{cases} \quad (6.5)$$

Ở đây E là mô đun đàn hồi, I là mômen quán tính tiết diện của dụng cụ và $\vartheta_k = l - z_k$ với l là chiều dài từ điểm cắt đến mặt mút ống kẹp. I được tính theo bán kính tương đương $R_t = 0,8R$ (0.8 là hệ số tỉ lệ gần đúng do có sự hiện diện của các rãnh). Độ võng tĩnh tổng tại điểm tiếp xúc dọc trục z_k được tính khi chồng các độ võng sinh bởi M lực thành phần lên dao phay ngón:

$$\delta_v(z_k) = \sum_{m=1}^M \delta_v(z_k, m) \quad (6.6)$$

6.1.4. Rung cơ học trong gia công

Trong máy công cụ, rung đóng vai trò lớn cản trở năng suất gia công, tăng nhanh độ mòn dụng cụ, góp phần làm kém chất lượng bề mặt và gây hại gối đỡ trục chính. Sau đây ta xem xét và phân tích mô hình hệ thống máy công cụ trên cơ sở kỹ thuật phân tích dựa vào thực nghiệm, một kỹ thuật được sử dụng rộng rãi trong các phương tiện gia công hiện đại. Trên cơ sở này có thể làm sáng tỏ vấn đề rung và ngăn ngừa nó trong ứng dụng thực tế.

6.1.4.1. Cơ sở của rung tự do và rung cưỡng bức

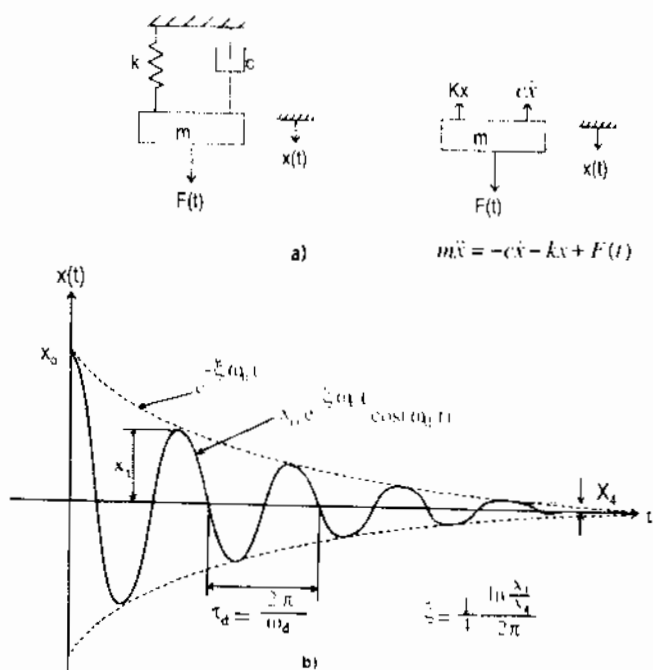
Như thể hiện ở phần 2.2.2, các kết cấu cơ đơn giản với một bậc tự do có thể được mô hình hoá bởi các thành phần khối lượng (m), lò xo (k) và giảm chấn (c) như hình 6.4. Khi có một lực ngoài F đặt vào kết cấu, chuyển động của hệ được miêu tả bởi phương trình bậc vi phân là:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (6.7)$$

Nếu hệ thống nhận một cú đập trong một khoảng thời gian cực ngắn, nó sẽ thực hiện các *dao động tự do (free vibration)*. Biên độ của dao động sẽ giảm dần theo thời gian, là hàm của hằng số giảm chấn (damping constant) của hệ thống. Tần số dao động bị ảnh hưởng chính bởi độ cứng và khối lượng và một phần bởi hằng số giảm chấn (tính nhỏ), hằng số này thường là

rất nhỏ trong kết cấu cơ khí. Khi hằng giảm chấn bằng 0 ($c=0$) hệ thống giao động với tần số tự nhiên:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (6.8)$$



Hình 6.4: Mô hình hệ thống khối lượng lò xo-
dao động giảm dần của hệ thống một bậc tự do
a) Hệ thống SDOF b) Rung tự do của hệ thống SDOF.

Hệ số giảm chấn (hoặc hệ số cản) là: $\xi = c/2\sqrt{km}$, luôn nhỏ hơn 1 trong kết cấu cơ khí. Ở đa số kết cấu kim loại, $\xi < 0.05$ hoặc thậm chí nhỏ hơn. Tần số tự nhiên giảm chấn của kết cấu được xác định bởi:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.9)$$

Giả sử khối lượng không có ngoại lực và dịch chuyển một lượng x_0 , chuyển động rung tự do được miêu tả bởi:

$$x(t) = x_0 e^{-\xi \omega_n t} \cos \omega_d t \quad (6.10)$$

Chu kỳ giữa mỗi sóng dao động là $\tau_d = 2\pi / \omega_d$, đây là cách đơn giản để ước đoán tần số tự nhiên có cản của hệ thống từ các phép đo dao động *quá độ* hoặc *tự do* (*free or transient vibrations measurement*). Hằng số giảm chấn có thể xấp xỉ từ tỉ lệ của biên độ phân rã lớn nhất (max.) của sóng đầu tiên và sóng thứ n của dãy sóng liên tục với phương trình:

$$\xi = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right) / 2\pi \quad (6.11)$$

Khi có một ngoại lực $F(t)$, hệ thống chịu một *dao động cưỡng bức* (*forced vibrations*). Nếu lực $F(t)=F_0$ không đổi đặt vào kết cấu, hệ thống chịu một dao động quá độ hoặc dao động tự do ngắn, sau đó ổn định tại độ

vòng (ở trạng thái tĩnh) $x_0 = F_0/k$. Nếu ngoại lực là một lực điều hoà (dạng hàm sin hoặc cosin), ta có thể viết:

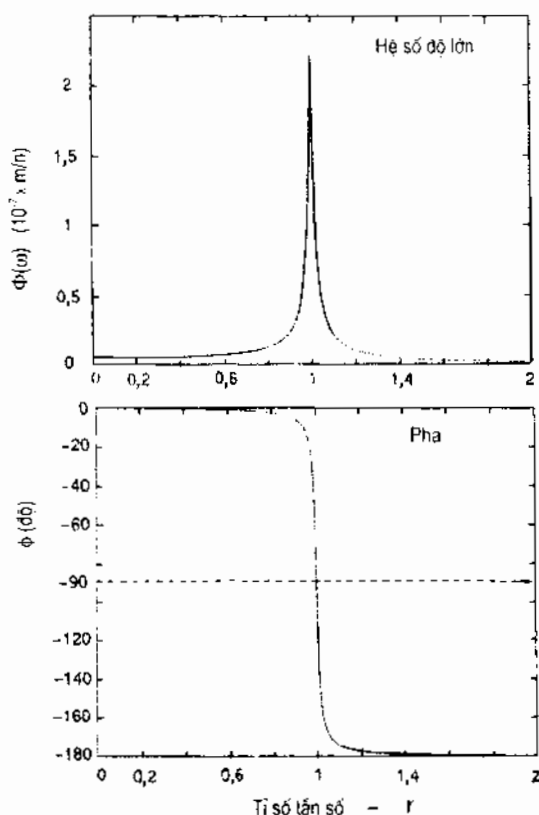
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0(\sin \omega t) \quad (6.12)$$

Như thế, hệ thống này chịu dao động cưỡng bức có cùng tần số ω với ngoại lực, nhưng với thời gian/pha trễ hơn. Giả sử, các giao động quá độ được tạo bởi các tải ban đầu yếu dần, hệ thống hoạt động ở trạng thái ổn định, khi ấy:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi) \quad (6.13)$$

Trong dao động cưỡng bức, sử dụng hàm điều hoà phức sẽ thuận lợi hơn. Lực điều hoà có thể thể hiện bởi $F(t) = F_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t}$, với α là pha dẫn so với thời gian tham chiếu hoặc vị trí góc trên một mặt phẳng phức. Đáp ứng điều hoà tương ứng là $x(t) = X e^{j(\omega t + \phi)}$, nếu thay vào phương trình chuyển động (6.12) ta có:

$$(k - \omega^2 m + j\omega c) X e^{j\alpha} e^{j\omega t} = F(t) = F_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t}$$



Hình 6.5: Hàm truyền đạt của một hệ thống SDOF

Pha và biên độ tổng của các dao động điều hoà là:

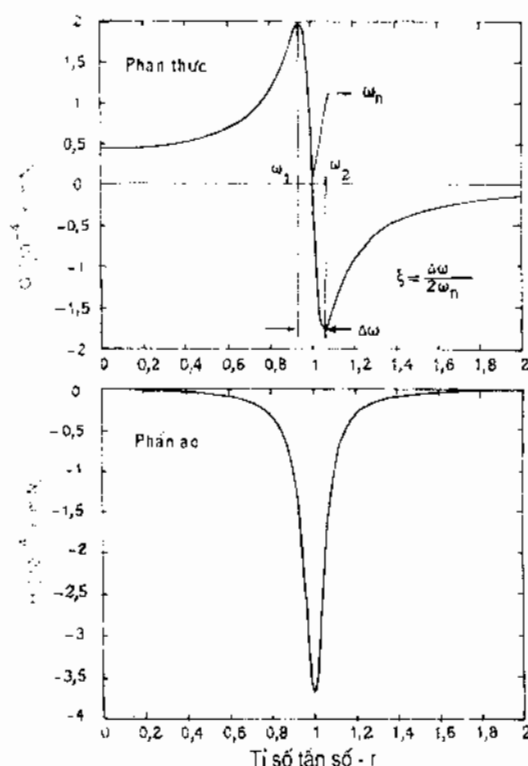
$$|\Phi(\omega)| = \left| \frac{X}{F_0} \right| = \frac{1}{k \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (6.14)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-2\xi r}{1-r^2} + \alpha$$

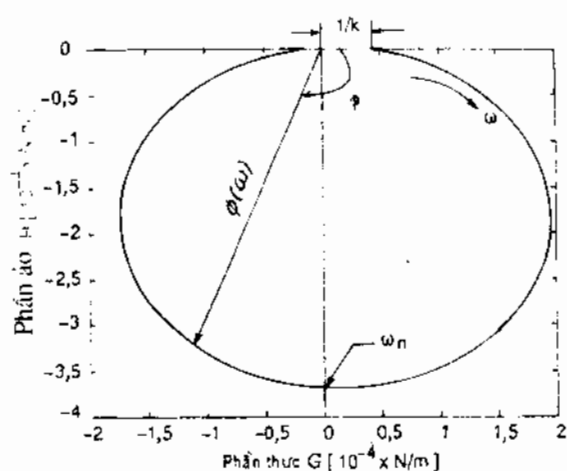
trong đó, r là tỉ số tần số (giữa tần số kích hoạt và tần số tự nhiên) $r = \omega / \omega_n$.

Phương trình (6.14) gọi là hàm truyền (transfer function) hoặc hàm đáp ứng tần số (frequency response function) của một kết cấu SDOF (hệ thống một bậc tự do), đồ thị của nó được thể hiện ở hình 6.5. Hàm truyền

$\Phi(\omega)$ có thể chia ra thành phần thực $G(\omega)$ và ảo $H(\omega)$ của $\frac{X}{F_0} e^{j(\phi-\omega t)}$ như sau:



Hình 6.6: Hàm truyền đạt của một hệ thống SDOF



Hình 6.7: Hàm truyền đạt của một hệ thống SDOF trong hệ thống tọa độ cực

$$G(\omega) = \frac{1-r^2}{k[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]}$$

$$H(\omega) = \frac{-2\xi r}{k[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]} \quad (6.15)$$

và $\Phi(\omega) = G(\omega) + jH(\omega)$

Chú ý: tại điểm cộng hưởng: $\omega = \omega_n$, $r = 1$, $G(\omega_n) = 0$, $H(\omega_n) = -1/(2\xi)$.

Phần thực và ảo của hàm truyền được minh họa trên hình 6.6 và bởi đồ thị cực trên hình 6.7. Trên đồ thị này, tại điểm cắt tần số 0, phần thực bằng độ đàn hồi tĩnh ($1/k$). Khi tần số kích thích tiến đến tần số tự nhiên (tức $r=1$), hệ thống cộng hưởng, biên độ của dao động trở thành max., góc pha tiến gần -90° . Thời gian trễ giữa kích thích và đáp ứng được xác định bởi $t_d = \phi/\omega$ tại tần số kích thích điều hoà ω . Nếu tần số kích thích tiếp tục tăng, góc pha tiến đến -180° , hoặc trễ xảy ra ở một nửa thời gian kích hoạt. Biên độ của các dao động giảm do kết cấu vật lý không thể đáp ứng đối với các nhiễu tần số cao. Hệ số cản, độ cứng và tần số tự nhiên có thể được đánh giá từ hàm truyền.

được đo với máy phân tích Fourier. Tại tần số kích hoạt 0 ($\omega = 0$) độ lớn của $\Phi(\omega)$ và phần thực của hàm truyền $G(\omega)$ bằng với độ đàn hồi tĩnh ($1/k$). Khi đọc các giá trị này tại các tần số thấp, cần chú ý sự kém nhạy cảm của các phép đo được thực hiện bởi các cảm biến tốc độ và gia tốc. Phép ngoại suy hàm truyền từ các tần số cao hơn, ở đó các mức cộng hưởng tắt có thể được coi là phương pháp thay thế để đánh giá độ cứng. Thường, các cảm biến đo chuyển vị cho các phép đo độ đàn hồi tĩnh chính xác hơn. Độ lớn max. của $\Phi(\omega)$ xảy ra tại $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$. $G(\omega)$ có hai cực trị tại:

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \rightarrow G_{\max} = \frac{1}{4k\xi(1 - \xi^2)} \quad (6.16)$$

$$\omega_2 = \omega_n \sqrt{1 + 2\xi^2} \rightarrow G_{\min} = \frac{1}{4k\xi(1 + \xi^2)}$$

Trong thực tế chế tạo máy, các kích hoạt bên ngoài thường là tuần hoàn nhưng không điều hòa. Mọi lực tuần hoàn đều có thể thể hiện bởi các thành phần sóng hài của nó. Khi một ngoại lực $F(t)$ (ví dụ như lực phay) tuần hoàn với chu kỳ $\tau = 2\pi/\omega$ (tức chu kỳ của răng dao phay). Triển khai theo chuỗi Fourier, ta có:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (6.17)$$

Với n là hàm điều hòa tần số cơ bản ω . Kết quả chính xác của các hệ số Fourier có thể thu được bằng lấy tích phân liên tục, các tích phân yêu cầu thể hiện toán học hàm cường độ tuần hoàn $F(t)$. Do thực tế, kích hoạt ngoài như lực phay có chu kỳ dạng sóng không đều nên ta có thể sử dụng kỹ thuật số rời rạc để tính các hệ số Fourier. Giả thiết, kích hoạt tuần hoàn được số hóa đều tại các khoảng $T(s)$, N lần trên khoảng τ (tức $\tau = NT$), ta có:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \\ a_n &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos \frac{n2\pi t_i}{\tau} \quad \text{với } n=1,2,3,\dots \\ b_n &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin \frac{n2\pi t_i}{\tau} \quad \text{với } n=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (6.18)$$

Trong phân tích thí nghiệm, F_i tương ứng với lấy mẫu thứ i của lực bởi máy phân tích Fourier. Ta còn có thể thể hiện dãy fourier rời rạc của hàm

tuần hoàn theo:

$$F(t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{-j\omega_n t} e^{j\omega_n t} \quad (6.19)$$

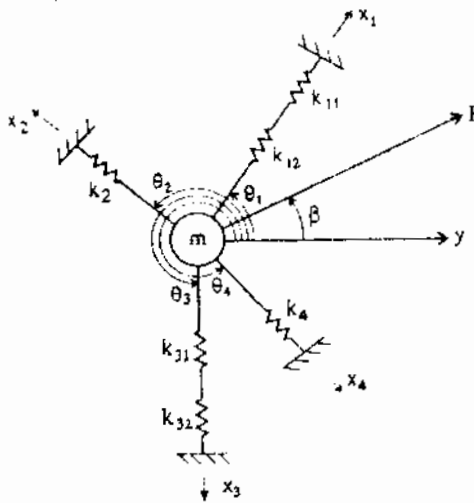
Trong đó: $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \omega_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$

Đồ thị của c_n , tần số đối (versus frequency) ω_n được gọi là *phổ Fourier* (*Fourier spectrum*). Đối với một kích hoạt tuần hoàn nhưng không điều hoà, đáp ứng ở trạng thái ổn định của một hệ thống SDOF (hệ thống 1 bậc tự do) có thể tính được bằng phương pháp chồng dao động được tạo bởi các thành phần sóng hài của kích hoạt tuần hoàn:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{\sqrt{(1 - n^2 r^2)^2 + (2\xi n r)^2}} e^{j(n\omega t - \alpha_n - \phi_n)} \quad (6.20)$$

Trong thực tế, kích hoạt tuần hoàn từ bên ngoài được xấp xỉ bởi chỉ 4 đến 5 thành phần đầu tiên của sóng hài (n). Những sóng hài bậc cao hơn không đủ năng lượng để gây ảnh hưởng lên dao động. Các lực phay chu kỳ theo răng có thể biểu diễn bởi thành phần chuỗi Fourier. Nếu sóng hài của lực phay gắn với dao động tự nhiên của kết cấu, có thể chọn tốc độ trục chính luân phiên đảo chiều để tránh dao động cưỡng bức.

6.1.4.2. Hàm truyền định hướng



Hình 6.8: Hàm truyền đạt chéo của chuyển vị định hướng (y) và lực (F)

Các biến dạng tĩnh và động giữa dụng cụ và bề mặt cắt xác định độ chính xác và độ tin cậy của các thành phần được gia công. Một máy công cụ đặc trưng có thể được miêu tả bởi một dãy các khối lượng nối với nhau bởi lò xo theo các hướng khác nhau. Lực cắt tổng truyền đến máy thông qua các lò xo và khối lượng. Sự tổng hợp các chuyển vị tạo nên bởi tất cả các lò xo theo hướng trục giao với bề mặt cắt gia công quyết

định độ chính xác kích thước cuối và khối lượng phôi bóc tách khỏi phôi gia công.

Xét một khối lượng chung (m) nối với nền cứng bởi các lò xo như thể hiện ở hình 6.8. Mỗi một lò xo (i) và khối lượng m xác định một hệ thống SDOF theo mỗi hướng khác nhau thông qua định hướng góc (θ_i), xuất phát từ hướng bề mặt cắt y . Lực cắt tổng F có góc β so với hướng bề mặt cắt y . Yêu cầu xác định chuyển vị ở hướng y , tạo nên bởi tất cả các lò xo chịu ảnh hưởng lực F .

Lực truyền đến lò xo i là:

$$F_i = F \cos(\theta_i - \beta) \quad (6.21)$$

Nếu hàm truyền ở mỗi hướng lò xo là $\Phi_i(\omega) = x_i / F_i$, thì chuyển vị tương ứng của lò xo i là:

$$x_i = F_i \Phi_i(\omega) = F \cos(\theta_i - \beta) \Phi_i(\omega) \quad (6.22)$$

Dịch chuyển theo hướng y của lò xo i là:

$$y_i = x_i \cos \theta_i = F \cos \theta_i \cos(\theta_i - \beta) \Phi_i(\omega) \quad (6.23)$$

Gộp các thành phần dao động x_i ở hướng y ta sẽ có dao động tổng hợp. Hàm truyền giữa lực cắt F và dao động tổng hợp y được gọi là *hàm truyền định hướng* (oriented transfer function) hoặc *hàm truyền chéo* (cross transfer function), là:

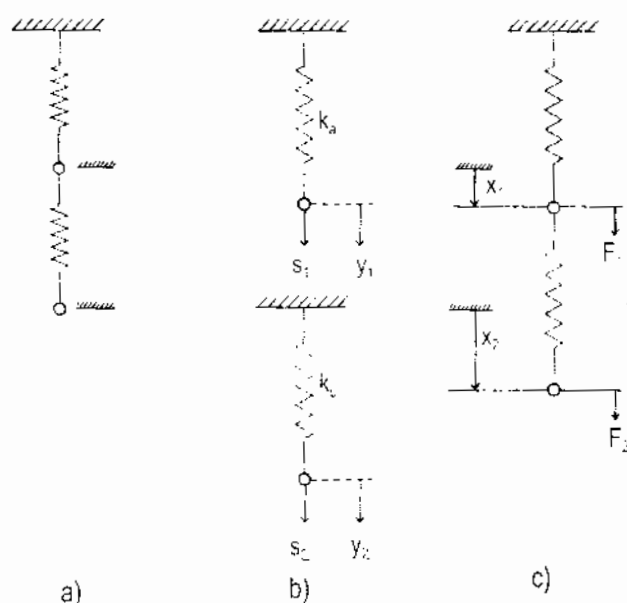
$$\Phi_y F(\omega) = \frac{y}{F} = \sum_{i=1}^n u_{di} \Phi_i(\omega) \quad (6.24)$$

Trong đó $u_{di} = \cos \theta_i \cos(\theta_i - \beta)$ là hệ số định hướng (directional factor) ở hướng i . Khi bỏ qua khối lượng, ta có thể sử dụng công thức (6.24) để tính biến dạng tĩnh tổng hợp ở hướng y .

6.1.4.3. Các hệ thống tọa độ đo và thiết kế

Trong phân tích kết cấu máy công cụ, ta thường sử dụng hệ thống 3 tọa độ, trong đó kết cấu máy công cụ được mô hình hoá bởi một lượng lò xo, giảm chấn và khối lượng. Các hệ thống này có thể là hệ thống *tọa độ đo* (còn gọi là *cục bộ*), *thiết kế* hoặc *hệ thống tọa độ riêng* (design, local and modal systems). Các khối lượng, lò xo và giảm chấn có thể xác định được trong một trong 3 hệ thống tọa độ này, phụ thuộc vào sự thuận lợi để tính bằng máy tính hoặc thể hiện vật lý. Các hệ thống tọa độ riêng không mang ý

ngành vật lý, được sử dụng để phân tích độ bền và sự hoạt động của toàn bộ kết cấu tại một tần số tự nhiên riêng biệt (sẽ được đề cập đến ở phần sau).



Hình 6.9: Chuyển vị và lực xác định trong tọa độ đo và thiết kế
 a) Các lò xo nối nhau b) Tọa độ thiết kế c) Tọa độ đo

phép đo là ấn định. Các chuyển vị là x_1, x_2 được xác định trong *tọa độ cục bộ (hoặc tọa độ đo)*. Tuy nhiên, khi độ giãn tương đối (giữa hai đầu mút) của mỗi lò xo được đo, chuyển vị tương ứng được xác định trong *tọa độ thiết kế (design coordinates)*. Nói cách khác, chuyển vị cục bộ thể hiện sự thay đổi tuyệt đối trong tọa độ của một điểm trên kết cấu, còn chuyển vị thiết kế thể hiện độ giãn dài hoặc nén của riêng một lò xo.

Gọi các lực là S_1 và S_2 và các chuyển vị là y_1 và y_2 trong tọa độ thiết kế, thì:

$$S_1 = k_a y_1 \quad S_2 = k_b y_2 \quad (6.25)$$

Hoặc ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Trong đó k_a và k_b là giá trị độ cứng thiết kế cho các lò xo. Để đơn giản

Các tọa độ *thiết kế* và *cục bộ* được giải thích thông qua kết cấu đơn giản được thể hiện bởi 2 lò xo nối tiếp nhau và lực F_1 và F_2 đặt vào chúng (hình 6.9). các chuyển vị được đo tại các vị trí ấn định (như tại điểm ban đầu 1 và 2, nơi không bị biến dạng). Các chuyển vị là x_1, x_2 , các điểm tham chiếu cho

ta có thể sử dụng kí hiệu ma trận sau:

$$\{S\} = [K_y] \{y\} \quad (6.27)$$

Với $\{S\}$ và $\{y\}$ là vector lực và chuyển vị, $[K_y]$ là ma trận độ cứng trong tọa độ thiết kế. Mối quan hệ giữa chuyển vị đo và thiết kế được thể hiện:

$$x_1 = y_1 \rightarrow y_1 = x_1 \quad (6.28)$$

$$x_2 = y_1 + y_2 \rightarrow y_2 = -x_1 + x_2 \quad (6.29)$$

Hoặc

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \{y\} = [T] \{x\} \quad (6.30)$$

Ở đây $[T]$ là ma trận chuyển đổi giữa chuyển vị thiết kế và cục bộ. Tương tự có thể viết biểu thức cho lực là:

$$S_2 = F_2 \rightarrow F_2 = S_2 \quad (6.31)$$

$$S_1 = F_1 + F_2 \rightarrow F_1 = S_1 - S_2 \quad (6.32)$$

Hoặc $\{F\} = [T]^T \{S\} \quad (6.33)$

Các thành phần độ cứng, khối lượng và giảm chấn có thể được chuyển từ một hệ thống tọa độ sang hệ thống khác khi sử dụng ma trận chuyển đổi $[T]$, thay phương trình (6.27) và (6.30) vào (6.33):

$$\{F\} = [T]^T \{S\} = [T]^T [K_y] \{y\} = [T]^T [K_y] [T] \{x\} \quad (6.34)$$

Vì $\{F\} = [K_x] \{x\}$, ta có thể thu được ma trận độ cứng cục bộ từ tọa độ thiết kế như:

$$[K_x] = [T]^T [K_y] [T] \quad (6.35)$$

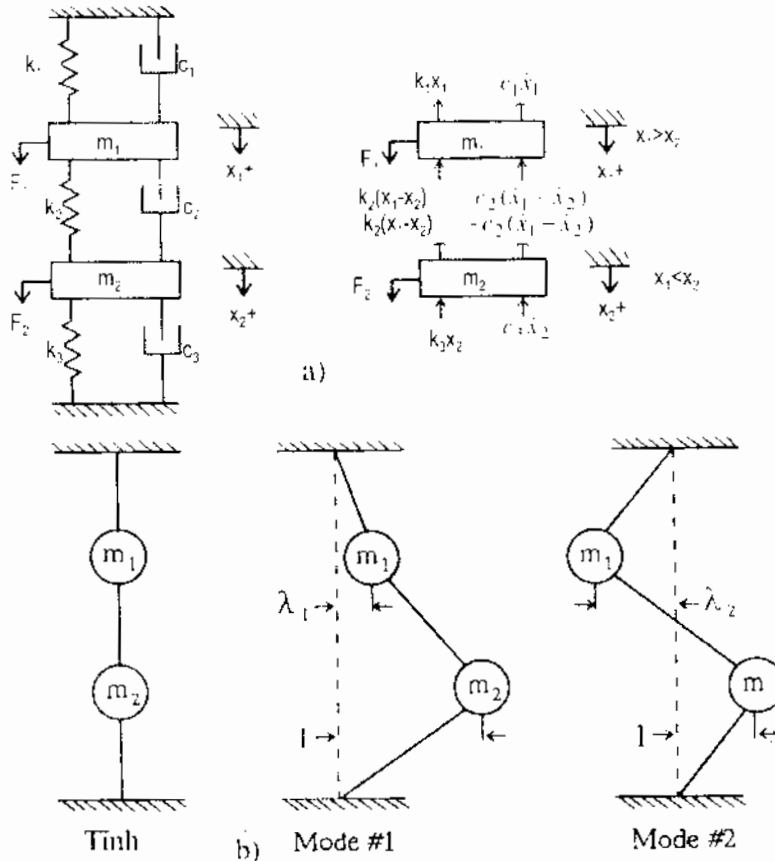
Tương tự có thể áp dụng cho ma trận khối lượng và giảm chấn như:

$$[C_x] = [T]^T [C_y] [T], [M_x] = [T]^T [M_y] [T] \quad (6.36)$$

Chú ý, phụ thuộc vào chuyển vị và lực, đơn vị đo có thể khác nhau trong các tọa độ thiết kế và cục bộ. Ví dụ, chuyển vị có thể xác định theo mm trong tọa độ cục bộ cho vị trí nào đó của kết cấu, trong khi chuyển vị có thể ở đơn vị đo góc nếu do các tải xoắn và lò xo trong tọa độ thiết kế gây nên. Mặc dù tất cả phép đo thí nghiệm được thực hiện trong tọa độ cục bộ, nhưng đối với người thiết kế thì mối quan tâm là những phần tử yếu trong tọa độ thiết kế.

6.1.4.4. Phân tích dao động giải tích cho các hệ thống nhiều bậc tự do

Máy công cụ có nhiều bậc tự do theo các hướng khác nhau. Dao động giữa dụng cụ và bề mặt chi tiết gia công là mối quan tâm chính, do chúng ảnh hưởng đến độ chính xác của bề mặt sản phẩm, chiều dày phoi và lực cắt tác động vào máy. Sau đây những nguyên lý cơ sở của phân tích dao động, được xem xét sử dụng cho hệ thống hai bậc tự do (2-DOF), hình 6.10.



Hình 6.10: Hàm truyền đạt của một hệ thống SDOF

Từ định luật 2 Newton, phương trình chuyển động của khối lượng m_1 và m_2 trong tọa độ đo hoặc cục bộ (x_1, x_2) có thể viết là:

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \quad (6.37)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 \quad (6.38)$$

Sắp xếp lại các phương trình ở dạng ma trận:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (6.39)$$

Trong đó, ma trận khối lượng, độ cứng và giảm chấn tương ứng là:

$$[M_s] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [K_s] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}; \quad [C_s] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Vectơ chuyển vị $\{x\}$ và lực $\{F\}$ được định nghĩa là:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

Giải hệ phương trình vi phân trước hết cho trường hợp dao động tự do không giảm chấn (lúc $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ và $\{F\} = \{0\}$)

$$[M_s] \ddot{\{x\}} + [K_s] \{x\} = \{0\} \quad (6.42)$$

Hệ thống không bị cản có nghiệm chung là:

$$\{x(t)\} = \{X\} \sin(\omega t + \Psi) \quad (6.43)$$

Trong đó $\{X\}$ và Ψ là không đổi, ω là tần số tự nhiên của hệ thống. Thay vectơ chuyển vị $\{x(t)\}$ và đạo hàm bậc hai, vectơ gia tốc: $\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{X\} \sin(\omega t + \Psi)$, phương trình (6.42) trở thành:

$$([K_s] - \omega^2 [M_s]) \{X\} = \{0\} \quad (6.44)$$

Hoặc :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.45)$$

Để giải, định thức của các phương trình đại số đồng thời phải bằng 0. Nếu đặt $s = \omega^2$, ta có:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - sm_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - sm_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.46)$$

Hoặc :

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (6.47)$$

Với n là số bậc tự do của hệ thống. Ví dụ, đối với một hệ thống hai bậc tự do (2-DOF):

$$s^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) s + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{m_1 m_2} = 0 \quad (6.48)$$

Ở đa thức này s có hai giá trị thực: $s_1 = \omega_{n1}^2$ và $s_2 = \omega_{n2}^2$, với ω_{n1} và ω_{n2} là các tần số tự nhiên của hệ thống. Tổng hợp phần góp của từng giải pháp

hoặc mode, ta có:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{Bmatrix}_1 \sin(\omega_{n1}t + \Psi_1) + \begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{Bmatrix}_2 \sin(\omega_{n2}t + \Psi_2) \quad (6.49)$$

Ở đây $\{P\}_{1,2} = \{X_1 \ X_2\}_{1,2}^T$ là các *vector riêng* hoặc *dạng dao động* (eigenvectors/ mode shapes) được liên kết tần số tự nhiên cơ bản (ω_{n1}) và tần số tự nhiên phụ ω_{n2} tương ứng. X_k là chuyển vị của nút i và Ψ_k là pha tạo bởi dao động tự nhiên k . Kết quả của phương trình (6.44) chỉ đưa ra tỉ số các biên độ tại mỗi nút (node). Thay ω_{n1} và ω_{n2} trong phương trình (6.44) và sắp xếp lại, ta có:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \lambda_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_{n1}^2 m_1} = \frac{k_2 + k_1 - \omega_{n1}^2 m_2}{k_2} \quad (6.50)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \lambda_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_{n2}^2 m_1} = \frac{k_2 + k_1 - \omega_{n2}^2 m_2}{k_2} \quad (6.51)$$

Thay $\lambda_{1,2} = (X_1 / X_2)_{1,2}$, đặt $X_{21} = Q_1$, $X_{22} = Q_2$ vào phương trình (6.33) về các rung động quá độ (transient vibration), ta có:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \sin(\omega_{n1}t + \Psi_1) \\ Q_2 \sin(\omega_{n2}t + \Psi_2) \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

Hoặc dạng vector:

$$\{x(t)\} = [\{P\}_1 \ \{P\}_2] \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = [P] \{q(t)\} \quad (6.53)$$

Trong đó $\{P\}_i = [\lambda_i \ 1]^T$ và q_i là dạng dao động đầu tiên và chuyển vị riêng tạo bởi nó. Sự thể hiện vật lí của một dạng dao động có thể giải thích ở hình 6.10 b. Số lượng dao động tự nhiên gây chuyển vị đơn vị tại khối lượng m_2 và λ_i tại khối lượng m_1 . $[P]$ là ma trận riêng đầy đủ, có kích thước $[n \times n]$ cho hệ thống n bậc tự do. Tuy nhiên, ma trận riêng không nhất thiết là ma trận vuông. Số hàng bằng với số các điểm tọa độ trên máy và mỗi cột thể hiện một dao động.

Vì các dao động là trực giao với nhau, chúng có tính chất:

$$\{P\}_i^T [M] \{P\}_j = 0 \quad (6.54)$$

Trong khi:

$$\{P\}_i^T [M] \{P\}_i = m_{q_i} \quad (6.55)$$

Ở đây m_{q1} là khối lượng riêng kết hợp với dao động đầu tiên. Khi áp dụng nguyên lý trực giao tương tự cho các dạng dao động còn lại, ma trận khối lượng và ma trận độ cứng cục bộ được chuyển vào tọa độ riêng:

$$\begin{aligned} [M_q] &= [P]^T [M] [P] \\ [K_q] &= [P]^T [K] [P] \end{aligned} \quad (6.56)$$

Các ma trận riêng khối lượng tổng $[M_q]$ và ma trận riêng độ cứng tổng $[K_q]$ là ma trận đường chéo, mỗi thành phần trên đường chéo thể hiện khối lượng hoặc độ cứng kết hợp với một dao động. Chú ý, khi hệ thống có giảm chấn cân đối (tức $\{C_q\} = \alpha_1 [M_q] + \alpha_2 [K_q]$, với α_1 và α_2 là các hằng số theo thực nghiệm), ma trận riêng độ cản $[C_q]$ cũng là ma trận đường chéo:

$$[C_q] = [P]^T [C] [P] \quad (6.57)$$

Ứng dụng các chuyển đổi riêng vào phương trình (6.39), ta thu được phương trình chuyển động ở tọa độ riêng.

$$\begin{bmatrix} m_{q1} & 0 \\ 0 & m_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{q1} & 0 \\ 0 & c_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{q1} & 0 \\ 0 & k_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

Hoặc ở dạng véc tơ:

$$[M_q] \{\ddot{q}\} + [C_q] \{\dot{q}\} + [K_q] \{q\} = \{0\} \quad (6.59)$$

Các phương trình chuyển động trong tọa độ riêng không liên quan nhau, có thể giải tương tự với cách cho các hệ thống 1 bậc tự do. Nếu xét các dao động tự do của dao động đầu tiên làm ví dụ, ta có:

$$m_{q1} \ddot{q}_1 + c_{q1} \dot{q}_1 + k_{q1} q_1 = 0 \quad (6.60)$$

Phương trình này có nghiệm:

$$q_1(t) = Q_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \Psi_1)$$

Ở đây, hệ số cản là $\xi_1 = c_{q1} / (2\sqrt{k_{q1} m_{q1}})$ và Q_1 tìm được từ các điều kiện ban đầu. Sau khi giải, tìm chuyển vị trong hệ thống tọa độ riêng, các dao động trong hệ thống cục bộ có thể thu được bằng chuyển đổi hệ thống riêng (6.53) (tức $\{x(t)\} = [P] \{q\}$). Khi áp dụng chuyển đổi, ví dụ cho hệ thống 2-DOF, các chuyển vị cục bộ trở thành:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (6.61)$$

Bằng việc áp dụng các chuyển đổi vào tọa độ riêng như thế cho cả hai vế của phương trình dao động cưỡng bức (6.39). Vector lực $\{F\}$ có thể chuyển được sang các tọa độ riêng là :

$$\{R\} = [P]^T \{F\} \quad (6.62)$$

Biểu thức dao động cưỡng bức trong tọa độ riêng trở thành:

$$[M_q] \{\ddot{q}\} + [C_q] \{\dot{q}\} + [K_q] \{q\} = \{R\} \quad (6.63)$$

Áp dụng các chuyển đổi này vào hệ thống 2-DOF, ta có:

$$m_{q1} \ddot{q}_1 + c_{q1} \dot{q}_1 + k_{q1} q_1 = R_1 \quad (6.64)$$

$$m_{q2} \ddot{q}_2 + c_{q2} \dot{q}_2 + k_{q2} q_2 = R_2 \quad (6.65)$$

Đó là các phương trình vi phân không kết nối, có thể giải tương tự như ở hệ phương trình một bậc tự do (như đã đề cập ở trên). Các hàm truyền trong tọa độ riêng được thể hiện tương tự cho các hệ thống SDOF (phương trình 6.14) đối với từng dao động k :

$$|\Phi_{q,k}(\omega)| = \left[\frac{q_k}{R_k} \right] = \frac{1}{k_{qk}} \frac{1}{\sqrt{(1-r_k^2)^2 + (2\xi_k r_k)^2}} \quad (6.66)$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \frac{-2\xi_k r_k}{1-r_k^2} \quad (6.67)$$

Trong đó tỉ số tần số $r_k = \omega/\omega_{nk}$. Đối với ví dụ hệ thống 2-DOF chuyển vị riêng có thể được biểu diễn bởi:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{q1} & 0 \\ 0 & \Phi_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (6.68)$$

Sử dụng dạng ma trận tổng quát, ta có:

$$\{q\} = [\Phi_q] \{R\} \quad (6.69)$$

Với Φ_q là ma trận đường chéo hàm truyền ở hệ tọa độ riêng. Thay $\{R\} = [P]^T \{F\}$ và $\{x\} = [P] \{q\}$ vào phương trình (6.69) ta thu được các dao động trong tọa độ cục bộ:

$$\{x\} = [P] [\Phi_q] [P]^T \{F\} \quad (6.70)$$

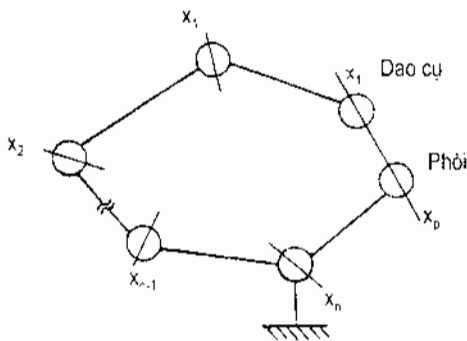
Hoặc:

$$\{x\} = \left(\sum_{k=1}^n \{P\}_k \{P\}_k^T \Phi_{q,k} \right) \{F\} \quad (6.71)$$

Trong đó $\{P\}_k$ là vectơ riêng cho dao động k và n là số bậc tự do. Như vậy các dao động cường độ điều hoà đối với từng tọa độ có thể tính được khi sử dụng dạng dao động $\{P\}_k$, các hàm truyền riêng $\Phi_{q,k}$ và các vectơ ngoại lực $\{F\}$. Nếu ngoại lực $\{F\} = \{F_1 \sin(\omega t) \quad 0\}$, dao động đo được ở tọa độ cục bộ, x_1 và x_2 sẽ là:

$$\begin{aligned} \frac{x_1(\omega)}{F_1(\omega)} &= \lambda_1^2 \Phi_{q1} + \lambda_2^2 \Phi_{q2} \\ \frac{x_2(\omega)}{F_1(\omega)} &= \lambda_1 \Phi_{q1} + \lambda_2 \Phi_{q2} \end{aligned} \quad (6.72)$$

6.1.4.5. Hàm truyền tương đối giữa dụng cụ và phôi



Hình 6.11: Hàm truyền đạt giữa dụng cụ và phôi trên máy công cụ

Dao động tương đối giữa dụng cụ cắt và bề mặt gia công quyết định độ chính xác của chi tiết gia công và tải động của các kết cấu cơ khí liên quan. Có thể dự đoán lực cắt cho một số hình dạng hình học của dụng cụ và điều kiện cắt như một số tài liệu về công nghệ chế tạo máy đã trình bày [5]. Các lực cắt đặt lên dao cụ và phôi có biên độ bằng nhưng hướng ngược nhau

và chuyển vị tương đối giữa hai kết cấu là có thể xác định được. Xét một cấu trúc chung máy công cụ, thể hiện ở hình 6.11. Chuyển vị tương đối giữa dụng cụ và phôi là: $(x_1 - x_n)$, x_1 - chuyển vị của dụng cụ, x_n - chuyển vị của phôi. Lực cắt tác dụng lên dụng cụ là (F_1) và lên phôi là (F_n) có cùng độ lớn F_0 nhưng hướng ngược nhau ($F_1 = -F_n$). Vectơ lực và vectơ chuyển vị cho hệ thống n -DOF thể hiện ở tọa độ cục bộ là:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} \\ \{F\} &= \{0, 0, \dots, 1, -1, \dots, 0\} F_0 \end{aligned} \quad (6.73)$$

Phương trình chuyển động của hệ thống là:

$$[M, \{\ddot{x}\}] + [C, \{\dot{x}\}] + [K, \{x\}] = \{F\} \quad (6.74)$$

Với $[M,]$ - ma trận khối lượng cục bộ, $[C,]$ - ma trận giảm chấn cục bộ và $[K,]$ -ma trận độ cứng cục bộ là các ma trận vuông, kích thước $[n \times n]$, vectơ lực $\{F\}$ có kích thước $[n \times 1]$. Giải các giá trị riêng (eigenvalues) dẫn tới ma trận dao động $[P]$ với kích thước $[n \times n]$:

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \dots P_{1t} & P_{1w} \dots P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \dots P_{2t} & P_{2w} \dots P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{t1} & P_{t2} \dots P_{tt} & P_{tw} \dots P_{tn} \\ P_{w1} & P_{w2} \dots P_{wt} & P_{ww} \dots P_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} \dots P_{nt} & P_{nw} \dots P_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

Hoặc:

$$[P] = \{ \{P\}_1, \{P\}_2, \dots, \{P\}_t, \{P\}_w, \dots, \{P\}_n \} \quad (6.76)$$

Ở đây, mỗi cột thể hiện dạng dao động $\{P\}$ của hệ thống cấu trúc n-DOF. Từ phương trình chuyển đổi tọa độ riêng $\{x\} = [P]\{q\}$, các chuyển vị của dụng cụ và phối có thể tính khi sử dụng kết hợp các hàng t, w của ma trận riêng trên:

$$\{x_t\} = \{P_{t1} \ P_{t2} \ \dots \ P_{tt} \ P_{tw} \ \dots \ P_{tn}\} \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_t \ q_w \ \dots \ q_n\}^T \quad (6.77)$$

$$\{x_w\} = \{P_{w1} \ P_{w2} \ \dots \ P_{wt} \ P_{ww} \ \dots \ P_{wn}\} \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_t \ q_w \ \dots \ q_n\}^T \quad (6.78)$$

Thay lực $\{R\} = [P]^T \{F\}$ vào vectơ chuyển vị riêng $\{q\} = [\Phi_q]\{R\}$, lưu ý là tất cả thành phần của vectơ lực là 0 trừ hai thành phần tương ứng tọa độ x_t và x_w , ta có:

$$\{q\} = [\Phi_q] \begin{bmatrix} P_{t1} - P_{w1} \\ P_{t2} - P_{w2} \\ \vdots \\ P_{tn} - P_{wn} \end{bmatrix} F_0 = \begin{bmatrix} \Phi_{q1}(P_{t1} - P_{w1}) \\ \Phi_{q2}(P_{t2} - P_{w2}) \\ \vdots \\ \Phi_{qn}(P_{tn} - P_{wn}) \end{bmatrix} F_0 \quad (6.77)$$

Thay các chuyển vị riêng này vào phương trình (6.77, 6.78) ta có chuyển vị cục bộ tương ứng của dụng cụ và phối là:

$$x_t = F_0 \sum_{i=1}^n \Phi_{qi} P_{ti} (P_{ti} - P_{wi}) \quad (6.78)$$

$$x_u = F_0 \sum_{i=1}^n \Phi_{qi} P_{ui} (P_{ui} - P_{ui}) \quad (6.79)$$

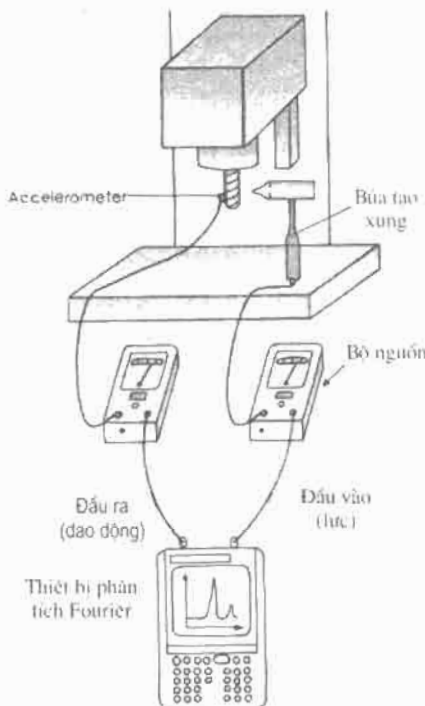
Khi cấu trúc máy công cụ bị tác động bởi một lực thay đổi điều hoà tại điểm cắt, hàm truyền tương đối giữa dụng cụ và phối thành:

$$\frac{x_f(\omega) - x_w(\omega)}{F_0(\omega)} = \sum_{i=1}^n \Phi_{qi} (P_{ui} - P_{ui})^2 \quad (6.80)$$

Nếu thể hiện một hệ thống 2DOF là cấu trúc của phối và dụng cụ (tức, $x_1 \equiv x_f$, $x_2 \equiv x_w$), vectơ lực trở thành $\{F\} = \{1 \quad -1\} F_0$. Hàm truyền tương đối giữa dụng cụ và phối trong ví dụ này là:

$$\frac{x_1 - x_2}{F_0} = \Phi_{q1} (\lambda_1 - 1)^2 + \Phi_{q2} (\lambda_2 - 1)^2 \quad (6.81)$$

6.1.5. Phân tích thí nghiệm dao động cho hệ thống nhiều bậc tự do



Hình 6.12: Đo hàm truyền đạt sử dụng búa với cảm biến lực và gia tốc

Hàm truyền của các hệ thống nhiều bậc tự do (MDOF) đang tồn tại được nhận biết nhờ kiểm thử động học kết cấu máy. Máy vật lý được mô hình hoá bởi các mảng khối lượng rời rạc, kết nối với các lò xo thẳng hoặc xoắn.

Các thiết bị dùng làm nguồn kích hiệu quả nhất các sàng lắc thủy điện hoặc điện từ, vì chúng có thể cấp lực với dải tần rộng, chứa các dao động tự nhiên chi phối (dominant natural modes) của cơ cấu được kiểm. Hoặc có thể sử dụng búa có gắn cảm biến lực piezo-electric (xem hình 6.12), mặc dù phương pháp này có thể tạo ra lực với biên độ và tần số ngẫu nhiên. Lực va đập cấp bởi búa có thời gian ngắn, có thể coi là những xung hẹp hoặc như các xung lực có phổ Fourier rộng, tức phổ tần số rộng bao gồm các dao động tự

nhiên bị kích bởi xung lực đang cần được tìm ra. Khối lượng của búa và vật

liệu đính búa (trên đó dán cảm biến lực) phải lựa chọn phù hợp với khối lượng, độ cứng và vật liệu của kết cấu chịu kích hoạt.

Các dao động tổng hợp được đo với cảm biến chuyển vị, tốc độ và gia tốc. Các cảm biến đo chuyển vị kiểu điện cảm hoặc điện dung nhằm thu được các tín hiệu dao động tần số thấp hoặc tĩnh để đo tính đàn hồi tĩnh. Do là các cảm biến không tiếp xúc, có thể khó tìm được vị trí thích hợp để treo các cảm biến trên máy được kiểm. Hiện nay đã có cảm biến đo chuyển vị bằng tia laze, khá thuận tiện trong lắp đặt thực tế. Gia tốc kế (accelerometer) cũng được sử dụng nhiều trong đo dao động. Trường hợp đó, khối lượng và phạm vi tần số của gia tốc kế phải được lựa chọn phù hợp, do chúng có thể bổ sung khối lượng làm thay đổi các tần số tự nhiên đo được. Các vật liệu giao diện và liên kết giữa kết cấu và gia tốc kế phải được chọn cẩn thận để đảm bảo các phép đo chính xác.

Sau đây là cơ sở phân tích dao động thực nghiệm được giới thiệu tóm tắt. Kiến thức này cần thiết cho các kỹ sư chế tạo máy do luôn gặp vấn đề về động lực học trong nghiên cứu và chế tạo.

Khái niệm về thặng dư (residue)-r:

Hàm truyền của một hệ thống SDOF (biểu diễn bởi phương trình 6.7) thể hiện ở miền Laplace:

$$h(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.82)$$

Trong đó $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ là phương trình đặc tính của hệ thống, có nghiệm kép phức:

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_d \quad s_1^* = -\xi\omega_n - j\omega_d \quad (6.83)$$

Hàm truyền (6.82) có thể biểu diễn bởi khai triển phân số:

$$h(s) = \frac{r}{s-s_1} + \frac{r^*}{s-s_1^*} = \frac{\alpha + \beta s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.84)$$

Thặng dư (residue) là:

$$r = \sigma + j\nu \quad r^* = \sigma - j\nu \quad (6.85)$$

Các tham số tương ứng là:

$$\alpha = 2(\xi\omega_n\sigma - \omega_d\nu) \quad \beta = 2\sigma \quad (6.86)$$

Thặng dư có thể có phần thực và ảo, phụ thuộc vào sức cản và số lượng

dao động trong hệ thống. Tuy nhiên, đối với một hệ thống SDOF, trạng dư có các giá trị riêng biệt, là:

$$r = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{1/m}{(s - s_1)(s - s_1^*)} = \frac{1/m}{s_1 - s_1^*} = \frac{1/m}{2j\omega_d} \quad (6.87)$$

$$r^* = \lim_{s \rightarrow s_1^*} (s - s_1^*) \frac{1/m}{(s - s_1)(s - s_1^*)} = \frac{1/m}{s_1^* - s_1} = -\frac{1/m}{2j\omega_d} \quad (6.88)$$

Do đó, đối với các hệ thống SDOF phần thực của trạng dư phải là 0 ($\alpha = 0$ và $\beta = 0$). Chú ý, đối với một khối lượng đơn vị, trạng dư có giá trị $r = 1/(2j\omega_d)$.

Hàm truyền của một hệ thống MDOF:

Phương trình chuyển động của một hệ thống MDOF thể hiện trong miền s khi lấy biến đổi Laplace phương trình (4.12):

$$([M]s^2 + [C]s + [K])\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (6.89)$$

Hoặc:

$$[B(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (6.90)$$

Khi đó, ma trận hàm truyền của hệ thống MDOF là:

$$[H(s)] = \frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}} = \frac{adj[B(s)]}{[B(s)]} \quad (6.91)$$

Trong (6.90), $[B(s)]$ là phương trình đặc tính, và nghiệm của $[B(s)] = 0$ cho các giá trị riêng của hệ thống MDOF. Chú ý, ma trận hàm truyền $[H(s)]$ có kích thước $[n \times n]$ cho hệ thống n-DOF và tất cả các thành phần của nó đều có mẫu số chung là $[B(s)]$.

Ví dụ 6.1: Hàm truyền cho một hệ thống 2-DOF là:

$$[H(s)] = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

Với :

$$h_{11}(s) = \left[\frac{r_{11,1}}{s - s_1} + \frac{r_{11,1}^*}{s - s_1^*} \right]_{\text{mode } 1} + \left[\frac{r_{11,2}}{s - s_2} + \frac{r_{11,2}^*}{s - s_2^*} \right]_{\text{mode } 2} \quad \text{hoặc} \quad (6.93)$$

$$h_{11}(s) = \left[\frac{\alpha_{11,1} + \beta_{11,1}s}{s^2 + 2\xi_1\omega_{n,1}s + \omega_{n,1}^2} \right]_{\text{mode } 1} + \left[\frac{\alpha_{11,2} + \beta_{11,2}s}{s^2 + 2\xi_2\omega_{n,2}s + \omega_{n,2}^2} \right]_{\text{mode } 2} \quad (6.94)$$

Các thành phần h_{il} trong ma trận hàm truyền thu được từ các phép đo thí nghiệm. Khi một kết cấu 2-DOF bị tác động bởi lực $\{F\} = \{F_1 \ F_2\}$ và dao động được đo tại điểm 1, ta có:

$$h_{11} = \frac{x_1}{F_1} \rightarrow F_2 = 0 \quad ; \quad h_{12} = \frac{x_1}{F_2} \rightarrow F_1 = 0 \quad (6.95)$$

Ví dụ 6.2: Một gia tốc kế được dán vào điểm 1 và búa đập vào điểm này, đo với thiết bị phân tích Fourier ta có h_{11} , đập vào điểm 2 và đo, ta có h_{12} . Dán tốc kế (accelerometer) vào điểm 2 và thực hiện va đập, ta có các thành phần của hàm truyền tương ứng h_{21} và h_{22} . Các thành phần này có mẫu số như nhau nhưng thăng dư (hoặc tử số) là khác nhau. Ma trận hàm truyền là đối xứng đối với một hệ tuyến tính (tức $h_{12}=h_{21}$). Các hàm truyền đo, được thiết bị phân tích lưu vào vùng tần số, dưới dạng thành phần thực và ảo tại từng tần số. Dữ liệu hàm truyền miền tần số đo được (h_{il}) được chuyển tới một máy tính (được trang bị các phần mềm phân tích dao động). Đối với một số dao động tự nhiên cho trước, hệ thống phân tích dao động quét dữ liệu hàm truyền cho vùng các biên độ cộng hưởng max. và tần số tương ứng, nơi thành phần thực của hàm truyền bằng 0. Các tần số này là các tần số tự nhiên của hệ thống. Khi đó hệ thống hợp đường đặc tuyến theo dữ liệu với mẫu số là một đa thức bậc ($2 \times n$). Nếu xử lý số tiếp tục, đường đặc tuyến hàm truyền sẽ khớp với các phương trình vi phân bậc hai, như thể hiện ở phương trình (6.95). Như vậy các giá trị số của tần số tự nhiên, giảm chấn và thăng dư cho từng dao động được dự đoán từ đường đặc tuyến này. Ở dạng tổng quát, thành phần ở hàng i và cột l của ma trận hàm truyền $[H(s)]$ được đo là:

$$h_{il} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{il,k} + \beta_{il,k}s}{s^2 + 2\xi_k \omega_{n,k}s + \omega_{n,k}^2} \quad (6.96)$$

Trong đó, $\omega_{n,k}$ là tần số tự nhiên dao động có giảm chấn, $\omega_{n,k}$ - tần số tự nhiên không giảm chấn và ξ_k - tỉ số giảm chấn cho dao động k của hệ thống. Đáp ứng tần số của kết cấu có thể thu được khi thay $s = j\omega$, ở đây tần số kích hoạt ω có thể được quét trong phạm vi bao phủ toàn bộ các tần số tự nhiên. Hàm truyền đầy đủ có thể biểu diễn ở dạng ma trận sau:

$$[H(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{[R]_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_{n,k}s + \omega_{n,k}^2} \quad (6.97)$$

Trong đó, mỗi thành phần trong ma trận kích thước $[n \times n]$, $[R_i] = [\alpha + \beta s]$ phản ánh thành phần của dao động k tại hàng i và cột l .

6.2. THIẾT KẾ VÀ PHÂN TÍCH CÁC HỆ THỐNG CNC

Sơ đồ một trung tâm gia công CNC đặc trưng được thể hiện ở hình 6.1. Trung tâm gia công bao gồm các thành phần cơ, điện tử công suất và các bộ phận CNC. Hệ cơ gồm :bệ, cột, tổ hợp trục chính và các cơ cấu chạy dao. Động cơ trục chính và trục chạy dao và các bộ khuếch đại servo, hệ cấp nguồn cao áp và các công tắc hành trình thuộc nhóm điện tử công suất. Phần điều khiển CNC bao gồm hệ máy tính và các cảm biến tốc độ và vị trí cho mỗi cơ cấu truyền động. Người vận hành nhập chương trình NC vào bộ CNC. CNC xử lý dữ liệu và cấp các điều khiển số (numerical) gián đoạn về định vị, điều khiển bộ truyền động chạy dao và tốc độ cho trục chính. CNC chuyển đổi các lệnh số thành các tín hiệu điện áp ($\pm 5V$ hoặc $\pm 10V$), truyền đến các bộ khuếch đại servo, ở đó chúng được xử lý và khuếch đại thành các mức điện áp lớn theo yêu cầu của động cơ. Khi bộ truyền động hoạt động, các cảm biến sẽ đo tốc độ và vị trí của chúng. Bộ CNC thực hiện quy luật điều khiển con số (digital) theo chu kỳ, giữ tốc độ chạy dao và đường chạy dao theo tốc độ được lập trình bằng việc sử dụng các cảm biến đo phản hồi.

Nguyên lý cơ bản thiết kế một hệ thống CNC thể hiện trong nội dung sau:

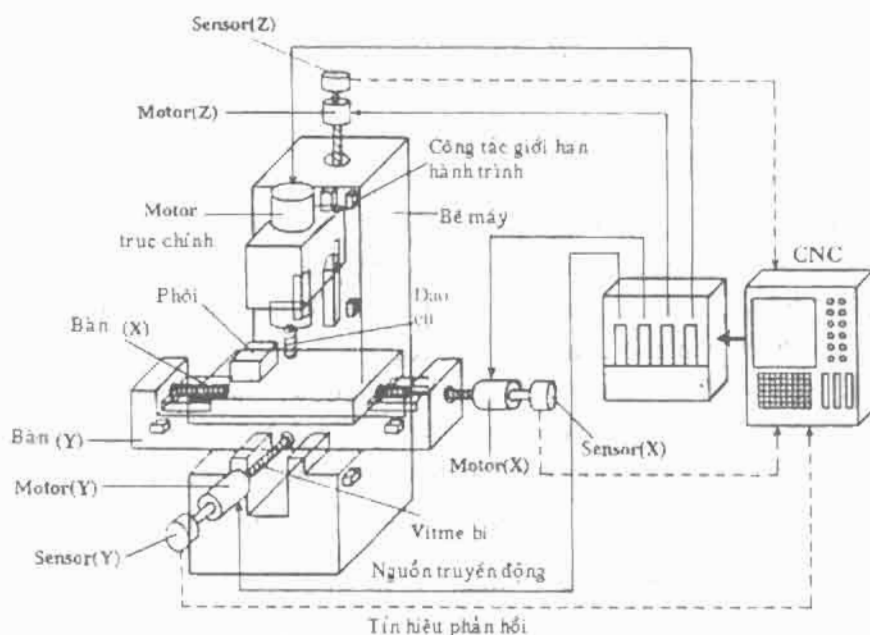
- Tính toán và chọn hệ truyền động.
- Cơ cấu vật lý và mô hình của hệ thống điều khiển động cơ servo.
- Mô hình toán học và phân tích hệ thống truyền động.

6.2.1. Hệ truyền động máy công cụ

Các hệ truyền động trong máy công cụ được phân loại theo cơ cấu truyền động trục chính hoặc cơ cấu truyền động trục chạy dao. Trục chính quay và thường có phạm vi tốc độ rộng (đến 35.000 vòng/phút), trong khi các bộ truyền động chạy dao thường chuyển đổi tốc độ góc của động cơ thành các chuyển động di chuyển thẳng, phạm vi tốc độ có thể tới đến 30.000mm/ phút. Trong phần này chỉ đề cập đến điều khiển chạy dao servo vì phân tích và thiết kế điều khiển servo chạy dao và trục chính là tương tự.

Đối với máy phay CNC 3 trục ở hình 6.13, hệ truyền động chạy dao có các thành phần cơ khí sau: bàn, trục vít me đai ốc-bi, bộ bánh răng giảm tốc và động cơ servo (xem hình 6.14) Vì ưu điểm có thể cấp mômen quay hiệu

quả tại những tốc độ khác nhau nên hầu hết động cơ servo được sử dụng trong bộ chạy dao là động cơ dòng một chiều (DC). Tuy nhiên động cơ servo dòng xoay chiều (AC) ngày nay cũng đã được sử dụng khá phổ thông nhờ đặc tính điều khiển đã được cải thiện. Các thành phần diện của hệ thống động cơ servo bao gồm: bộ khuếch đại động cơ servo, hệ cảm biến phản hồi vị trí và tốc độ, máy tính số (digital computer) và bộ chuyển đổi số- tương tự.



Hình 6.13: Sơ đồ khối cơ bản của máy phay 3 trục CNC

6.2.1.1. Thành phần cơ khí và các yêu cầu về mômen quay

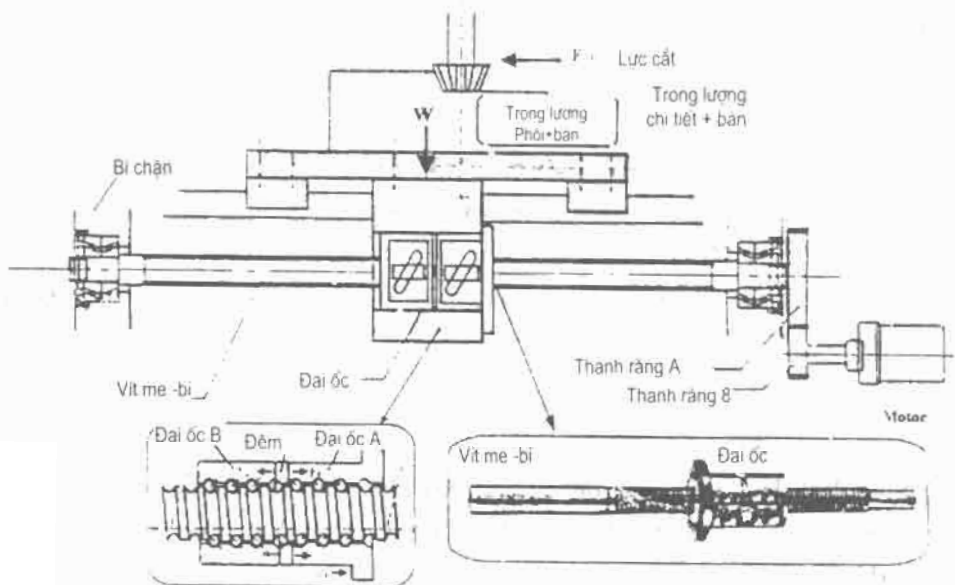
Động cơ chạy dao phải thắng được tải tĩnh và tải động trong máy công cụ. Nguồn của tải tĩnh là các tổn thất do ma sát gây nên trong các đường dẫn, gối đỡ và các lực cắt tác dụng theo hướng cắt của bàn máy. Động cơ phải cấp một mômen động đủ lớn để tăng tốc bàn- chi tiết gia công và hệ thống trục vítme bi trong một thời gian ngắn cho đến khi hệ truyền động đạt được tốc độ trạng thái ổn định mong muốn. Mômen động lực là mômen đỉnh (hoặc dòng đỉnh) có thể kéo dài trong 2-3 giây và được cấp bởi nhà sản xuất động cơ servo. Các động cơ trang bị cho máy CNC phải có phạm vi cấp mômen liên tục đủ cao và mômen đỉnh cũng như thời gian tăng tốc đủ để vượt qua được tải tĩnh và động tương ứng. Xác định tải tĩnh và tải động của động cơ được giới thiệu tóm tắt như sau:

Tải tĩnh (*static loads*), do 3 nguồn ; ma sát đường trượt, tổn hao do ma sát trong các gối ổ đỡ của hệ truyền động và các lực cắt.

Ma sát đường trượt phụ thuộc vào dạng tiếp xúc giữa bàn trượt và đường dẫn. Hệ số ma sát của đường trượt lớn khi các đường dẫn bôi trơn đơn giản, cổ bễ mặt tiếp xúc là kim loại - kim loại, vùng tiếp xúc lớn. Hệ số ma sát giảm nếu vùng bề mặt tiếp xúc kim loại giảm, đường trượt được bôi trơn thủy tĩnh và thủy động. Hệ số ma sát nhỏ nhất trong thiết kế đường dẫn là sử dụng các bi lăn trong rãnh lắp ráp bàn- đường dẫn (hình 6.14). Mômen thể hiện lên động cơ do ma sát (T_{sj}) trong các đường trượt, được ước lượng là:

$$T_{sj} = \frac{h_p}{2\pi} \mu_{sj} [(m_t + m_n)g + F_z] \quad (6.98)$$

Với μ_{sj} là hệ số ma sát trên đường trượt, m_t - khối lượng bàn máy, m_n - khối lượng phối gia công, F_z - lực cắt vuông góc với bàn máy, h_p là -chiều dài bước của trục vít và g - gia tốc trọng trường ($9,81\text{m/s}^2$). Hệ số ma sát đối với đường trượt phẳng thường lấy từ 0,05÷1, lực cắt F_z có thể lấy bằng 10% lực cắt tổng lớn nhất ở máy phay đứng điển hình [5].



Hình 6.14: Cơ cấu truyền động chạy dao dùng vít me bi

Ổ chặn được sử dụng tại hai đầu mút trục vít để hấp thụ các lực ăn đạo.

đồng thời đảm bảo độ chính xác hướng tâm cho trục vít. Các ổ chặn được gia tải căng trước để bù khe hở sinh ra bởi giãn nở nhiệt của trục vít, do ma sát của hệ dẫn động chạy dao. Khi cắt, các ổ chặn trục còn phải chịu tải do lực ăn dao. Các lực ăn dao được xác định bởi các thông số cắt và vật liệu cắt trong các tài liệu "cắt kim loại" "sổ tay công nghệ" [13,14]. Mất mát momen trong các gối đỡ và tải đặt trước được tính:

$$T_{\text{đ}} = \frac{d_b}{2} \mu_b (F_f + F_p) \quad (6.99)$$

Với μ_b là hệ số ma sát gối đỡ (thường khoảng 0,005), d_b là đường kính trục vít, F_f là lực chạy dao lớn nhất đặt lên bàn và F_p là lực đặt trước. Mômen tác động lên trục vít do lực cắt theo hướng ăn dao là:

$$T_f = \frac{h_p}{2\pi} F_t \quad (6.100)$$

Mômen tĩnh tổng tác động lên trục vít (T_s) bằng tổng của các mômen (6.98), (6.99), (6.100):

$$T_s = T_{\text{đ}} + T_{\text{đ}} + T_f \quad (6.101)$$

Trong trường hợp tải tĩnh T_s quá lớn, ta có thể sử dụng truyền động bánh răng giữa trục động cơ và trục vít để giảm truyền tải, Tỷ số truyền, r_s được xác định bởi:

$$r_s = \frac{Z_1}{Z_m} = \frac{n_m}{n_1} \quad (6.102)$$

Với Z_m - số răng của bánh răng trục động cơ, Z_1 - số răng của bánh răng trên trục vít, n_m -tốc độ góc động cơ (vòng/phút) và n_1 - tốc độ góc của trục vít chạy dao (vòng/phút).

Để giảm tốc tại động cơ ta cần có $Z_1 > Z_m$ (tức $r_s > 1$), khi đó tải tác động lên trục động cơ là:

$$T_{\text{đ}} = \frac{T_s}{r_s} \quad (6.103)$$

Người thiết kế máy CNC phải chọn một động cơ DC có khả năng cung cấp mômen liên tục cao hơn tải tĩnh tác động lên trục động cơ.

Tải động:

Máy công cụ yêu cầu mômen gia tốc cao khi có sự thay đổi tốc độ. Quán tính tác động lên trục động cơ bao gồm quán tính của bàn, phối gia công, trục vít, các bánh răng và trục động cơ. Moment quán tính của bàn và

phôi tác động lên trục vít là:

$$J_{nv} = (m_l + m_w) \left(\frac{h_p}{2\pi} \right)^2 \quad (6.104)$$

Mômen quán tính của trục vít với đường kính trục d_p là :

$$J_l = \frac{1}{2} m_l \left(\frac{d_p}{2\pi} \right)^2 \quad (6.105)$$

Với m_l - trọng lượng của trục vít. Quán tính tổng phản ánh lên trục của động cơ là:

$$J_t = \frac{J_{nv} + J_l}{r_g^2} + j_m \quad (6.106)$$

J_m là quán tính của trục động cơ , $r_g \geq 1$ tỉ số truyền tốc độ giữa động cơ và trục vít.

Còn có một mômen ma sát tỉ lệ với tốc độ trong hệ thống truyền động là momen ma sát nhớt. Mômen động cần thiết để gia tốc cho quán tính J_t và thắng ma sát nhớt và các tải tĩnh là:

$$T_d = J_t \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_{st} \quad (6.107)$$

Ở đây, ω là vận tốc góc của động cơ và B là hệ số ma sát nhớt. Chú ý, nếu cắt với bước tiến nhỏ, thì không cần xét tác động của các lực cắt (T_f) vào tải tĩnh (T_s) trong phương trình (6.106). Giá trị mômen đỉnh do động cơ cấp phải lớn hơn mômen động tính được từ (6.106). Nếu có giảm truyền động giữa trục động cơ và trục vít, mômen động tác động lên trục động cơ sẽ được giảm theo công thức (1.105) và (6.106).

Ví dụ 6.3 : một máy phay đứng được trang bị với 3 động cơ servo DC tương tự nhau. Do tải trọng lớn nhất tác động lên trục ngang nên các động cơ được lựa chọn phù hợp theo mômen yêu cầu của trục này. Những tham số sau là dành cho trục truyền động chạy dao:

$m_l=180\text{kg}$ -khối lượng bàn

$m_w=200\text{kg}$ - khối lượng phôi lớn nhất

$m_l=8,15\text{kg}$ - khối lượng trục vít

$h_p=0,00508\text{m/vòng}$ - bước của trục vít

$d_p=0,0445\text{m}$ - đường kính trục vít

$J_m = 2,373 \times 10^{-3} \text{kgm}^2$ - quán tính trục động cơ

$r_g = 1$ - tỉ số số truyền

$\mu_g = 0,1$ - hệ số ma sát trên các đường trượt

$\mu_b = 0,005$ - hệ số ma sát của ổ đỡ

$B = 0,0 \text{ Nm/(rad/s)}$ - hệ số giảm chấn do nhớt

$F_z = 2000 \text{ N}$ lực cắt lớn nhất theo chiều Z (vuông góc với mặt bàn)

$F_r = 8000 \text{ N}$ - lực ăn dao lớn nhất

$F_p = 5000 \text{ N}$ lực gia tải trong gối chặn

$f = 0,170 \text{ m/s}$ - tốc độ dịch chuyển lớn nhất

$t_r = 0,1 \text{ s}$ -thời gian tăng tốc servo

Tính toán:

Tải tĩnh: Tải tĩnh tạo bởi các ma sát trong đường dẫn, theo (6.98) là:

$$T_{gt} = 0,1 \frac{0,00508}{2\pi} [(180 + 200)9,81 + 2000] = 0,4631 \text{ Nm}$$

Mất mát mômen trong các gối do ma sát theo (6.99) là:

$$T_{gt} = 0,005 \frac{0,0445}{2} (5000 + 8000) = 1,4463 \text{ Nm}$$

Mômen yêu cầu để vượt qua lực ăn dao theo(6.100) là:

$$T_l = \frac{0,00508}{2\pi} 8000 = 6,4680 \text{ Nm}$$

Mômen tổng hợp liên tục, yêu cầu cho động cơ (công thức 6.103) là:

$$T_{\Sigma} = \frac{0,4631 + 1,4463 + 6,4680}{1,0} = 8,3874 \text{ Nm}$$

Tải động: mômen quán tính của bàn và phối tác động lên trục vít theo(6.104) là:

$$J_m = (180 + 200) \left(\frac{0,00508}{2\pi} \right)^2 = 2,484 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Quán tính của trục vít theo (6.105) là:

$$J_t = \frac{1}{2} 8,15 \left(\frac{0,0445}{2} \right)^2 = 20,174 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Động cơ nối trực tiếp vào trục vít (tức $r_g = 1$), mômen quán tính tổng

tác động lên trục động cơ (6.106) là:

$$J_c = 2,484 \times 10^{-4} + 20,174 \times 10^{-4} + 2,373 \times 10^{-3} = 4,64 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Gia tốc chạy thẳng của bàn trượt được tính bằng cách chia tốc độ chạy dao nhanh với thời gian tăng tốc của động cơ:

$$\alpha_t = \frac{0,170}{0,1} = 1,70 \text{ m/s}^2$$

Gia tốc góc của trục động cơ là:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha_t}{(h_p / 2\pi)} \frac{0,17}{0,00508} 2\pi = 2103 \text{ rad/s}^2$$

Mômen động yêu cầu theo (6.107) là:

$$T_d = 4,64 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2 \times 2103 \text{ rad/s}^2 + (8,3874 - 6,468) \text{ Nm} = 11,6773 \text{ Nm}$$

Như vậy, động cơ servo được chọn, phải có thể giữ mômen động 11,6773 Nm ít nhất trong khoảng thời gian 0,1s.

6.2.1.2. Các dụng cụ phản hồi

Có hai dụng cụ phản hồi cơ bản trong hệ thống điều khiển truyền động chạy dao: các cảm biến phản hồi tốc độ và vị trí. Thường máy đo tốc độ góc (tachometer) được sử dụng làm cảm biến tốc độ và bộ encoder được sử dụng làm cảm biến phản hồi vị trí.

Máy đo tốc độ góc (Tachometer)

Tachometer là một động cơ nam châm vĩnh cửu DC nhỏ, được lắp trực tiếp ở phía sau trục động cơ servo. Tachometer tạo một điện áp tỉ lệ thuận với tốc độ thực của trục động cơ. Nó có một hằng số tốc độ được đặt bởi nhà sản xuất và một hệ số khuếch đại cho phép điều chỉnh vòng phản hồi tốc độ. Hàm truyền giữa tốc độ thực của động cơ và đầu ra mạch tachometer được cho bởi:

$$\frac{V_t(s)}{\omega(s)} = T_g H_g \quad (6.108)$$

Trong đó $V_t(s)$ là điện áp đầu ra của mạch tachometer, $\omega(s)$ là tốc độ góc thực của trục động cơ, H_g là hằng số tachometer, T_g là hệ số phóng đại có thể điều chỉnh và s là toán tử Laplace.

Encoder

Encoder được sử dụng làm cảm biến đo vị trí số trong truyền động servo.

Encoder dựa trên nguyên lý phát ánh sáng của diot quang (photodiode). Encoder có thể ở dạng đĩa hoặc thước thẳng, chứa các băng tối và trong suốt. Ánh sáng được phát từ diot quang từ một phía sang được phía bên kia chỉ ở băng trong suốt. Cảm biến quang nhận và phát một tín hiệu logic (mã nhị phân, tùy thuộc vào số lượng các băng tối và trong suốt được phát hiện ở các vị trí giá số của encoder). Các encoder thẳng được sử dụng để đo vị trí thực của bàn máy còn encoder dạng đĩa thường được sử dụng để đo vị trí góc của trục động cơ. Trong gia công chính xác encoder thẳng thường được dùng đo khả năng đo chính xác hơn vị trí thực của bàn máy. Tuy nhiên, nếu có khe hở trong hệ thống truyền động chạy dao, bàn -lắp với encoder thẳng có thể tạo chu trình *giới hạn (limit cycle)* trong servo điều khiển vị trí. Vì các encoder đĩa lắp trực tiếp lên trục động cơ, nó không cảm nhận rơ do vậy không sinh ra chu trình giới hạn không tuyến tính này. Các nhà sản xuất động cơ servo thường cung cấp tachometer và các encoder lắp ở phía sau trục động cơ ngay từ nơi sản xuất. Encoder được cung cấp với *mật độ đường vạch (line density)* và kiểu của bộ giải mã. Ví dụ một encoder với mật độ 1000 vạch và mạch giải mã cầu phương sẽ sinh 4.000 xung qua một vòng quay của trục. Trong phân tích mạch phản hồi điều khiển vị trí, encoder được thể hiện qua hệ số K_e (nhịp/rad hoặc nhịp/mm).

Ví dụ 6.4: Một encoder 1000 line với bộ giải mã cầu phương sử dụng làm cảm biến phản hồi vị trí trong một hệ thống điều khiển truyền động chạy dao. Động cơ được nối trực tiếp với trục vít, có bước 5.08mm. Hệ số encoder được tính như sau:

$$K_e = \frac{4 \times 1000}{2\pi} (\text{count} / \text{rad}), \text{ hoặc}$$

$$K_e = \frac{5,08}{4000} = 0,00127 \text{mm}(0,00005 \text{in}) / \text{count}$$

Như vậy một tín hiệu đếm (count) do encoder gửi tương ứng với 0,00127mm chuyển động thẳng của bàn. *Count* được sử dụng tương ứng với đơn vị chiều dài cơ sở của hệ thống servo điều khiển vị trí.

6.2.1.3. Thiết bị truyền động điện

Truyền động chạy dao có thể được cấp năng lượng bởi một trong các loại động cơ điện (bước, DC hoặc AC) hoặc động cơ thủy lực. Việc sử dụng động cơ phụ thuộc vào khả năng cấp moment và các yêu cầu đáp ứng thời

gian của hệ truyền động của máy công cụ hoặc của robot.

Động cơ thủy lực được sử dụng khi hệ thống truyền động yêu cầu dải mômen rộng và đáp ứng nhanh. Động cơ thủy lực quay tròn (rotary hydraulic motor) thường được sử dụng trong các máy phay, tiện và robot công nghiệp hạng nặng. Các động cơ thủy lực chuyển động thẳng (linear hydraulic motor) với các hệ thống chuyển dịch piston được sử dụng cho máy mài, máy bào và máy ép do có yêu cầu chuyển động qua lại. Nhược điểm của động cơ thủy lực là hiệu suất thấp, có khả năng rò rỉ dầu, nhạy cảm đối với dầu bẩn và giá bảo dưỡng cao.

Động cơ bước không được sử dụng trong hệ truyền động ăn dao có lực cắt cao. Chúng thường được sử dụng không có thiết bị phản hồi. Động cơ bước được điều khiển với các chuyển động bước góc, các bước này được gửi theo dạng xung điều khiển từ một máy tính. Ở thời điểm khởi động và hãm, khi mômen động yêu cầu lớn, động cơ bước có thể bỏ qua một số xung điều khiển vị trí. Vì không có thiết bị phản hồi nên loại động cơ này có thể không đảm bảo được độ chính xác gia công. Thường động cơ bước chỉ được sử dụng cho các máy CNC hạng nhẹ dùng để học tập hoặc các thiết bị vận chuyển vật liệu.

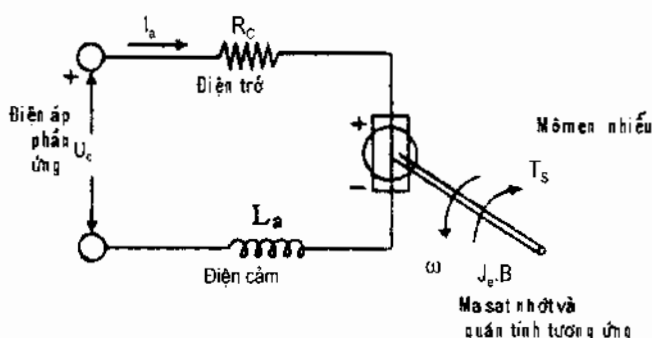
Động cơ xoay chiều AC thường được sử dụng trong máy CNC. Tốc độ của động cơ AC được điều khiển khi thay đổi tần số điện áp nguồn cấp. Vấn đề cơ bản là thiết kế các bộ biến đổi điện (inverter) giá thấp để thay đổi tần số nguồn cấp. Ngày nay công nghệ vi xử lý đã tạo khả năng tính toán các tần số được sử dụng trong inverter.

Động cơ thường dùng nhất trong máy CNC là động cơ DC vì chúng cho phép tốc độ hoạt động trong phạm vi rộng với mômen đủ lớn theo yêu cầu của máy công cụ và các robot.

Sự phân tích và quá trình mô hình hoá động cơ AC và DC là tương tự nhau. Sau đây là những phân tích về động cơ DC để cung cấp kiến thức về điều khiển động cơ.

6.2.1.4. Động cơ DC nam châm vĩnh cửu, điều khiển phản ứng

Sơ đồ điện của động cơ DC nam châm vĩnh cửu được thể hiện ở hình 6.15. Tốc độ của động cơ được điều khiển bởi điện áp cấp U_c cho phản ứng (rôto) của động cơ, đến lượt phản ứng tạo ra một trường từ giữa rôto và stato (chú ý, dòng ở phản ứng không thể vượt khả năng cấp dòng max. của hệ



Hình 6.15: Sơ đồ điện của động cơ DC

khuếch đại công suất). Giới hạn dòng được xem là không tuyến tính trong hệ điều khiển động cơ DC vì lúc tăng tốc hoặc hãm động cơ sẽ có dòng đỉnh, xuất hiện trong một thời gian cực ngắn. Dòng đỉnh và thời gian kéo dài nó được cho bởi các nhà sản xuất.

Trong một động cơ DC điều khiển phản ứng, thông lượng từ là bất biến trong khi điện áp phản ứng thay đổi. Trường từ sinh ra một mômen, được sử dụng để quay rotor nối với trục của động cơ. Trong động cơ DC sinh ra trong mạch roto một suất điện động ngược (back e.m.v.), U_b tỷ lệ với tốc độ của roto.

Những phương trình động học cơ bản sau chỉ phối chuyển động của động cơ dc.

Điện áp đặt vào phản ứng U_a , áp dụng luật Kirchoff vào mạch động cơ, ta có:

$$U_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + K_b \omega(t) \quad (6.109)$$

Trong đó: $\omega(\text{rad/s})$ là tốc độ góc; $I_a(\text{A})$ là dòng phản ứng; $R_a(\Omega)$ là trở phản ứng; $L_a(\text{H})$ là cảm phản ứng, $K_b(\text{V}/(\text{rad/s}))$ là hằng điện áp của động cơ và $t(\text{s})$ là thời gian.

Trường từ sinh ra một mômen động cơ hữu ích T_m , tỉ lệ thuận với dòng phản ứng, I_a :

$$T_m(t) = K_t I_a(t) \quad (6.110)$$

Mômen hữu ích được tạo bởi động cơ, dùng để tăng tốc quán tính trục, thắng ma sát trong các gối đỡ và các đường trượt, đối kháng với các lực cắt và các tải ma sát tác động như mômen lật lên trục động cơ, như vậy:

$$T_m(t) = J_e \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + T_s(t) \quad (6.111)$$

Trong đó J_e mômen quán tính trục động cơ, B là ma sát tương đương (ma sát nhớt) và T_s là mômen lật tĩnh trên trục động cơ.



Lưu ý, mômen lật bao gồm thành phần ma sát và cắt. Mômen ma sát khô (ma sát Coulomb) đối kháng với tốc độ (ω). Hướng của tốc độ được xét trong biểu đồ khối (hình 6.16) sử dụng hàm sign là sgn . Trong phương trình (6.111), ma sát nhớt được cho là tỉ lệ với tốc độ. Tác động của mômen ma sát nhớt phụ thuộc vào kiểu đường trượt của máy công cụ, tỉ lệ tuyến tính với tốc độ và hằng số tỉ lệ B .

Sử dụng biến đổi Laplace công thức (6.109), (6.110) và (6.111) cho:

$$\begin{aligned} I_a(s) &= \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{L_a s + R_a} \\ T_m(s) &= K_t I_a(s) \\ \omega(s) &= \frac{T_m(s) - T_s(s)}{J_r s + B} \end{aligned} \quad (6.112)$$

Các công thức này có các diễn giải vật lí. Hàm truyền của dòng ứng nhận điện áp sai lệch làm đầu vào. Điện áp sai lệch là chênh lệch giữa điện áp chuẩn cấp cho phản ứng U_a và suất điện động ngược (back e.m.v) tác dụng như một tín hiệu phản hồi). Dòng điện tổng hợp tạo nên mômen hữu ích $T_m(s)$. Một phần của mômen này được sử dụng để thắng mômen lật $T_s(s)$, phần còn lại để tăng tốc quán tính và vượt qua mômen ma sát nhớt. Hai tham số thiết kế quan trọng là:

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{L_a}{R_a} \\ \tau_m &= \frac{J_r}{B} \end{aligned} \quad (6.113)$$

Ở đây, τ_m là hằng số thời gian cơ học và τ_e là hằng số thời gian điện học của động cơ. Cả hai hệ số này được nhà sản xuất cấp trên cơ sở chỉ xem xét quán tính của trục động cơ và ma sát trong gối trục động cơ. Hệ số thời gian cơ của động cơ DC sẽ tăng đáng kể khi xét đến cả quán tính của bàn và hệ lắp ráp trục vít-bi.

Mạch khuếch đại công suất động cơ DC và vòng điều khiển tốc độ

Điện áp phản ứng được cấp bởi một mạch khuếch đại công suất. Mạch khuếch đại công suất nhận một điện áp DC lớn, giá trị không đổi từ một máy biến thế, nơi chuyển điện áp đường AC thành điện áp DC mức yêu cầu. Mạch khuếch đại công suất trong đồ thị khối của vòng phản hồi tốc độ được thể hiện ở hình 6.16 là một mạch điều biến chiều rộng xung (PWM)- mạch

khuyến đại điều khiển dòng. Mạch khuếch đại công suất nhận tín hiệu điều khiển tốc độ U_1 từ đầu ra bộ chuyển đổi số-tương tự của bộ điều khiển số. Trước hết U_1 được lưu lại mạch tiền khuếch đại vi sai, với hệ số khuếch đại khả điều chỉnh, S_g . Đầu ra $S_g U_1$ được so với tín hiệu tốc độ thực, đo bởi hệ phản hồi đo vận tốc vòng (tachometer). Tín hiệu sai lệch tốc độ tổng (theo vận) được mạch khuếch đại dòng (có hệ số khuếch đại K_I) chuyển thành dòng yêu cầu. Đa số các mạch khuếch đại dòng sử dụng tín hiệu phản hồi dòng ứng để cải thiện sự đáp ứng động lực của động cơ. Tín hiệu dòng điện phản hồi được kéo từ bộ nối cảm nhận (sense coupler) nhận được so với dòng yêu cầu. Mạch điều biến độ rộng xung (PWM) sinh ra một điện áp DC thay đổi theo dạng răng cưa tại tần số nhất định. Tần số của PWM thường khoảng 10KHz. Tín hiệu sai lệch dòng được điều biến bởi mạch PWM, với hệ số điều biến K_V . Kết quả, điện áp kết quả DC trở thành dạng ON-OFF, sóng vuông. Mức điện áp trung bình của dạng sóng (giá trị DC) được sử dụng làm điện áp phản ứng U_a trong tính toán. Sơ đồ khối toàn bộ của mạch khuếch đại, động cơ và hệ phản hồi tachometer được thể hiện ở hình 5.16a.

Sơ đồ khối được thể hiện với các biến trạng thái nhất thời để minh họa sự bắt nguồn hàm truyền vòng phản hồi tốc độ. Các mối quan hệ sau có thể biểu diễn từ sơ đồ khối sử dụng các trạng thái nhất thời U_1 , U_2 , và U_3 :

$$U_1(s) = S_g U_i(s) - T_g H_g \omega(s) \quad (6.114)$$

$$\begin{aligned} U_2(s) &= K_{int} U_1(s) - K_a I_a(s) \\ &= K_I S_g V_i(s) - K_I T_g H_g \omega(s) - K_a I_a(s) \end{aligned} \quad (6.115)$$

$$\begin{aligned} U_3(s) &= K_V U_2(s) - K_b \omega(s) \\ &= K_V K_I S_g U_i(s) - (K_V K_I T_g H_g + K_b) \omega(s) - K_V K_a I_a(s) \end{aligned} \quad (6.116)$$

Hàm truyền giữa dòng và trạng thái U_3 là:

$$I_a(s) = \frac{U_3(s)}{L_a s + R_a} \quad (6.117)$$

Thay giá trị U_3 vào biểu thức dòng, ta có:

$$I_a(s) = \frac{K_V K_I S_g}{L_a s + R_a + K_V K_a} V_i(s) - \frac{K_V K_I T_g H_g + K_b}{L_a s + R_a + K_V K_a} \omega(s) \quad (6.118)$$

Hàm truyền cơ học của động cơ theo (6.112) là:

$$\omega(s) = \frac{T_m(s) - T_L(s)}{J_e s + B} \quad (6.119)$$

Hoặc:

$$\omega(s) = \frac{K_t}{J_e s + B} I_a(s) - \frac{1}{J_e s + B} T_s(s) \quad (6.120)$$

Thay biểu thức của dòng điện (6.118) vào (6.120), hàm truyền giữa tốc độ đầu ra- ω , điện áp đầu vào - U_c và mômen lật - T_s là:

$$\omega(s) = \frac{K_1}{s^2 + K_2 s + K_3} U_c(s) - \frac{(1/J_e)\{s + (R_a + K_v K_a)/L_a\}}{s^2 + K_2 s + K_3} T_s(s) \quad (6.121)$$

Trong đó:

$$K_1 = \frac{K_t S_g K_t K_{tt}}{L_a J_e} \quad (6.122)$$

$$K_2 = \frac{B}{J_e} + \frac{R_a + K_v K_a}{L_a} \quad (6.123)$$

$$K_3 = \frac{B(R_a + K_v K_a) + K_t(K_b + H_g T_g K_v K_t)}{J_e L_a} \quad (6.124)$$

Bộ điều khiển tốc độ servo truyền động ăn dao được thiết kế để có thời gian tăng tốc nhanh với lượng quá điều chỉnh 0 (zero overshoot) tại các thay đổi tốc độ theo dạng bậc. Phân tích vòng phản hồi tốc độ như là hàm của điện áp đầu vào điều khiển tốc độ $-U_c$, hàm truyền, phương trình (6.121) có thể được biểu diễn như:

$$\frac{\omega(s)}{U_c(s)} = \frac{K_1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.125)$$

Ở đây tần số tự nhiên ω_n và hệ số giảm chấn ξ của vòng tốc độ được định nghĩa là:

$$\omega_n = \sqrt{K_3} \text{ [rad/s]} \quad (6.126)$$

$$\xi = \frac{K_2}{2\sqrt{K_3}} < 1 \quad (6.127)$$

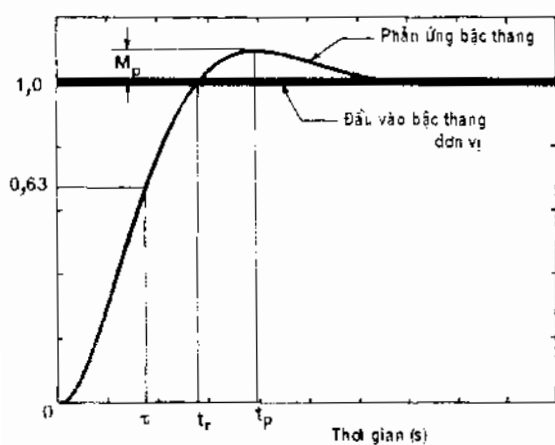
Trong đó $K_1, K_2 > 0$. Đáp ứng bậc thang miền thời gian của servo tốc độ giảm chấn yếu (underdamped velocity servo) được thể hiện là:

$$\omega(t) = U_c \frac{K_1}{K_3} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi) \right] \quad (6.128)$$

Ở đây, tần số tự nhiên giảm chấn ω_d và chuyển dịch pha ϕ được xác định:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.129)$$

$$\phi = \tan^{-1} \omega_n \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \quad (6.130)$$



Hình 6.17: Đáp ứng bước nhảy của hệ thống không giảm chấn bậc hai (τ - hằng thời gian, t_p - thời gian đỉnh, t_r - thời gian tăng tốc, M_p - lượng quá điều chỉnh) gian của phương trình (6.128):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (6.131)$$

Các giá trị thiết kế đặc trưng cho động cơ servo chạy dao là tỉ số giảm chấn $\xi=0,707$ và thời gian đỉnh $t_p=10\text{ms}$. Tần số tự nhiên ω_n có thể xác định từ công thức (6.131) như sau:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}} = 554 \text{ rad/s} = 88 \text{ Hz} \quad (6.132)$$

Các tham số servo tương ứng được xác định khi thay giá trị ξ và ω_n vào công thức (6.126, 6.127).

6.2.1.5. Vòng điều khiển vị trí (position control loop)

Vòng điều khiển vị trí bao gồm một mạch đếm hai chiều (up- down counter), một encoder, một phin lọc bù số (digital compensation filter) và một mạch chuyển đổi số- tương tự (digital to analog converter).

Các hệ số biến thiên của mạch khuếch đại (tức S_v, T_v, K_f, K_v) được điều chỉnh để có hệ số khuếch đại vòng tốc độ yêu cầu và các đặc tính đáp ứng bậc thang như hình 6.17. Khi đầu vào mạch khuếch đại là bậc đơn vị (tức $U_i=1$), đáp ứng max. của vòng tốc độ xảy ra tại thời gian t_p , lúc đạo hàm tốc độ bằng 0 ($d\omega_n(t)/dt=0$). Tại lần vượt mức đầu tiên, có thể thu được biểu thức sau từ đạo hàm thời

Mạch đếm hai chiều (up- down counter)

Thanh ghi đếm hai chiều nhận số đếm (counts) điều khiển và vị trí đo được. Điều khiển định vị gia tăng trong khi encoder phản hồi các số đếm, giảm dần lượng trong mạch đếm hai chiều. Nội dung tức thời của bộ đếm thể hiện sai lệch vị trí tích lũy trong khoảng thời gian T điều khiển servo số. Biểu diễn sơ đồ khối của mạch đếm hai chiều là:

$$\frac{X_u(s)}{\omega(s)} = \frac{K_c}{s} \quad (6.133)$$

Mạch lọc bù số (digital compensation filter)

Nội dung của mạch đếm hai chiều và sai lệch vị trí được lấy mẫu cứ sau T giây. Sai lệch vị trí riêng biệt $E(k)$ là chênh lệch giữa vị trí chuẩn và vị trí hiện thời của bàn: $E(k) = X_i(k) - X_d(k)$, trong đó: $X_i(k)$ - vị trí tham chiếu riêng biệt, $X_d(k)$ - vị trí hiện thời và z - toán tử dịch chuyển thuận thời gian gián đoạn.

Sai lệch từ bộ lọc số, có hàm truyền đặc trưng dạng:

$$D(z) = K_p \frac{z+a}{z+b} \quad (6.134)$$

Với K_p là hệ số khuếch đại của mạch lọc điều khiển vị trí, a là 0 của mạch lọc, b là cực của mạch lọc.

Mạch lọc số là khả trình và nằm trong máy tính điều khiển chuyển động servo. Các tham số lọc được điều chỉnh để cấp một đáp ứng quá độ theo yêu cầu của hệ thống điều khiển vị trí.

Bộ chuyển đổi số - tương tự (Digital to Analog (D/A) converter)

Máy tính điều khiển dịch chuyển, gửi tín hiệu đầu ra mạch lọc số đến mạch chuyển đổi D/A của máy tính. Bộ chuyển đổi D/A được mô hình hoá như là một mạch giữ bậc 0 (ZOH) và mạch hệ số khuếch đại K_d . Hệ số khuếch đại của D/A được xác định:

$$K_d = \frac{\text{Vùng điện áp của Chip D/A}}{2^{nb}} \quad (6.135)$$

Trong đó, nb là số bit chip được D/A dùng trong chuyển đổi một số nhị phân sang điện áp tương tự. Ví dụ, một chip chuyển đổi D/A 12 bit với vùng điện áp $\pm 10V$ có hệ số K_d bằng:

$$K_d = \frac{20V}{2^{12}} = 0,00488(V / count)$$

6.2.2. Hàm truyền của vòng (loop) vị trí

Sơ đồ khối của toàn hệ thống điều khiển vị trí có thể sắp xếp như hình 6.16. Hệ thống có các thành phần liên tục và gián đoạn. Phần liên tục của hàm truyền hệ thống được thể hiện trong miền Laplace là:

$$G_c(s) = \frac{K_1}{s^2 + K_2s + K_3} \frac{K_e}{s} \quad (6.136)$$

Tín hiệu điều khiển tốc độ U_c của bộ điều khiển chuyển động số (digital motion control unit) được đặt vào mạch khuếch đại công suất tại các khoảng thời gian T theo đường qua bộ chuyển đổi D/A với hệ số khuếch đại K_d . Đường lượng duy trì bậc zero - $G_c(s)$ cho thời gian lấy mẫu một miligiây là:

$$G_c(z) = K_d(1 - z^{-1})z \left[\frac{G_c(s)}{s} \right] \quad (6.137)$$

Công thức này sau khi chuyển đổi z trở thành:

$$G_c(z) = \frac{K_d K_1 K_e}{K_3} \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{(z-1)(z^2 + a_1 z + a_0)} \quad (6.138)$$

Với $z = e^{sT}$. Biểu thức xác định các tham số của $G_c(z)$, là:

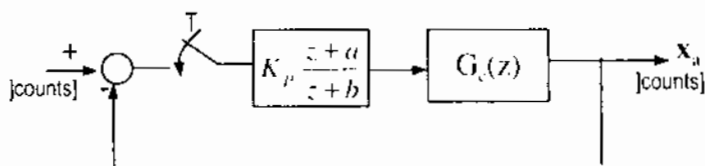
$$b_2 = T - \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n T} \sin(\omega_d T) - \frac{K_2}{K_3} \left\{ 1 - e^{-\xi \omega_n T} \left[\frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d T) + \cos(\omega_d T) \right] \right\} \quad (6.139)$$

$$b_1 = 2e^{-\xi \omega_n T} \left[\frac{\sin(\omega_d T)}{\omega_d} - T \cos(\omega_d T) \right] + \frac{K_2}{K_3} (1 - e^{-2\xi \omega_n T}) - 2e^{-\xi \omega_n T} \sin(\omega_d T) \frac{K_2}{K_3} \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \quad (6.140)$$

$$b_0 = T e^{-2\xi \omega_n T} - \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n T} \sin(\omega_d T) + \frac{K_2}{K_3} \left\{ e^{-2\xi \omega_n T} + e^{-\xi \omega_n T} \left[\frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d T) - \cos(\omega_d T) \right] \right\} \quad (6.141)$$

$$a_1 = -2e^{-\xi \omega_n T} \cos(\omega_d T) \quad (6.142)$$

$$a_0 = -e^{-2\xi \omega_n T}$$



Sơ đồ khối đơn
giản hoá tương
đương hệ thống

Hình 6.18 vòng điều khiển vị trí thời gian gián đoạn

điều khiển vị trí gián đoạn được thể hiện ở hình 6.18 Hàm truyền của vòng lặp kín của hệ thống điều khiển truyền động chạy dao là:

$$G_{cl}(z) = \frac{X_d(k)}{X_k(z)} = \frac{D(z)G_c(z)}{1 + D(z)G_c(z)} \quad (6.143)$$

Hoặc:

$$G_{cl}(z) = K_{cl} \frac{z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (6.144)$$

Các tham số của hàm truyền vòng lặp đóng, $G_{cl}(z)$ sẽ là:

$$\beta_2 = \frac{b_1 + ab_2}{b_2} \quad (6.145)$$

$$\beta_1 = \frac{b_0 + ab_1}{b_2} \quad (6.146)$$

$$\beta_0 = \frac{ab_0}{b_2} \quad (6.147)$$

$$\alpha_3 = \frac{K_1 K_c K_d K_p}{K_3} b_2 + b + a_1 - 1 \quad (6.148)$$

$$\alpha_2 = \frac{K_1 K_c K_d K_p}{K_3} (b_1 + ab_2) + b(a_1 - 1) + a_0 - a_1 \quad (6.149)$$

$$\alpha_1 = \frac{K_1 K_c K_d K_p}{K_3} (b_0 + ab_1) + b(a_0 - a_1) - a_0 \quad (6.150)$$

$$\alpha_0 = \frac{K_1 K_c K_d K_p}{K_3} ab_0 - ba_0 \quad (6.151)$$

$$K_{cl} = \frac{K_1 K_c K_d K_p b_2}{K_3} \quad (6.152)$$

Hàm truyền (công thức 6.144) có thể được biểu diễn khi sử dụng toán tử dịch chuyển thời gian ngược z^{-1} bằng nhân cả tử và mẫu với z^4 , như vậy:

$$G_{cl}(z^{-1}) = K_{cl} \frac{z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_1 z^{-3} + \beta_0 z^{-4}}{1 + \alpha_3 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-3} + \alpha_0 z^{-4}} \quad (5.153)$$

Với z^{-1} là toán tử dịch chuyển ngược thời gian, tác động lên các tín hiệu gián đoạn theo:

$$z^{-1}x(kT) = x[(k-1)T] \quad (6.154)$$

Trong đó: T là khoảng thời gian lấy mẫu gián đoạn, $x(kT)$ là các giá trị gián đoạn của x tại thời gian lấy mẫu k .

Với mọi tín hiệu đầu vào thời gian rời rạc $X_r(kT)$ cho trước, đáp ứng vị trí $X_u(kT)$ tìm được khi sắp xếp lại hàm truyền $G_{cl}(z^{-1})$ là:

$$X_u(k) = -(\alpha_3 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-3} + \alpha_0 z^{-4}) X_r(z^{-1}) + K_{cl}(z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_1 z^{-3} + \beta_0 z^{-4}) X_r(z^{-1}) \quad (6.155)$$

Lưu ý, vòng điều khiển vị trí có thể được phân tích trong miền thời gian (s) liên tục như là một giải pháp cho miền thời gian (z) gián đoạn. Tuy nhiên giải pháp này yêu cầu thực hiện xấp xỉ hàm mạch lọc số (digital filter) $D(z)$ trong miền s. Một trong những phép xấp xỉ thường dùng là $z = (1 + sT/2)/(1 - sT/2)$, được gọi là phép biến đổi song tuyến Tustin (Tustin's bilinear transformation). Hàm mạch lọc số $D(s)$ tương ứng khi đó là:

$$D(s) = K_p' \frac{s + a'}{s + b'} \quad (6.156)$$

Với $K_p' = K_p \frac{1-a'}{1-b'}; \quad a' = \frac{2}{T} \frac{1+a}{1-a}; \quad b' = \frac{2}{T} \frac{1+b}{1-b}$ (6.157)

Hoặc: $K_p' = K_p \frac{1-b'}{1-a'}; \quad a = \frac{Ta' - 2}{Ta' + 2}; \quad b = \frac{Tb' - 2}{Tb' + 2}$ (6.158)

Trong trường hợp này, hàm truyền mạch đóng của vòng vị trí trong miền Laplace trở thành:

$$G_{cl}(s) = \frac{D(s)K_d G_c(s)}{1 + D(s)K_d G_c(s)} \quad (6.159)$$

Sai số-tiếp theo (following-error) trong hệ thống CNC

Có hai đặc tính điển hình yêu cầu cho servo chạy dao:

- Có được đáp ứng quá độ, mịn để tránh dao động đường chạy dao khi thay đổi tốc độ.
- Tối thiểu sai lệch vị trí ở trạng thái ổn định, gọi là sai số-tiếp theo (following-error), để đạt được độ chính xác cắt biên dạng đa trục.

Khi gia công biên dạng ở trạng thái ổn định với tốc độ ăn dao f_c , vị trí chuẩn được biểu diễn là một đầu vào dốc (ramp):

$$X_r(kT) = f_c \cdot kT \quad (6.160)$$

Với k là nhịp lấy mẫu (sampling counter). Trong miền z, tín hiệu điều khiển độ dốc được thể hiện là:

$$X_r(k) = f_c \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (6.161)$$

Sai số-tiếp theo e_{ss} tương ứng khi đó là:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f_c Tz}{(z-1)D(z)G_c(z)} \quad (6.162)$$

Thay phương trình (6.134), (6.137), và (6.160) vào (6.162), ta có biểu thức tham số cho sai số- tiếp theo trong bộ truyền động chạy dao là:

$$e_{ss} = \frac{f_c K_s(1+b)}{K_l K_e K_p K_d(1+a)} \quad (6.163)$$

Như vậy, nếu hệ số khuếch đại hàm truyền vòng mở (open loop) $D(z)G_c(z)$ lớn hơn, thì sai số-tiếp theo sẽ nhỏ hơn, đó là sự mong muốn cho các nguyên công gia công biên dạng với nhiều trục. Tuy nhiên khả năng nâng cao hệ số khuếch đại vòng mở bị giới hạn bởi quán tính của hệ truyền động cơ khí và các giới hạn mômen của động cơ và mạch khuếch đại. Kỹ sư điều khiển phải điều chỉnh các tham số điều khiển số để đạt được một đáp ứng servo truyền động chạy dao tối ưu mà không gây nên bất cứ dao động hoặc lượng quá điều chỉnh nào.

Sai số-tiếp theo ở trạng thái ổn định được xác định khi sử dụng hàm truyền trong miền thời gian liên tục là:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{f_c}{s^2 [D(s)K_d G_c(s)]} \quad (6.164)$$

Với $G_c(s)$ và $D(s)$ cho trong công thức (6.136) và (6.156).

6.2.3. Mô hình không gian trạng thái của hệ thống truyền động chạy dao

Một mô hình không gian trạng thái cho servo truyền động chạy dao được sử dụng để thử mô hình nhận được khi sử dụng dữ liệu đáp ứng miền thời gian đo được. Để mô hình hoá trong không gian trạng thái, servo được chia thành các vùng liên tục và gián đoạn.

Phần liên tục của hệ thống bao gồm vòng điều khiển tốc độ (velocity control loop), phương trình (6.136) và mạch đếm hai chiều phương trình (6.133). *Ba trạng thái*: dòng ứng I_a , tốc độ góc ω và vị trí hiện thời X_v - được tìm như sau.

Từ hình 6.16, điện áp phản ứng được biểu diễn là:

$$U_a = K_U [K_I (S_g U_c - T_g H_g(\omega) - K_a I_a)] \quad (6.165)$$

Thay phương trình (6.109) vào (6.165), ta có:

$$\frac{dI_a}{dt} = -\frac{K_U K_a + R_a}{L_a} I_a - \frac{K_b + K_U K_I T_g H_g}{L_a} \omega + \frac{K_U K_I S_g}{L_a} U_c \quad (6.166)$$

Khử mômen động cơ T_m bằng thay (6.110) vào (6.111), cho:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_I}{J_c} I_a - \frac{B}{J_c} \omega - \frac{1}{J_c} T_s \quad (6.167)$$

Biến đổi Laplace ngược cho hàm truyền của mạch đếm hai chiều và encoder (phương trình 6.133) cho:

$$\frac{dX_a(t)}{dt} = K_e \omega(t) \quad (6.168)$$

Phương trình trạng thái (6.166 + 6.168) có thể tổ chức theo dạng không gian trạng thái chuẩn:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \quad (6.169)$$

Trong đó, vector trạng thái ($x_c(t)$) và vector đầu vào ($u_c(t)$) được xác định là:

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} I_a(t) \\ \omega(t) \\ X_a(t) \end{bmatrix} \quad u_c(t) = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

Và A_c và B_c là các ma trận bất biến:

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{K_U K_a + R_a}{L_a} & -\frac{K_b + K_U K_I T_g H_g}{L_a} & 0 \\ \frac{K_I}{J_c} & -\frac{B}{J_c} & 0 \\ 0 & K_e & 0 \end{bmatrix} \quad (6.171)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{K_U K_I S_g}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.172)$$

Phương trình trạng thái (6.169) thể hiện phần liên tục của hệ thống servo truyền động chạy dao. Phương trình này có nghiệm tương ứng rời rạc đối với khoảng thời gian quan sát T như sau:

$$x_c(k+1) = \Phi(T)x_c(k) + H(T)u_c(k) \quad (6.173)$$

Trong đó, các vectơ trạng thái và vectơ đầu vào tại khoảng lấy mẫu k được xác định là:

$$x_c(k) = \begin{bmatrix} I_a(k) \\ \omega(k) \\ X_a(k) \end{bmatrix} \quad u_c(k) = \begin{bmatrix} U_c(k) \\ T_s(k) \end{bmatrix} \quad (6.174)$$

$$\Phi(T) = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.175)$$

$$H(T) = \int_0^T e^{A_c t} dt \cdot B_c = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} \quad (6.176)$$

Ma trận $\Phi(T)$ được tính toán từ các giá trị riêng của ma trận A_c hoặc dãy Taylor mở rộng cho đương lượng thời gian gián đoạn của hệ thống thời gian liên tục. Do khoảng lấy mẫu (T) nhỏ, 3 số hạng đầu tiên của xấp xỉ dãy Taylor được cho là đủ cho nhiều ứng dụng:

$$\Phi(T) = e^{A_c T} = [I] + [A]T + \frac{[A]^2 T^2}{2!} + \dots \quad (6.177)$$

Các thành phần thời gian gián đoạn của vòng điều khiển vị trí gồm mạch lọc digital $-D(z)$ và hệ số khuếch đại $-K_d$ của bộ chuyển đổi D/A. Tín hiệu điều khiển tốc độ biểu diễn trong miền z là:

$$U_c(k) = K_p \frac{z+a}{z+b} K_d [X_r(k) - X_a(k)] \quad (6.178)$$

Phương trình này có thể sắp xếp lại:

$$U_c(k) = K_p K_d [X_r(k) - X_a(k)] + U_d(k) \quad (6.179)$$

Trong đó:

$$U_d(k) = K_p K_d \frac{a-b}{z+b} [X_r(k) - X_a(k)] \quad (6.180)$$

Các biến mới U_c và U_d có thể xem là trạng thái thứ tư tương ứng. Sau khi sắp xếp lại phương trình (6.180) và (6.178), lấy biến đổi ngược z của chúng, ta có được các phương trình trạng thái thời gian-gián đoạn (discrete-time state) như sau:

$$U_d(k+1) = -bU_d(k) + K_p K_d(a-b)[X_r(k) - X_a(k)] \quad (6.181)$$

$$U_r(k) = K_p K_d[X_r(k) - X_a(k) + U_d(k)] \quad (6.182)$$

Phương trình trạng thái thời gian rời rạc (6.180), (6.181) có thể kết hợp với phương trình trạng thái (6.174), thể hiện sự tương đương thời gian rời rạc của phần liên tục của động cơ servo chạy dao. Sắp xếp đại số ta có phương trình trạng thái hoàn chỉnh cho động cơ servo chạy dao:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= G(T)x(k) + \Gamma(T)u(k) \\ y(k) &= C_x x(k) + D_x u(k) \end{aligned} \quad (6.183)$$

Trong đó vector trạng thái, đầu vào và đầu ra được định nghĩa tương ứng là:

$$x(k) = \begin{bmatrix} V_d(k) \\ I_a(k) \\ \omega(k) \\ X_a(k) \end{bmatrix}; \quad u(k) = \begin{bmatrix} X_r(k) \\ T_v(k) \end{bmatrix}; \quad y(k) = \begin{bmatrix} K_c(t) \\ I_a(k) \\ \omega(k) \\ X_a(k) \end{bmatrix} \quad (6.184)$$

Ma trận trạng thái $G(T)$, ma trận đầu vào $\Gamma(T)$, ma trận đầu ra $C_x(T)$, và ma trận chuyển đổi $D_x(T)$ được xác định theo thứ tự sau:

$$\begin{aligned} G(T) &= \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & -K_p K_d(a-b) \\ h_{11} & \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} - h_{11} K_p K_d \\ h_{21} & \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} - h_{21} K_p K_d \\ h_{31} & \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} - h_{31} K_p K_d \end{bmatrix}; \quad \Gamma(T) = \begin{bmatrix} K_p K_d(a-b) & 0 \\ h_{11} K_p K_d & h_{12} \\ h_{21} K_p K_d & h_{22} \\ h_{31} K_p K_d & h_{32} \end{bmatrix}; \\ C_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -K_p K_d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_x = \begin{bmatrix} K_p K_d & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.185)$$

Vector đầu ra $y(k)$ cho đường truy xuất- nhập 3 tham số động lực hữu ích trong servo chạy dụng cụ, đó là dòng ứng, tốc độ góc và vị trí của bàn đối với một điều khiển vị trí cho trước và mômen cắt tác dụng. Những trạng thái khác trong hệ thống điều khiển có thể tìm được bằng cách nhân chúng với các hệ số khuếch đại thích hợp, theo sơ đồ khối thể hiện ở hình 6.16.

PHỤ LỤC

BIẾN ĐỔI LAPLACE

1. Biến đổi Laplace cơ bản

Ví dụ 1: Để xem xét biến đổi một đại lượng từ miền thời gian vào trong miền $-s$, xét một hàm, có giá trị hằng số 1 cho thời gian lớn hơn 0, tức $f(t)=1$ với $t \geq 0$. Điều kiện này miêu tả một hàm bậc thang đơn vị, như thể hiện ở hình Ph.1. Khi đó biến đổi Laplace là:

$$\mathbb{C}\{f(t)\}=F(s)=\int_0^{\infty} 1e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{s} \left[e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

Với $t=\infty$ giá trị của $e^{-\infty}$ bằng 0 và với $t=0 \rightarrow e^0=1$, khi đó:

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Ví dụ 2: Xác định biến đổi Laplace hàm e^{at} với a là hằng số. Biến đổi Laplace của $f(t)=e^{at}$ là:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} \left[e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty}$$

Khi $t=\infty$, $\left[e^{-(s-a)t} \right] \rightarrow 0$ và khi $t=0$, nó $=-1$, nên:

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

2. Hàm tín hiệu vào dạng bậc đơn vị và xung lực

Các tín hiệu vào hệ thống thường ở dạng bậc thang đơn vị và xung lực.

Hàm bậc đơn vị

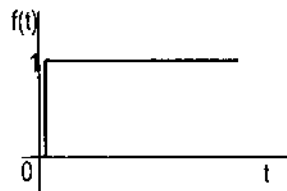
Hình Ph.1 thể hiện đồ thị của một hàm bậc đơn vị, bậc xuất hiện tại $t=0$, có phương trình:

$$f(t)=1 \text{ cho tất cả các giá trị } t > 0$$

$$f(t)=0 \text{ cho tất cả các giá trị } t < 0$$

Hàm bậc miêu tả đại lượng thay đổi từ 0 đến một giá trị tựa như điện áp, đặt vào một mạch điện khi bất thành linh đóng điện.

Như vậy, hàm bậc đơn vị không thể miêu tả bằng hàm $f(t)=1$, vì hàm này thể hiện là một hàm có giá trị 1 tại tất cả các giá trị của t , (cả dương lẫn âm). Hàm bậc đơn vị chuyển từ 0 đến +1 tại $t=0$, thường được miêu tả bởi $u(t)$ hoặc $H(t)$ (H tên người khởi xướng



Hình Ph.1 : Hàm bậc đơn vị

hàm này O.Heaviside, vì vậy đôi khi người ta gọi đó là hàm Heaviside).

Biến đổi Laplace cho hàm bậc đơn vị là:

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Biến đổi Laplace cho một hàm bậc có chiều cao a là:

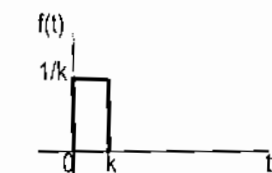
$$F(s) = \frac{a}{s}$$

Hàm xung lực

Xét một xung chữ nhật có kích thước $1/k$ xảy ra tại thời điểm $t=0$, chiều rộng xung bằng k , tức diện tích xung là 1. Hình Ph.2 thể hiện xung này, có thể miêu tả là:

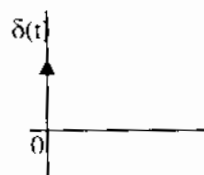
$$f(t) = \frac{1}{k} \text{ với } 0 \leq t < k$$

$$f(t) = 0 \text{ với } t > k$$



Hình Ph.2 : Hàm xung vuông

Nếu giữ diện tích xung bằng 1, nhưng giảm chiều rộng của xung (giảm k), chiều cao sẽ tăng, như vậy khi $k \rightarrow 0$ xung này tiến tới một đường thẳng đứng tại $t=0$ với chiều cao của đồ thị tiến đến vô cực. (hình Ph.3) . Một biểu đồ như vậy được sử dụng để thể hiện một xung lực (xung nhọn).



Hình Ph.3 : Hàm xung

Gọi là một xung lực đơn vị nếu diện tích bao bởi xung bằng 1. Hàm này được thể hiện là $\delta(t)$, *hàm xung lực đơn vị* (unit impulse function) hoặc hàm Dirac -delta.

Biến đổi Laplace cho xung chữ nhật đơn vị trong hình Ph.3 được cho bởi:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^k \frac{1}{k} e^{-st} dt + \int_k^{\infty} 0 e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{sk} e^{-st} \right]_0^k = -\frac{1}{sk} (e^{-sk} - 1)$$

Để thu được biến đổi Laplace cho xung lực đơn vị ta cần tìm ra giá trị của kết quả trên khi $k \rightarrow 0$. Điều này có thể thực hiện được khi mở rộng thành phần có số mũ thành dãy số:

$$e^{-sk} = 1 - sk + \frac{(-sk)^2}{2!} + \frac{(-sk)^3}{3!} + \dots$$

Có thể viết lại thành:

$$F(s) = 1 - \frac{sk}{2!} + \frac{(sk)^2}{3!} + \dots$$

Giới hạn của dãy trên (biến đổi Laplace) tiến đến 1 khi $k \rightarrow 0$.

$$\mathbb{C}\{\delta(t)\}=1$$

Diện tích của xung đơn vị là 1 nên có thể định nghĩa kích thước của xung này là 1. Nếu một xung lực có kích thước a, thì hàm sẽ được thể hiện bởi $a\delta(t)$ và biến đổi Laplace sẽ là:

$$\mathbb{C}\{a\delta(t)\}=a$$

3. Các biến đổi Laplace chuẩn

Xác định biến đổi Laplace cho các hàm không nhất thiết phải đánh giá các tích phân vì đã có bảng lập sẵn các biến đổi Laplace cho các hàm thường gặp. Những hàm này kết hợp với kiến thức về đặc tính biến đổi (xem phần tiếp theo) tạo khả năng giải quyết những vấn đề thường xảy ra thực tế. Bảng Ph.1 liệt kê một số hàm thời gian thường gặp và biến đổi Laplace của chúng:

Bảng Ph.1 biến đổi Laplace:

TT	Hàm thời gian $f(t)$	Biến đổi Laplace $F(s)$
1	Xung đơn vị, $\delta(t)$	1
2	Xung đơn vị bị trễ, $\delta(t-T)$	e^{-sT}
3	Bậc đơn vị, $u(t)$	$\frac{1}{s}$
4	Bậc đơn vị trễ, $u(t-T)$	$\frac{e^{-sT}}{s}$
5	Dốc đơn vị, t	$\frac{1}{s^2}$
6	Dốc bậc n, t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7	Phân rã theo luật số mũ, e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
8	Tăng trưởng theo luật số mũ, $1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
9	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{s^{n+1}(s+a)}$
11	$t - \frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
12	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
13	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

Tiếp bảng Ph.1

14	$1 - \frac{b}{(b-a)}e^{-at} + \frac{a}{b-a}e^{-bt}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$
15	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-a)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
16	Sóng sin, $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
17	Sóng cosin, $\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
18	Sóng sin tắt dần, $e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
19	Sóng cosin tắt dần, $e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
20	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
21	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
22	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
23	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
24	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
25	$e^{-at} \sin(\omega t + \theta)$	$\frac{(s+a) \sin \theta + \omega \cos \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
26	$e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$	$\frac{(s+a) \cos \theta - \omega \sin \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
27	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega t} \sin \omega \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta \omega s + \omega^2}$
28	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta), \cos \phi = \zeta$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega s + \omega^2)}$
29	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
30	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Tiếp bảng Ph.1.

31	$e^{-at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$
32	$e^{-at} \cosh \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 - \omega^2}$
33	Sóng sin chỉnh lưu một nửa, chu kì $T=2\pi/\omega$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\pi s/\omega})}$
34	Sóng sin chỉnh lưu toàn bộ, chu kì $T=2\pi/\omega$	$\frac{\omega(1 + e^{-\pi s/\omega})}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\pi s/\omega})}$
35	Xung chữ nhật chu kì T , biên độ từ +1 đến 0	$\frac{1}{s(1 + e^{-sT/2})}$
Ghi chú: $f(t)=0$ cho tất cả các giá trị t âm. Trong hầu hết các hàm thời gian, thành phần $u(t)$ được thừa nhận là có thể bỏ qua.		

Tính chất của các biến đổi Laplace

Sau đây là các tính chất cơ sở của biến đổi Laplace, những tính chất này tạo khả năng lập bảng biến đổi Laplace chuẩn để được sử dụng ở phạm vi rộng hơn.

Tính tuyến tính

Nếu có hai hàm thời gian riêng biệt, $f(t)$ và $g(t)$, thì biến đổi Laplace cho hàm tổng thời gian, bằng tổng biến đổi Laplace của hai hàm.

$$\mathbb{C}\{af(t)+bg(t)\}= a\mathbb{C}f(t)+ b\mathbb{C}g(t)$$

a và b là hằng

Ví dụ 3: Biến đổi Laplace của $1+2t+4t^2$ được cho bởi tổng biến đổi của từng hạng mục trong biểu thức. Như vậy nếu sử dụng các thành phần 1,5 và 6 trong bảng Ph.1, ta có:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s^3}$$

Tính chất dịch chuyển trong miền- s

Tính chất này được sử dụng để xác định biến đổi Laplace hàm có hệ số mũ, đôi khi được gọi là đặc tính dịch chỉnh thứ nhất (first shifting property).

Nếu $F(s) = \mathbb{C}\{f(t)\}$ thì:

$$\mathbb{C}\{e^{-at} f(t)\} = F(s-a)$$

Ví dụ 4: Xác định biến đổi Laplace của $e^{at} t^n$: do biến đổi Laplace của t^n là $n!/s^{n+1}$

theo mục 6 ở bảng Ph.1, ta có:

$$\mathcal{C}\{e^{-at^n}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Tính chất dịch chuyển trong miền thời gian

Nếu một tín hiệu trễ một thời gian T , thì biến đổi Laplace của tín hiệu được nhân với e^{-sT} . Gọi $F(s)$ là biến đổi Laplace của $f(t)$ thì :

$$\mathcal{C}\{f(t-T)u(t-T)\} = e^{-sT} F(s)$$

Sự trễ tín hiệu một thời gian T được quy về định lý dịch chỉnh lần hai (second shift theorem). Tính chất dịch chỉnh trong miền thời gian có thể áp dụng cho tất cả các biến đổi Laplace. Như vậy, đối với một xung lực $\delta(t)$ trễ một thời gian T , hàm trễ $\delta(t-T)$ có biến đổi là $1e^{-sT}$ (biến đổi Laplace của $\delta(t)$ chính là 1)

Các hàm tuần hoàn (periodic functions)

Hàm $f(t)$ gọi là hàm tuần hoàn trong thời gian T nếu biến đổi Laplace cho hàm này là:

$$\mathcal{C}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s) \quad (1)$$

Với $F(s)$ là biến đổi Laplace của hàm cho chu kỳ đầu tiên



Hình Ph.4 : Hàm bậc đơn vị

Ví dụ 5: Xét biến đổi Laplace cho các xung tuần hoàn trong thời gian T , như thể hiện trong hình Ph.4. Biến đổi Laplace của một xung đơn được cho bởi $(1/s)(1-e^{-sT/2})$. Sử dụng phương trình (1), biến đổi Laplace khi ấy sẽ là:

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} \times \frac{1}{s} (1-e^{-sT/2}) = \frac{1}{s(1+e^{-sT/2})}$$

Định lý giá trị đầu tiên và giá trị cuối cùng

Định lý giá trị đầu tiên có thể được phát biểu như sau; nếu một hàm thời gian $f(t)$ có biến đổi Laplace $F(s)$ thì giá trị của hàm theo giới hạn khi thời gian tiến đến 0, được cho bởi:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Định lý giá trị cuối cùng có thể phát biểu là nếu một hàm thời gian $f(t)$ có biến đổi Laplace $F(s)$ thì giá trị của hàm được cho bởi giới hạn của nó khi thời gian tiến đến vô cùng, là:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Đạo hàm

Biến đổi Laplace của đạo hàm một hàm được cho bởi:

$$\mathbb{C} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = sF(s) - f(0)$$

Với $f(0)$ là giá trị của hàm khi $t=0$. Đối với một đạo hàm bậc hai, ta có:

$$\mathbb{C} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(0)$$

Với $\frac{d}{dt} f(0)$ là giá trị của đạo hàm bậc một tại $t=0$. Các ví dụ về biến đổi Laplace cho đạo hàm được cho ở chương 3 phần 3.2.2.

Tích phân

Biến đổi Laplace của tích phân hàm $f(t)$, hàm có biến đổi Laplace là $F(s)$ được cho bởi:

$$\mathbb{C} \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Ví dụ 6. Biến đổi Laplace cho tích phân của hàm e^{-t} giữa các giới hạn 0 và t , được cho bởi:

$$\mathbb{C} \left\{ \int_0^t e^{-t} dt \right\} = \frac{1}{s} \mathbb{C} \{ e^{-t} \} = \frac{1}{s(s+1)}$$

4. Biến đổi ngược

Biến đổi Laplace ngược là sự chuyển đổi một biến đổi Laplace $F(s)$ thành hàm thời gian $f(t)$. Điều này có thể thực hiện bởi:

$$\mathbb{C}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Chuyển đổi ngược có thể thực hiện được với sự trợ giúp của bảng Ph.1. Tính tuyến tính của biến đổi Laplace là nếu một biến đổi là tổng của hai thành phần và yêu cầu có chuyển đổi ngược thì ta có thể thực hiện biến đổi ngược của từng thành phần riêng lẻ và lấy tổng của chúng:

$$\mathbb{C}^{-1}\{aF(s)+bG(s)\}=a\mathbb{C}^{-1}F(s)+b\mathbb{C}^{-1}g(s)$$

Như vậy với sự sắp xếp lại, ta có thể để các số hạng theo đúng dạng chuẩn như thể hiện trong bảng Ph.1. Ví dụ, biến đổi ngược $3/(2s+1)$ thu được, khi sắp đặt lại, ta có:

$$\frac{3(1/2)}{s + (1/2)} \quad (2)$$

Bảng Ph.1(TT.7) chứa chuyển đổi $1/(s+a)$ có chuyển đổi ngược là e^{-at} . Như vậy, chuyển đổi ngược của (2) có dạng: hàm này nhân với hằng số $(3/2)$ với $a=(1/2)$, tức $(3/2)e^{-t/2}$.

Ví dụ 7: Xét biến đổi Laplace ngược hàm $(2s+2)/(s^2+1)$. Biểu thức này có thể sắp xếp lại là:

$$2 \left[\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \right]$$

Thành phần thứ nhất trong móc vuông có chuyển đổi ngược là $\cos t$ (trong bảng Ph.1, TT. 17), số hạng thứ hai là $\sin t$ (trong bảng Ph.1, TT16). Như vậy biểu thức của chuyển đổi ngược là:

$$2 \cos t + 2 \sin t$$

Phân số từng phần

Thường $F(s)$ là tỉ số của hai đa thức, khó xác định được với biến đổi chuẩn (trong bảng Ph.1. Nó cần được chuyển đổi thành các số hạng phân số đơn giản trước khi có thể sử dụng các chuyển đổi chuẩn. Quá trình chuyển đổi một biểu thức thành các số hạng phân số đơn giản gọi là phân ly thành *phân số từng phần* (partial fractions). Kỹ thuật này sử dụng để tạo ra bậc của tử số, n nhỏ hơn mẫu số, m ($n < m$). Bậc của đa thức là số mũ cao nhất của s trong biểu thức. Khi bậc của tử số bằng hoặc cao hơn bậc của mẫu số, thì phải chia tử cho mẫu cho đến khi kết quả là tổng của các số hạng với các số hạng phân số còn lại có bậc của mẫu lớn hơn tử số.

Ta có thể xem xét 3 kiểu cơ bản của phân số từng phần sau:

1. Mẫu số chứa hệ số có dạng $(s+a)$, $(s+b)$, $(s+c)$, được thể hiện ở dạng:

$$\frac{f(s)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Nó có các phân số từng phần là:

$$\frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)} + \frac{C}{(s+c)}$$

2. Mẫu số có hệ số $(s+a)$ lặp lại, tức mẫu số chứa một lũy thừa của hệ số này, có dạng:

$$\frac{f(s)}{(s+a)^n}$$

Các phân số từng phần là:

$$\frac{A}{(s+a)^1} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)^3} + \dots + \frac{N}{(s+a)^n}$$

3. Mẫu số chứa các hệ bậc hai mà bậc hai này không thể đặt thừa số nếu không có số hạng ảo. Đối với một biểu thức dạng:

$$\frac{f(s)}{(as^2 + bs + c)(s + d)}$$

Các phân số từng phần là:

$$\frac{As + B}{as^2 + bs + c} + \frac{C}{s + d}$$

Giá trị các hằng A, B, C, v...v có thể tìm được khi sử dụng tương đương giữa biểu thức và các phân số từng phần phải là số thực cho tất cả các giá trị của s hoặc các hệ số sⁿ trong biểu thức phải bằng sⁿ trong phần mở rộng phân số từng phần.

Ví dụ 7: Hàm từng phần của:

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} \text{ là } \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

Để cho 2 biểu thức cân bằng, ta phải có:

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A(s + 2) + B(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

Kết quả:

$$3s + 4 = A(s + 2) + B(s + 1)$$

Biểu thức này phải là thực cho tất cả các giá trị của s. Khi ấy, thủ tục tuyến chọn các giá trị cho s sẽ tạo nên một số số hạng chứa hằng trở thành 0, như vậy tạo khả năng xác định các hằng khác. Nếu để s = -2 ta sẽ có:

$$3(-2) + 4 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$$

Như vậy B = 2. Nếu để s = -1 thì :

$$3(-1) + 4 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1) \rightarrow A = 1$$

Nên:

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s + 2}$$

Kết luận: biến đổi Laplace được sử dụng để đơn giản hoá việc phân tích và thiết kế các hệ thống bất biến tuyến thời gian, trong thời gian liên tục hoặc rời rạc.

MỤC LỤC

<i>Chương 1. Tổng quan</i>	4
1.1. Sự tích hợp	4
1.2. Tín hiệu	6
1.3. Các thành phần chủ yếu của hệ thống cơ điện tử.....	8
1.4. Sản phẩm cơ điện tử.....	9
<i>Chương 2. Mô hình hệ thống cơ điện tử trong chế tạo máy</i>	10
2.1. Mô hình các hệ thống cơ bản.....	10
2.1.1. Mô hình toán học	10
2.1.2. Các khối đặc trưng của một hệ thống cơ khí.....	11
2.1.3. Các khối đặc trưng hệ thống điện	19
2.1.4. Khối đặc trưng cho hệ thống thủy, khí.....	24
2.1.5. Các khối đặc trưng nhiệt	32
2.2. Các Mô hình hệ thống	34
2.2.1. Các hệ thống kỹ thuật	34
2.2.2. Hệ thống quay- tịnh tiến	37
2.2.3. Hệ thống cơ điện (electromechanical)	38
2.2.4. Hệ thống cơ -thủy lực	42
<i>Chương 3. Đáp ứng động học của các hệ thống</i>	46
3.1. Phản ứng động học.....	46
3.1.1. Mô hình hệ thống động học	46
3.1.2. Các hệ thống bậc 1	48
3.1.3. Hệ thống bậc 2	55
3.1.4. Các tiêu chí để đánh giá đặc tính cho hệ thống bậc hai	62
3.2. Các hàm truyền hệ thống	65
3.2.1. Hàm truyền	65
3.2.2. Các ứng dụng cho hệ thống bậc 1 và bậc 2.....	70
<i>Chương 4. Đáp ứng tần số</i>	78
4.1. Đầu vào dạng sin:	78
4.2. vectơ pha (Vectơ pha).....	78
4.2.1. Khái niệm	79
4.2.2. Các phương trình của vectơ pha	80
4.3. đáp ứng tần số	81
4.3.1. Đáp ứng tần số cho các hàm bậc 1	81

4.3.2. Đáp ứng tần số cho các hệ thống bậc 2	83
4.4. Đồ thị Bode (Bode plots)	84
4.4.1. Các ví dụ về đồ thị Bode	85
4.4.2. Xây dựng đồ thị Bode (Bode plot)	88
4.5. Đặc điểm kỹ thuật.....	91
4.6. độ ổn định.....	91
<i>Chương 5. Phân tích trạng thái và đặc tính của hệ thống</i>	95
5.1. Trạng thái của một hệ thống	95
5.2. Mô tả không gian trạng thái cho hệ thống thời gian- liên tục	98
5.2.1. Tuyến tính hoá	98
5.2.2. Mô hình không gian trạng thái tuyến tính	101
5.2.3. Cấu trúc của đáp ứng không cưỡng bức (unforced response)	103
5.2.4. Cấu trúc của đáp ứng cưỡng bức(forced response):	103
5.2.5. Sự biến đổi đồng dạng trạng thái	105
5.2.6. Mối quan hệ không gian trạng thái và các hàm truyền đạt	106
5.3. không gian trạng thái các hệ thống lấy mẫu và thời gian rời rạc (Discrete-Time and sampled Data System).....	109
5.3.1. Tuyến tính hoá các hệ thống thời gian gián đoạn.	109
5.3.2. Các hệ thống lấy mẫu dữ liệu (Sampled Data System)	110
5.3.3. Mô hình không gian trạng thái tuyến tính	112
5.4. Mô hình không gian trạng thái cho các hệ thống có nối kết	119
5.5. Tính chất của hệ thống.....	121
5.5.1. Tính điều khiển được (controllability), tính đạt được (reachability) và tính ổn định được (stabilizability).....	121
5.5.2. Tính quan sát được & tái lập được	125
<i>Chương 6. Phân tích hệ thống- máy công cụ CNC</i>	127
6.1. Biến dạng tĩnh và biến dạng động trong gia công.....	127
6.2. Thiết kế và phân tích các hệ thống CNC.....	153
6.2.1. Hệ truyền động máy công cụ	153
<i>Phụ lục</i>	176
Biến đổi laplace.....	176
<i>Tài liệu tham khảo</i>	187

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] NANYANG POLYTECHNIC, SINGAPORE
Mechtronic system technology
Phát hành nội bộ cho khoá đào tạo mechatronics, 1995
- [2] PROF. DR. ING R. NORDMAN, PROF. DR. ING H. BIRKHOFER
Maschinenelemente und Mechantronik I
Shaker Verlag GmbH 2002
- [3] Prof. Dr. Ing R. NORDMAN
Mechatronische Systeme im Maschinenbau I
Shaker Verlag GmnH 2002
- [4] W. BOLTON
Mechatronics- Electronics control systems in mechanical engineering
Longman Group limited 1995
- [5] ROBERT H.BISHOP
The mechatronics handbook
CRC Press 2002
- [6] YUSUF ALTINAS
Manufacturing automation
Cambridge University Press, 2000
- [7] GEORGE C. STANTON
Numerical Control Programing
John Wiley&Son Inc., 1988
- [8] TIEN-CHIEN CHANG, RICHARD A. WYSK, HSU-PIN WANG
Computer-aided Manufacturing
Prentice Hall International, 1998
- [9] ZOU.K
Essential of Robust Control
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998
- [10] Một số w.w.w

[11] PHẠM THƯỢNG HÀN, NGUYỄN TRỌNG QUẾ,
NGUYỄN VĂN HOÀ

Kỹ thuật đo lường và các đại lượng vật lý

Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1996

[11] NGÔ ĐIỆP TẬP

Đo lường và điều khiển bằng máy tính

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật Hà Nội, 1996

[12] ĐỖ XUÂN THỤ, NGUYỄN ĐỨC THUẬN, NGUYỄN HỮU SƠN

Kỹ thuật điện tử

Nhà xuất bản Giáo dục 1997

[13] GS.TS NGUYỄN VĂN KHANG

Đạo động kỹ thuật

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1998

[14] PGS. TS VŨ HOÀI ÂN

Nền sản xuất CNC

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2003

[15] TRẦN VĂN ĐỊCH, NGUYỄN TRỌNG BÌNH và những người khác

Số tay công nghệ chế tạo máy

Trường Đại học Bách khoa Hà nội, 2000

[16] NGUYỄN ĐẮC LỘC, LÊ VĂN TIẾN và những người khác

Số tay công nghệ chế tạo máy tập 1,2,3

Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật 2001

[17] TS. VÕ THỊ RY,

Tổng quan về cơ điện tử-

- Khả năng thực hiện trên cơ sở vật chất của Viện IMI

Báo cáo đề tài nghiên cứu khoa học công - nghệ cấp bộ, 2001

205046



Giá: 24.000đ